<u>**MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1**</u>

10. cvičení (27. dubna 2020 původně)

Parciální derivace 1. řádu - definice

Nechť funkce $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definovaná v bodě $[x_0;y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x)=f(x,y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v~bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0;y_0]$ a označujeme $f_x(x_0,y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ f_{x'}(x_0,y_0)$. To znamená, že

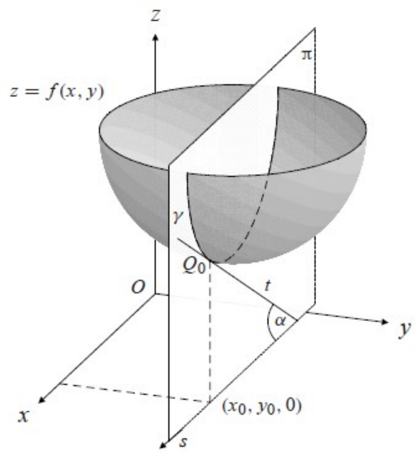
$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y)=f(x_0,y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0;y_0]$ a označujeme $f_y(x_0,y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ f_{y'}(x_0,y_0)$.

<u>Poznámka:</u> Při parciální derivaci podle proměnné x bereme proměnnou y jako konstantu a takto s ní nakládáme při derivaci. Stejně naopak, derivujeme-li podle proměnné y.

Parciální derivace – geometrický význam

Nechť je dána funkce $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a G_f je její graf. Nechť π je rovina daná rovnicí $y=y_0$. Za rozumných předpokladů (např. spojitost funkce f) je průsečíkem $G_f \cap \pi$ křivka v rovině π a parciální derivace $f_x(x_0;y_0)$ udává směrnici tečny t k této křivce v bodě $Q_0=[x_0;y_0;f(x_0;y_0)]$, viz obrázek. (Připomeňme, že směrnice tečny t je $\operatorname{tg}\alpha$).



Podobně, derivace $f_y(x_0;y_0)$ udává směrnici tečny ke křivce v bodě Q_0, která vznikne průsečíkem plochy G_f s rovinou $x=x_0$.

Parciální derivace 2. řádu funkce dvou proměnných

Parciální derivace 1. řádu $f_x(x,y), f_y(x,y)$ mohou mít v bodech svého definičního oboru opět parciální derivace podle x nebo y, které nazýváme *parciální derivace 2. řádu* fce f :

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=f_{xx''}$ ... druhá parciální derivace f podle x,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=f_{yy''}$ ... druhá parciální derivace f podle y,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}=f_{xy''}$ ... druhá parciální derivace f podle x a y,

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx}=f_{yx''}$ ... druhá parciální derivace f podle y a x.

<u>Schwarzova věta:</u> Nechť funkce f má spojité parciální derivace f_{xy}, f_{yx} v bodě $[x_0;y_0]$. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

<u>Příklady</u>

1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a) $z=x^3+2x^2y+3xy^2+4x-5y+100$ [2]

b) $z=\frac{x}{y}$ [1]

c) $z=\left(x^2y+y\right)^4$ [3]

d) $z=x^y$ [1]

e) $z=x\cdot\ln\left(x^2-y^2\right)$ [1]

f) $z=\sqrt{x+\sin xy}$ [1]

2. Spočtěte parciální derivace 1. řádu funkce f v bodě A:

a) $f(x,y)=y^2+y\cdot\sqrt{1+x^2}, A=[2,5]$ [2]

b) $f(x,y)=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right), A=[1,2]$ [2]

c) $f(x,y)=\operatorname{arctan}\frac{y}{x}, A=[0,1]$ [1]

3. Spočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = x^2 + xy - 3xy^3$ [1]

b) $z = \dfrac{xy + x}{y}$ [2]

c) $z = e^{2y} \cdot \sin x$ [3]

Zdroje

[1] KUBEN J., MAYEROVÁ Š., RAČKOVÁ P., ŠARMANOVÁ P. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf

[2] DOŠLÁ Z., DOŠLÝ O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf

[3] KLAŠKA J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021

Výsledky

1. a) $z_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4, z_y = 2x^2 + 6xy - 5$,

b) $z_x = \dfrac{1}{y}, z_y = -\dfrac{x}{y^2}, y \neq 0$

c) $z_x = 8xy^4\left(x^2+1\right)^3, z_y = 4y^3\left(x^2+1\right)^4$

d) $z_x = yx^{y-1}, z_y = x^y \ln x, x > 0$

e) $z_x = \ln\left(x^2 - y^2\right) + \dfrac{2x^2}{x^2 - y^2}, z_y = -\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}, x^2 - y^2 > 0$

f) $z_x = \dfrac{1 + y \cdot \cos xy}{2\sqrt{x + \sin xy}}, z_y = \dfrac{x \cdot \cos xy}{2\sqrt{x + \sin xy}}, x + \sin xy > 0$

2. a) $f_x\left(2,5\right) = 2\sqrt{5}, f_y\left(2,5\right) = 10 + \sqrt{5}$

b) $f_x\left(1,2\right) = 0, f_y\left(1,2\right) = \dfrac{1}{4}$

c) $f_x\left(0,1\right) = 1, f_y\left(0,1\right) = 0$

3. a) $z_x = 2x + y - 3y^3, z_y = x - 9xy^2, z_{xx} = 2, z_y = -18xy, z_{xy} = z_{yx} = 1 - 9y^2$

b) $z_x = \dfrac{y+1}{y}, z_y = -\dfrac{x}{y^2}, z_{xx} = 0, z_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}, z_{xy} = z_{yx} = -\dfrac{1}{y^2}$

c) $z_x = e^{2y}\cos x, z_y = 2e^{2y}\sin x, z_{xx} = -e^{2y}\sin x, z_{yy} = 4e^{2y}\sin x, z_{xy} = z_{yx} = 2e^{2y}\cos x$