MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

11. cvičení (původně 4. května 2020)

Diferenciál funkce více dvou proměnných

Definice: Řekneme, že funkce $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0; y_0]$ je v tomto bodě diferencovatelná, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - (Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Lineární funkce $Ah+Bk$ proměnných h, k se nazývá diferenciál funkce v bodě

$[x_0; y_0]$ a značí se $df(x_0, y_0)(h,k)$, příp. $df(x_0, y_0)$.

Poznámka: Totální diferenciál lze použít k přibližnému výpočtu hodnoty funkce dvou proměnných v zadaném bodě. Funkci $Ah+Bk$ lze nahradit takto:

$$df\left(x_0, y_0\right) = f_x\left(x_0, y_0\right)\cdot h + f_y\left(x_0, y_0\right)\cdot k$$

Příklady

1. Spočtěte totální diferenciál funkce f v obecném bodě $[x, y]$:

a) $f(x,y) = 3x^2 - 2y^3$ [1]

b) $f(x,y) = y \cdot \ln 2x$ [1]

c) $f(x,y) = x^y$ [1]

d) $f(x,y) = \arctan xy$ [1]

e) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ [1]

2. Vypočtěte totální diferenciál funkce f v bodě A pro dané dx, dy.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{xy}, A = [2,2], dx = 0,03, dy = 0,01$ [1]

b) $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2+y^2}, A = [3,4], dx = 0,1, dy = 0,2$ [1]

c) $f(x,y) = e^{xy}, A = [1,2], dx = -0,1, dy = 0,1$ [1]

d) $f(x,y) = \operatorname{arccotg}\dfrac{x}{y}, A = [2,1], dx = 0,01, dy = 0,05$ [1]

3. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu následujících výrazů.

a) $\arctan\dfrac{1,02}{0,95}$ [2]

b) $\sqrt{(1,02)^3+(1,97)^3}$ [2]

c) $\arcsin\dfrac{0,48}{1,05}$ [2]

d) $\ln\left(0,97^2+0,05^2\right)$ [2]

e) $e^{0,05^3-0,02}$ [2]

Tečná rovina

Definice: Rovina τ o rovnici $z=Ax+By+C$ se nazývá *tečnou rovinou* ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $M_0=[x_0,y_0,z_0]$, kde $z_0=f(x_0,y_0)$, jestliže

i) τ prochází bodem M_0,

ii) platí $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-Ax-By-C}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$.

Věta: Tečná rovina τ ke grafu funkce f v bodě M_0 existuje právě tehdy, když je funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0,y_0]$. Její rovnice je

$$\tau: z=f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+f(x_0,y_0).$$

Poznámka: Přímka n procházející dotykovým bodem M_0 kolmo k rovině τ je *normála* ke grafu funkce f bodě T. Normálový vektor roviny τ je $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$ a parametrické rovnice normály jsou tudíž:

$(x,y,z)=(x_0+t\cdot f_x(x_0,y_0),y_0+t\cdot f_y(x_0,y_0),z_0-t),t\in\mathbb{R}$.

Příklady

4. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce v zadaném bodě:

a) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2},[x_0,y_0,z_0]=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

b) $f(x,y)=x^2+xy+2y^2,[x_0,y_0,z_0]=[1;1;4]$

c) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},[x_0,y_0,z_0]=[1;-1;?]$

d) $f(x,y)=e^{x^2+y^2},[x_0,y_0,z_0]=[0;0;?]$

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Definice: Nechť $f(x,y)$ je funkce dvou proměnných a $M[x_0,y_0]\in D(f)$.

a) Řekneme, že funkce f má v bodě M *lokální maximum*, jestliže existuje okolí $O(M)$ takové, že pro každé $[x, y] \in O(M)$ platí $f(x, y) \leq f(M)$.

b) Řekneme, že funkce f má v bodě M *lokální minimum*, jestliže existuje okolí $O(M)$ takové, že pro každé $[x, y] \in O(M)$ platí $f(x, y) \geq f(M)$.

Jestliže pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ jsou předchozí nerovnosti ostré, mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.

Definice: Řekneme, že bod $M[x_0, y_0]$ je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže platí $f_x(M) = 0$ a $f_y(M) = 0$.

Věta: Nechť funkce f má v bodě $T[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a T je její stacionární bod. Označme

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y).$$

Pak platí:

1. Jestliže $J(T) > 0$, je v bodě T ostrý lokální extrém.
   - Pro $f_{xx}(T) > 0$ je T minimum,
   - pro $f_{xx}(T) < 0$ je T maximum.
2. Jestliže $J(T) < 0$, není v bodě T lokální extrém.
3. Jestliže $J(T) = 0$, nedává věta odpověď (extrém může být, ale nemusí).

Příklady

5. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných.

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y$ [3]

b) $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y$ [3]

c) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ [3]

d) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$ [3]

e) $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$ [3]

Zdroje

[1] KUBEN J., MAYEROVÁ Š., RAČKOVÁ P., ŠARMANOVÁ P. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf

[2] DOŠLÁ Z., DOŠLÝ O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf

[3] KLAŠKA J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021

Výsledky

1. a) $df(x,y)=6x\cdot dx-6y\cdot dy$

b) $df(x,y)=\frac{y}{x}\cdot dx+\ln 2x\cdot dy$

c) $df(x,y)=x^{y-1}\cdot(y\cdot dx+x\cdot\ln y\cdot dy)$

d) $df(x,y)=\frac{1}{1+x^2y^2}\cdot(y\cdot dx+x\cdot dy)$

e) $df(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(x\cdot dx+y\cdot dy)$

2. a) 0,02; b) $\frac{4}{50}=0,08$; c) $-\frac{e^2}{10}\square$, d) $\frac{9}{500}=0,018$

3. a) $\frac{\pi}{4}+0,035$, b) 2,95, c) $\frac{\pi}{6}-\frac{0,09}{\sqrt{3}}$, d) $-0,06$, e) $1,13$

4. a) lokální minimum v bodě $\left[-\frac{13}{4},\frac{3}{4}\right]$

b) lokální minimum v bodě $\left[\frac{3}{10},\frac{4}{10}\right]$

c) lokální minimum v bodě $[0,0]$, lokální maximum v bodě $\left[-\frac{5}{3},0\right]$, stac. body, v nichž extrém nenastává: $[-1,2];[-1,-2]$

d) lokální minimum v bodě $\left[\sqrt{2},1\right]$, lokální maximum v bodě $\left[-\sqrt{2},1\right]$, stac. body, v nichž extrém nenastává: $\left[0,1+\sqrt{6}\right];\left[0,1-\sqrt{6}\right]$

e) lokální minimum v bodě $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, stacionární bod, v němž extrém nenastává: $[0,0]$