Petr Zemánek, Petr Hasil

Sbírka řešených příkladů z Matematické analýzy I

Kapitola I.5 Vyšetřování průběhu funkce, příklad 266

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Řešení (upraveno L. Másilkem)

1. Definiční obor

$x^2 \neq 1 \Rightarrow D(f) = \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$ *Body* $-1, 1$ *jsou body nespojitosti...*

2. Sudá, lichá funkce

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$ *Funkce* $f(x)$ *je lichá.*

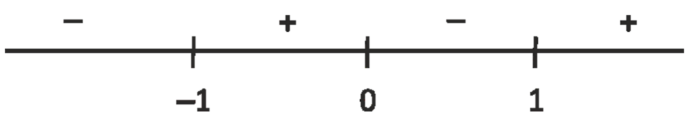
3. Charakteristika bodů nespojitosti

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \infty$

4. Řešení $f(x) = 0$ ... intervaly, kdy je funkce nad (pod) osou x

$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *Bod* $x = 0$ *je nulovým bodem funkce* $f(x)$.

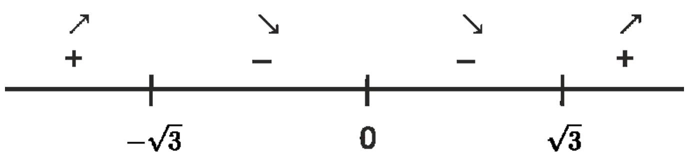


5. Řešení $f'(x) = 0$ ... intervaly monotonie, lokální extrémy

$$f'(x) = \left[\frac{x^3}{x^2 - 1}\right]' = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

$D(f') = \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$

Body $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$ *jsou nulové. Body nespojitosti není nutné uvažovat, protože neovlivňují znaménko* $f'(x)$.



Lokální maximum: $-\sqrt{3}$ $f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{3-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Lokální minimum: $\sqrt{3}$ $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

6. Řešení $f''(x) = 0$ ... intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body

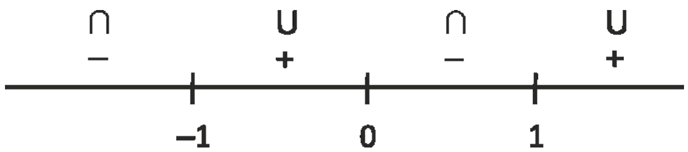
$$f''(x) = \left[\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}\right]' = \frac{(4x^3 - 6x)\cdot(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{2x\cdot(2x^2-3)\cdot(x^2-1) - 4x\cdot(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x\cdot[2x^4 - 3x^2 - 2x^2 + 3 - 2x^4 + 6x^2]}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$D(f'') = \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$

Bod $x = 0$ *je nulový.*



Inflexní bod: 0 $f(0) = 0, f'(0) = 0$

7. Asymptoty

Bez směrnice: $x = -1, x = 1$ *Průběh grafu funkce v okolí asymptot je popsán v bodu 4*

Se směrnicí: $y = kx + q$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x\cdot(x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

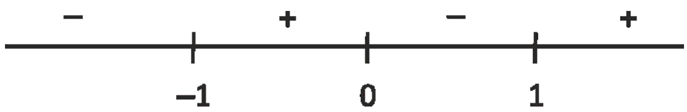
$$q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - x\cdot(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0$$

Asymptota se směrnicí: $y = x$

8. Shrnutí

$D(f) = \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$, lichá funkce

Znaménka funkce $f(x)$

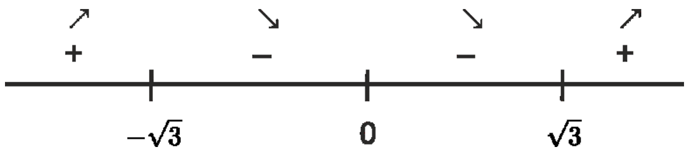


Asymptoty bez směrnice:

$x = -1$: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \infty$

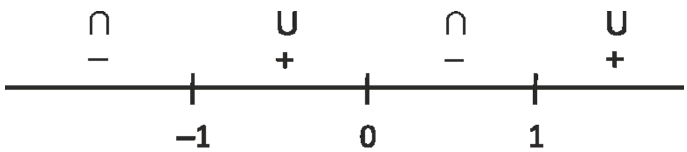
$x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

Znaménka funkce $f'(x)$



Lokální maximum: $\left[-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, lokální minimum: $\left[\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Znaménka funkce $f''(x)$



Inflexní bod: $[0, 0]$, $f'(0) = 0$

Asymptota se směrnicí: $y = x$

9. Graf