MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

1. cvičení

Posloupnosti, vlastnosti, limita posloupnosti

Zopakovat ze střední školy:

- posloupnosti a jejich vlastnosti (pojem posloupnost, rekurentní určení posloupnosti, některé vlastnosti posloupností)
- aritmetická posloupnost
- geometrická posloupnost

Literatura:

Bušek, I. (1985). *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* Praha: SPN.
Odvárko, O. (1995). *Matematika pro gymnázia - Posloupnosti a řady.* Praha: Prometheus.
Petáková, J. (1998*). Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké škole.* Praha: Prometheus.

Příklady:

1. Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) monotónní:

a) $\left(\dfrac{-1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

2. Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) omezená:

a) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\dfrac{3n+4}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left((-1)^n \cdot n\right)_{n=1}^{\infty}$

3a. Posloupnost $\{a_n\}$ je dána následujícím předpisem: $a_n = \dfrac{(-1)^n + n}{2n}$. Platí pro ni, že $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

- Vypočítejte prvních pár členů posloupnosti $\dfrac{(-1)^n + n}{2n}$.
- Zvolte vhodně několik kladných hodnot parametru ε a najděte vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platila předchozí definice.

3b. Pro posloupnost $\{a_n\}$ najděte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pomožte si grafickým znázorněním prvních pár členů.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

(b) $a_n = -\dfrac{1}{n}$

(c) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$

(d) $a_n = c \ (c \in \mathbb{R})$

(e) $a_n = n$

(f) $a_n = -n$

3c. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ zadaných posloupností:

(a) $a_n = \dfrac{3n^2+1}{2n^2+1}$

(b) $a_n = \dfrac{3n+1}{2n^2+1}$

(c) $a_n = \dfrac{3n^2+1}{2n+1}$

4. Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{3-n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2}{n+1} - \dfrac{6n^3}{n^2-3}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^4-(n-2)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(n-\sqrt{n^2+3}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{6n+1}{2n-3}}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+3}}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+3^n}{3^n-2}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^2}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+2}{3} - \dfrac{3+5+7+\ldots+(2n+1)}{n-5}\right)$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^n$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{9n-7}$

U posledních dvou příkladů pomůže znalost $lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Výsledky:

1. a) rostoucí, b) není monotónní, c) klesající

2. a), omezená, b) omezená, c) není omezená

4. a) -2, b) $-\infty$, c) $\frac{15}{2}$, d) 0, e) 0, f) $-\frac{3}{2}$, g) 27, h) ln2, i) 1, j) ∞, k) 0, l) $\frac{1}{2}$, m) $-\frac{19}{3}$, n) $\frac{4}{3}$, o) $e^{-\frac{1}{3}}$, p) e^3

Teorie (viz přednášky):

Def. 1.1 *Posloupnost je zobrazení z množiny* $\mathbb{N}$ *do množiny* $\mathbb{R}$.

Tuto definici můžeme přepsat do tvaru *Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel.*

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů $[n; f(n)]$. Místo $f(n)$ bývá zvykem psát a_n a mluvíme o n-tém členu posloupnosti. Posloupnost můžeme zadat výčtem členů, obecným vzorcem či rekurentním vzorcem. Tyto způsoby si ukážeme na příkladech.

Def. 1.2 *Posloupnost* $\{a_n\}$ *se nazývá*
rostoucí, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} > a_n$,
klesající, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} < a_n$,
nerostoucí, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} \leq a_n$,
neklesající, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} \geq a_n$,
ohraničená (omezená) shora, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \leq K$,
ohraničená (omezená) zdola, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \geq k$.
Posloupnost, která je ohranočená shora i zdola se nazývá ohraničená.

Def. 1.3 *Nechť je dána posloupnost* $\{a_n\}$ *a číslo* $L \in \mathbb{R}$. *Řekneme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu* L, *jestliže ke každému* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *platí* $|a_n - L| < \varepsilon$. *Má-li posloupnost vlastní limitu, říkáme, že konverguje (k číslu* L*).*

Věta 1.1 *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.*

Def. 1.4 *Nechť je dána posloupnost* $\{a_n\}$ *a číslo* $K \in \mathbb{R}$. *Řekneme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *má nevlastní limitu* $+\infty$, *jestliže ke každému* $K \in \mathbb{R}$, *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *platí* $a_n > K$. *Podobným způsobem lze definovat nevlastní limitu* $-\infty$. *Má-li posloupnost nevlastní limitu, říkáme, že diverguje.*

Věta 1.2 *Každá posloupnost má nejvýš jednu limitu.*

Věta 1.3 *Nechť platí* $\lim\{a_n\} = A$ *a* $\lim\{b_n\} = B$, *přičemž platí* $A, B \in \mathbb{R}$. *Pak je*
1. $\lim\{|a_n|\} = |A|$,
2. $\lim(\{a_n\} \pm \{b_n\}) = A \pm B$,
3. $\lim(\{a_n\} \cdot \{b_n\}) = A \cdot B$,
4. $\lim \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \frac{A}{B}$, *je-li* $B \neq 0$.