

MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

2. cvičení (24. února 2020)

1. Hromadné body posloupností, liminf, limsup

2. Limita funkce jedné proměnné

Hromadné body

1. Vysvětlete, co je to hromadný bod

- Pokud nevíte, podívejte se sami do svých poznámek z přednášky, případně na mobilu – můžete pracovat ve skupině, čas na rešerši: 3 minuty.

2. Najděte všechny hromadné body daných posloupností a určete limitu superior a limitu inferior daných posloupností:

a) $a_n = (-1)^{n+3}$ *

b) $a_n = (-2)^n$ *

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$ #

d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n}{n+1}$ *

e) $a_n = \operatorname{tg} \left((2n+1) \cdot \frac{\pi}{4} \right)$ *

f) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$ #

g) $a_n = \sin \left(n \cdot \frac{\pi}{3} \right)$ *

h) $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$ #

i) $a_n = 5 + 4 \cdot \cos \left(n \cdot \frac{\pi}{3} \right)$ *

j) $a_n = 5 + 4 \cdot \cos^n \left(n \cdot \frac{\pi}{3} \right)$ *

Limita funkce

3. Limita funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, tj. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ může být různého typu, známe tyto případy:

- Vlastní limita ve vlastním bodě
- Vlastní limita v nevlastním bodě
- Nevlastní limita ve vlastním bodě
- Nevlastní limita v nevlastním bodě

Zkuste pomocí vhodných počítačových aplikací, na základě vlastního úsudku či po poradě s kamarádou, přijít na to, jakého typu jsou následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{x^2+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x$$

Literatura a použité zdroje

1. Došlá, Z., Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. MU: Brno, 2004.
2. * SAMKOVÁ, Libuše. Materiály k výuce v zimním semestru - Matematická analýza
3. Dostupné zde: <http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/ma3.htm>
3. # VOLDÁNOVÁ, Anna. Posloupnosti a jejich hromadné body (bakalářská práce, 2007). Dostupné zde: https://is.muni.cz/th/150974/prif_b/

Výsledky Příkladu 2

(a) $H(a_n) = \{-1, 1\}$, $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$

(b) $H(a_n) = \{-\infty, \infty\}$, $\liminf a_n = -\infty$, $\limsup a_n = \infty$

(c) $H(a_n) = \{0, 1\}$, $\liminf a_n = 0$, $\limsup a_n = 1$

(d) $H(a_n) = \{-2, 2\}$, $\liminf a_n = -2$, $\limsup a_n = 2$

(e) $H(a_n) = \{-1, 1\}$, $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$

(f) $H(a_n) = \{0, 1, 2\}$, $\liminf a_n = 0$, $\limsup a_n = 2$

(g) $H(a_n) = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$, $\liminf a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\limsup a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(h) $H(a_n) = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$, $\liminf a_n = -\frac{1}{2}$, $\limsup a_n = 1$

(i) $H(a_n) = \{1, 3, 7, 9\}$, $\liminf a_n = 1$, $\limsup a_n = 9$

(j) $H(a_n) = \{1, 5, 9\}$, $\liminf a_n = 1$, $\limsup a_n = 9$

Vybraná podposloupnost a hromadný bod

Definice: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a necht' $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybraná podposloupnost** z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice: Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazývá **hromadný bod** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro každé okolí $O(a)$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pro které platí, že $a_n \in O(a)$.

Věta: Číslo $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.