MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

4. cvičení (9. března 2020)

Derivace funkce jedné proměnné

A. Geometrický význam derivace

Def. 3.1 *Derivaci funkce v bodě x_0 nazveme limitu*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Značit budeme $f(x)'$ resp. y'. Je-li limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, v opačném případě se jedná o derivaci nevlastní. V případě, že existují jen jednostranné limity, mluvíme o derivaci zprava (zleva).

Ukázka animace vysvětlující geometrický význam derivace $f'(x)$ v určitém bodě $S1 = [x, f(x)]$, který se přibližuje k bodu $S2 = [x_0, f(x_0)]$.

B. Využití základních vzorců

Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

2. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

3. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

5. $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

C. Derivace složené funkce

Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = \sin^4 x$

2. $f(x) = e^{x^2 - 2x + 1}$

3. $f(x) = \ln^3 (x^2 - 1)$

4. $f\left(x\right)=\operatorname{tg}^{3}2x$

5. $f\left(x\right)=5^{x^2-1}+3$

6. $f\left(x\right)=x^2\cdot\sqrt{1+x^2}$

7. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(5-2x\right)^2}$

8. $f\left(x\right)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$

D. Úprava funkce před stanovením derivace

Zderivujte následující funkce:

1. $f\left(x\right)=x^x$

2. $f\left(x\right)=x^{\ln x}$

3. $f\left(x\right)=x^{\sin x}$

E. Tečna a normála funkce

1. Napište rovnici tečny a normály grafu dané funkce v bodě $T=\left[x_0,y_0\right]$.

$a)\ f\left(x\right)=\dfrac{3x-1}{2x+3}, T=\left[2,\ ?\right]$

$b)\ f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-1}{x+1}, T=\left[-\dfrac{1}{2},?\right]$

$c)\ f\left(x\right)=\dfrac{8}{x^2+4}, T=\left[2,\ ?\right]$

$d)\ f\left(x\right)=x\cdot\ln x, T=\left[e,\ ?\right]$

2. Napište rovnici tečny a normály

a) ke kružnici $x^2+y^2=2$ v jejím bodě $\left[1,-1\right]$

b) k parabole $y^2=x$ v jejím bodě $\left[4,-2\right]$

3. Napište rovnici tečny ke křivce $f(x)=x^2-4x+3$, která svírá úhel $\varphi=45^\circ$ s osou x.

4. Napište rovnici tečny ke křivce $f(x)=x^2-2x+3$, je-li tečna rovnoběžná s přímkou $p:3x-y+5=0$.

Výsledky

B. Využití základních vzorců

1.$\left[\frac{11}{6}\cdot\sqrt[6]{x^5}\right]$,2.$\left[\frac{(x-1)\cdot\sqrt{x}}{2x^2}\right]$,3.$\left[x\cdot(2\ln x+1)\right]$,4.$\left[-\frac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}\right]$,5.$\left[\frac{1}{1-\sin x}\right]$

C. Derivace složené funkce

1.$\left[4\cdot\sin^3 x\cdot\cos x\right]$,2.$\left[2(x-1)\cdot e^{x^2-2x+1}\right]$,3.$\left[\frac{6x\cdot\ln^2\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\right]$,4.$\left[\frac{6\sin^2 2x}{\cos^4 2x}\right]$,

5.$\left[2x\cdot 5^{x^2-1}\cdot\ln 5\right]$,6.$\left[\frac{x\left(2+3x^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}}{x^2+1}\right]$,7.$\left[\frac{4}{(5-2x)^3}\right]$,8.$\left[\frac{1}{1+x^2}\right]$

D. Úprava funkce před stanovením derivace

1.$\left[x^x\cdot(\ln x+1)\right]$,2.$\left[2\cdot\ln x\cdot x^{\ln x-1}\right]$,3.$\left[x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)\right]$

E. Tečna a normála funkce

1a. $T=\left[2,\frac{5}{7}\right]$, tečna: $y=\frac{11}{49}x+\frac{13}{49}$, normála: $y=-\frac{49}{11}x+\frac{741}{77}$

1b. $T=\left[-\frac{1}{2},-1\right]$, tečna: $y=-2x-2$, normála: $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

1c. $T=[2,1]$, tečna: $y=-\frac{1}{2}x+2$, normála: $y=2x-1$

1d. $T=[e,e]$, tečna: $y=2x-e$, normála: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}e$

2a. Tečna: $y=x-2$, normála: $y=-x$

2b. Tečna: $y=-\frac{1}{4}x-1$, normála: $y=4x-18$

3. $T=\left[\frac{5}{2},-\frac{3}{4}\right]$, tečna: $y=x-\frac{13}{4}$

4. $T=\left[\frac{5}{2},\frac{17}{4}\right]$, tečna: $y=3x-\frac{13}{4}$