MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

5. cvičení (16. března 2020)

Limita funkce pomocí L'Hospitalova pravidla

Věta 11 (l'Hospitalovo pravidlo). *Buď* $x_0 \in \mathbb{R}^*$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,
- $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka:

- Tímto pravidlem se přímo řeší limity typu $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$.
- Limity typu $[\infty-\infty]$ se řeší úpravou výrazu a převodem na výše uvedené typy, **například** takto:

$$f(x)-g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

- Limity typu $[0\cdot\infty]$ se řeší úpravou

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

- Limity typu $\left[0^0\right],\left[\infty^0\right],\left[1^\infty\right]$ se řeší úpravou

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \left[e^{0\cdot\infty}\right]$$

  a následným výpočtem limity z výrazu $g(x)\cdot\ln f(x)$, což vede na předchozí případ.

Příklad 1: Vypočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\sin x}$

$$3.\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$4.\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\mathrm{cotg}x}$$

$$5.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$$

$$6.\ \lim_{x\to 0^+}x^3\cdot\ln\frac{1}{x}$$

$$7.\ \lim_{x\to 0^+}x\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$8.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\sin x)\cdot\mathrm{tg}x$$

$$9.\ \lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x$$

$$10.\ \lim_{x\to 1^+}\ln x\cdot\ln(x-1)$$

$$11.\ \lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$12.\ \lim_{x\to 1^+}x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$13.\ \lim_{x\to 0^+}(\mathrm{cotg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$14.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$15.\ \lim_{x\to 1^-}\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)^{\ln x}$$

$$16.\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$17.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\cdot\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$18.\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

Zdroj

ZEMÁNEK, Petr, HASIL, Petr. Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I. Brno, jaro 2012. Dostupné z: https://is.muni.cz/elportal/?id=980552

Výsledky

$1.\left[\frac{4}{3}\right], 2.\left[\frac{1}{2}\right], 3.\left[-\frac{2}{\pi}\right], 4.[0], 5.[0]$

$6.[0], 7.[\infty], 8.[0], 9.[0], 10.[0]$

$11.\left[e^{-\frac{9}{2}}\right], 12.\left[\frac{1}{e}\right], 13.\left[\frac{1}{e}\right], 14.\left[e^{-\frac{1}{6}}\right], 15.[1]$

$16.\left[\frac{1}{2}\right], 17.\left[\frac{1}{6}\right], 18.[0]$