# MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

## 11. cvičení (původně 4. května 2020)

### Diferenciál funkce více dvou proměnných

**Definice:** Řekneme, že funkce  definovaná v okolí bodu  je v tomto bodě diferencovatelná, jestliže existují reálná čísla *A*, *B* taková, že platí



Lineární funkce  proměnných *h*, *k* se nazývá diferenciál funkce v bodě

 a značí se , příp. .

**Poznámka:** Totální diferenciál lze použít k přibližnému výpočtu hodnoty funkce dvou proměnných v zadaném bodě. Funkci  lze nahradit takto:



**Příklady**

1. Spočtěte totální diferenciál funkce  v obecném bodě :

a)  [1]

b)  [1]

c)  [1]

d)  [1]

e)  [1]

2. Vypočtěte totální diferenciál funkce  v bodě  pro dané .

a)  [1]

b)  [1]

c)  [1]

d)  [1]

3. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu následujících výrazů.

a)  [2]

b)  [2]

c)  [2]

d)  [2]

e)  [2]

### Tečná rovina

**Definice:** Rovina  o rovnici  se nazývá *tečnou rovinou* ke grafu funkce  v bodě , kde , jestliže

i)  prochází bodem ,

ii) platí .

**Věta:** Tečná rovina  ke grafu funkce  v bodě  existuje právě tehdy, když je funkce  diferencovatelná v bodě . Její rovnice je



**Poznámka:** Přímka  procházející dotykovým bodem  kolmo k rovině  je *normála* ke grafu funkce f bodě . Normálový vektor roviny  je  a parametrické rovnice normály jsou tudíž:

.

**Příklady**

4. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce v zadaném bodě:

a) 

b) 

c) 

d) 

### Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

**Definice:** Nechť  je funkce dvou proměnných a .

a) Řekneme, že funkce  má v bodě  *lokální maximum*, jestliže existuje okolí  takové, že pro každé  platí .

b) Řekneme, že funkce  má v bodě  *lokální minimum*, jestliže existuje okolí  takové, že pro každé  platí .

Jestliže pro  jsou předchozí nerovnosti ostré, mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.

**Definice:** Řekneme, že bod  je *stacionárním bodem* funkce , jestliže platí  a .

**Věta:** Nechť funkce  má v bodě  a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a  je její stacionární bod. Označme



Pak platí:

1. Jestliže , je v bodě  ostrý lokální extrém.
   * Pro  je  minimum,
   * pro  je  maximum.
2. Jestliže , není v bodě  lokální extrém.
3. Jestliže , nedává věta odpověď (extrém může být, ale nemusí).

**Příklady**

5. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných.

a)  [3]

b)  [3]

c)  [3]

d)  [3]

e)  [3]

## Zdroje

[1] KUBEN J., MAYEROVÁ Š., RAČKOVÁ P., ŠARMANOVÁ P. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: [homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13\_14/materialy/Diferencialni\_pocet\_vice\_promennych.pdf](https://homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf)

[2] DOŠLÁ Z., DOŠLÝ O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf>

[3] KLAŠKA J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021>

## Výsledky

1. a)   
b)   
c) 

d)   
e) 

2. a) 0,02; b) ; c) , d) 

3. a) , b) 2,95, c) , d) , e) 

4. a) lokální minimum v bodě   
b) lokální minimum v bodě   
c) lokální minimum v bodě  lokální maximum v bodě , stac. body, v nichž extrém nenastává:   
d) lokální minimum v bodě  lokální maximum v bodě , stac. body, v nichž extrém nenastává:   
e) lokální minimum v bodě , stacionární bod, v němž extrém nenastává: 