Binomická rovnice

1. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^4 + 2 - 2i = 0$.

Danou rovnici upravíme na tvar $x^4 = -2 + 2i$.

Číslo $-2+2i$ vyjádříme v goniometrickém tvaru:

$$-2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

Z tohoto čísla vytvoříme 4tou odmocninu užitím věty

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|}\cdot\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{4}\right),\quad k\in\{0,1,2,3\}$$

Existují 4 kořeny, konkrétně

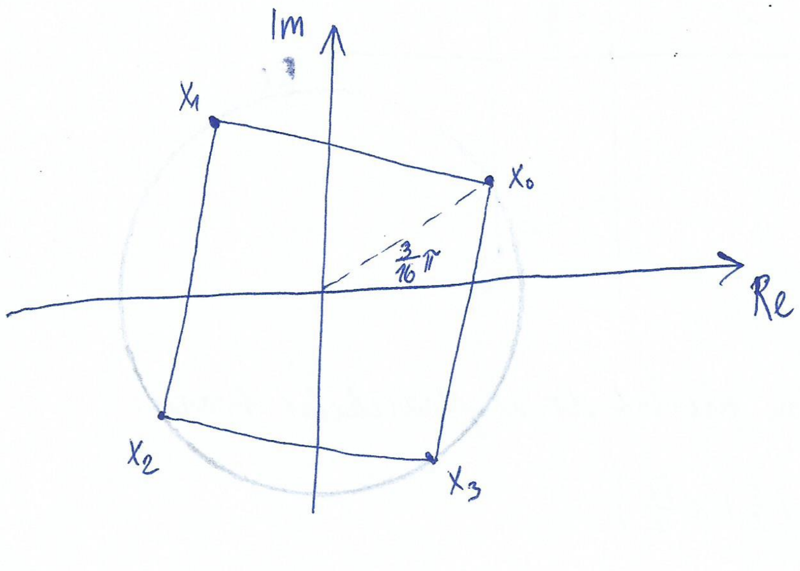
$$x_0 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3}{16}\pi + i\sin\frac{3}{16}\pi\right)$$

$$x_1 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11}{16}\pi + i\sin\frac{11}{16}\pi\right)$$

$$x_2 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19}{16}\pi + i\sin\frac{19}{16}\pi\right)$$

$$x_3 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{27}{16}\pi + i\sin\frac{27}{16}\pi\right)$$

jejich obrazy v Gaussově rovině leží ve vrcholech čtverce



2. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^3 + 27 = 0$

$$x^3 = -27$$

$$-27 = 27 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$x_k = 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + k\pi}{3} \right) \; ; \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

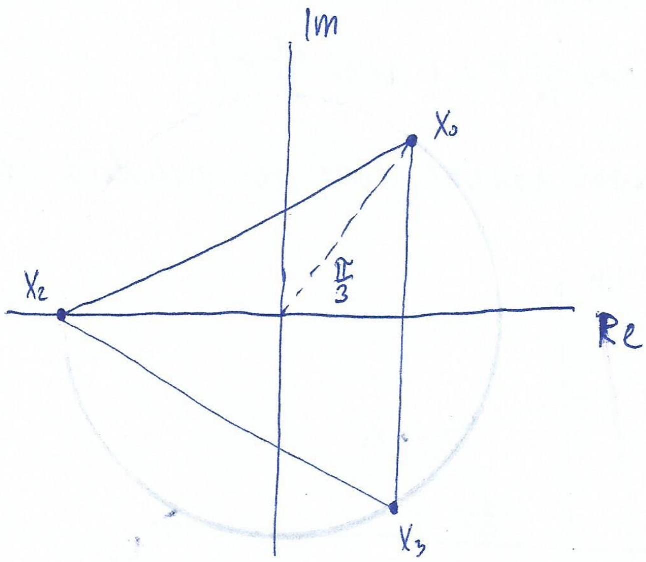
Řešením jsou konkrétní čísla

$$x_0 = 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$x_1 = 3 \cdot \left(\cos \pi + i \sin \pi \right)$$

$$x_2 = 3 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

jejich obrazy v Gaussově rovině leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku



Tato čísla je možné převést do algebraického tvaru:

$$x_0 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

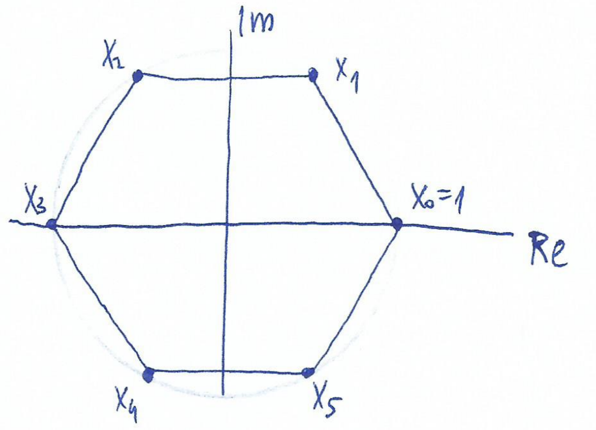
$$x_1 = -3$$

$$x_3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

3. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^6-1=0$.

Kořeny této rovnice jsou čísla

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}, \qquad k\in\{0,\dots,5\}$$



4. V $\mathbb{C}$ řešte rovnice a jejich kořeny znázorněte v Gaussově rovině:

a) $x^3-i=0$

b) $x^6+64=0$

c) $x^4-1=0$

d) $x^8+1=0$

[a) $x_k = \cos\frac{\frac{1}{2}x+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{1}{2}x+2k\pi}{3}$, $k\in\{0,1,2\}$

b) $x_k = 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)$, $k\in\{0,\dots,5\}$

c) $x_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$, $k\in\{0,1,2,3\}$

d) $x_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{8} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{8}$, $k\in\{0,\dots,7\}$]

5. V $\mathbb{C}$ řešte rovnici:

$$x^5+1-i\sqrt{3}=0$$

[$x_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{5}\right)$, $k\in\{0,\dots,4\}$]