Kvadratická rovnice

1. Pomocí doplnění kvadratického trojčlenu na úplný čtverec řešte v oboru $\mathbb{R}$ kvadratické rovnice:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

- úprava na úplný čtverec:

$$x^2 - 3x + \_ = (x - \_)^2 \quad \ldots\ldots \quad (x-a)^2 = x^2 - \underbrace{2a}_{3}x + a^2.$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}.$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}.$$

my ale máme $x^2 - 3x + 2$, tj. musíme ještě $\frac{1}{4}$ odečíst:

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

- dále řešíme rovnici $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$ pomocí rozkladu $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$$\left[\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] \cdot \left[\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$\left[x - \frac{4}{2}\right] \cdot \left[x - \frac{2}{2}\right] = 0$$

$$(x-2) \cdot (x-1) = 0$$

- součin je roven nule tehdy, když alespoň jeden z činitelů je nulový $\Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1$

$K = \{1, 2\}$

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

- zjednodušíme rovnici vydělením dvěma:

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = 0$$

- upravíme na úplný čtverec:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

- řešíme rovnici

$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$, která je v $\mathbb{R}$ neřešitelná

$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{4}$ … kvadrát nemůže být roven záp. číslu.

$K = \emptyset$

2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $px^2+(2p+1)x+p-4=0$ s parametrem $p\in\mathbb{R}$.

- $p=0$: lin. rce $x-4=0 \Rightarrow x=4$
- $p\neq 0$: spočítáme diskriminant $D=(2p+1)^2-4p(p-4)=20p+1$

$D\geq 0 \Leftrightarrow 20p+1 \geq 0 \Leftrightarrow p\geq -\frac{1}{20}$:

$p=-\frac{1}{20}$: rovnice má dvojnásobný kořen $x_{1,2}=\frac{-2p-1}{2p}=9$

$p>-\frac{1}{20}$: rovnice má dva reálné kořeny $x_{1,2}=\frac{-2p-1\pm\sqrt{D}}{2p}$

Reciproké rovnice

3. $6x^5+41x^4+97x^3+97x^2+41x+6=0$

- jedná se o rovnici 1. druhu lichého stupně, má určitě kořen $c=-1$:

	6	41	97	97	41	6
−1	6	35	62	35	6	0

$$\underbrace{(6x^4+35x^3+62x^2+35x+6)}\cdot(x+1)=0$$

rovnice 1. druhu sudého stupně, vydělíme x^2

$$6x^2+\frac{6}{x^2}+35x+\frac{35}{x}+62=0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0 \qquad \text{subst. } x+\frac{1}{x}=p$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=p^2 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=p^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=p^2-2$$

$$6(p^2-2)+35p+62=0$$

$$6p^2-12+35p+62=0$$

$$6p^2+35p+50=0$$

$$p_{1,2}=\frac{-35\pm\sqrt{1225-1200}}{12}=\frac{-35\pm 5}{12}= \begin{cases} -\frac{10}{3} \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \quad /\cdot x$$

$$x^2+1=-\frac{10}{3}x$$

$$x^2+\frac{10}{3}x+1=0$$

$$3x^2+10x+3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-10\pm 8}{6}= \begin{cases} -3 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$$

$$x^2+1=-\frac{5}{2}x$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+1=0$$

$$2x^2+5x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{4}=\left\langle\begin{matrix}-2\\-\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$$

$$K=\left\{-1,-2,-\frac{1}{2},-3,-\frac{1}{3}\right\}$$

4. $5x^4-12x^3+12x-5=0$

– rovnice sudého stupně ⇒ má kořen $c=1$

	5	−12	0	12	−5
1	5	−7	−7	5	0

$$\underbrace{(5x^3-7x^2+\cancel{0}\overset{-7}{}x+5)}(x-1)=0$$

rovnice 1. druhu lichého stupně ⇒ má kořen $c=-1$:

	5	−7	−7	5
−1	5	−12	5	0

$$\underbrace{(5x^2-12x+5)}_{\text{kvadr. rce}}\cdot(x-1)\cdot(x+1)=0$$

$$x_{3,4}=\frac{12\pm\sqrt{144-100}}{2\cdot5}=\frac{12\pm\sqrt{44}}{10}=\frac{12\pm\sqrt{4\cdot11}}{10}=\frac{12\pm2\cdot\sqrt{11}}{10}=$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{11}}{5}$$

$$K=\left\{1;-1;\frac{6+\sqrt{11}}{5};\frac{6-\sqrt{11}}{5}\right\}$$

5. $5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$

– rovnice 1. druhu sudého stupně $\Rightarrow$ rovnou zavádíme substituci; dělíme rovnici x^2 :

$$5x^2 - 26x + 10 - 26 \cdot \frac{1}{x} + 5 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

$$5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 26\left(x - \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = p$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = p^2 - 2$$

$$5(p^2 - 2) - 26p + 10 = 0$$

$$5p^2 - 10 - 26p + 10 = 0$$

$$5p^2 - 26p = 0$$

$$p(5p - 26) = 0 \qquad p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{26}{5}$$

$$x + \frac{1}{x} = 0 \quad / \cdot x$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm i$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5} \quad / \cdot 5x$$

$$5x^2 + 5 = 26x$$

$$5x^2 - 26x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{10} = \frac{26 \pm 24}{10} = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ 5 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{K = \left\{-i; i; \frac{1}{5}; 5\right\}}}$$