

MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

7. cvičení (původně 30. března 2020)

Vyšetřování průběhu funkce

- A. Monotónnost a lokální extrém
- B. Konvexnost/konkávnost a inflexní body
- C. Asymptoty funkce
- D. Celkový postup vyšetřování průběhu funkce

A. Monotónnost a lokální extrém

1. Určete intervaly monotonie a extrém pro následující funkce.

a) $f(x) = x^3 - 12x, D(f) = R$ [2]

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}, D(f) = R$ [2]

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}, D(f) = R^+ - \{1\}$ [2]

d) $f(x) = x - 2 \cdot \sin x, D(f) = (0, 2\pi)$ [1]

e) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x}, D(f) = (0, \infty)$ [1]

f) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}, D(f) = R$ [1]

B. Konvexnost/konkávnost a inflexní body

2. Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce a najděte případné inflexní body u následujících funkcí.

a) $f(x) = x^3 - 12x, f'(x) = 3x^2 - 12, D(f) = D(f') = R$ [2]

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}, f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2-x), D(f) = D(f') = R$ [2]

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}, f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, D(f) = D(f') = R^+ - \{1\}$ [2]

d) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1-x^2), D(f) = D(f') = R$ [1]

e) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3, D(f) = R$ [1]

f) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}, f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{e^x}, D(f) = D(f') = R$ [1]

C. Asymptoty funkce

3. Určete asymptoty bez směrnice u funkce

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ [1]

b) $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$ [1]

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ [2]

4. Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech $\pm\infty$) u následujících funkcí.

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}, D(f) = R - \{1\}$ [1]

b) $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}, D(f) = R - \{\pm 2\}$ [1]

c) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}, D(f) = R - \{-1\}$ [1]

D. Celkový postup vyšetřování průběhu funkce

- Definiční obor
- Lichost, sudost, periodičnost
- Charakteristika bodů nespojitosti (výpočet jednostranných limit)
- Řešení rovnice $f(x) = 0$ (intervaly, kdy je funkce nad osou x či pod osou x)
- Řešení rovnice $f'(x) = 0$ (intervaly monotónnosti, lokální extrémy)
- Řešení rovnice $f''(x) = 0$ (intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexní body)
- Asymptoty

5. U funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ byl vyšetřen její průběh. Načrtněte graf funkce dle dostupných informací (viz soubor Příklad 266 - vzorový.docx ve Studijních materiálech, ve složce Semináře).

6. Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich graf, je-li dána jejich první i druhá derivace.

a) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}, f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}, f''(x) = \frac{2x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$ [1]

b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), f'(x) = \frac{x^2-1}{2x^2}, f''(x) = \frac{1}{x^3}$ [1]

$$\text{c) } f(x) = \frac{\ln x^2}{x}, f'(x) = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}, f''(x) = \frac{2 \ln x^2 - 6}{x^3} \quad [1]$$

7. Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich graf.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad [1]$$

$$\text{b) } f(x) = -\frac{x^2}{x+1} \quad [1]$$

$$\text{c) } f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad [1]$$

Zdroje

[1] ZEMÁNEK, Petr, HASIL, Petr. Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I. Brno, jaro 2012. Dostupné z: <https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>¹

[2] Ústav matematiky, FSI VUT Brno. MATEMATIKA online – Matematika I. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx>²

¹ Příklady vybrány z kapitoly I.5 Vyšetřování průběhu funkce

² Příklady vybrány z kapitol Monotonnost a extrémny funkce, Průběh funkce

Výsledky

A. Monotónnost a lokální extrémy

a) na $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$ rostoucí, na $(-2, 2)$ klesající, $[-2, 16]$ lok. max., $[2, -16]$ lok. min.

b) na $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ rostoucí, na $(0, 2)$ klesající, $[2, 4\ln 2]$ lok. max., $[0, 0]$ lok. min.

c) na $(0, e)$ klesající, na (e, ∞) rostoucí, na $(0, 2)$ klesající, $[e, e]$ lok. min.

d) na $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ a $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ klesající, na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ rostoucí, $\left[\frac{\pi}{3}, \pi - \sqrt{3}\right]$ lok. min.,
 $\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}\right]$ lok. max.

e) na $(0, e)$ klesající, na (e, ∞) rostoucí, na $(0, 2)$ klesající, $\left[e, -\frac{1}{e}\right]$ lok. min.

f) na $(-\infty, -3)$ a $(-1, \infty)$ klesající, na $(-3, -1)$ rostoucí, $[-3, 0]$ lok. min., $[-1, 4e]$ lok. max.

B. Konvexnost/konkávnost a inflexní body

a) na $(-\infty, 0)$ konkávní, na $(0, \infty)$ konvexní, $[0, 0]$ inflexní bod

b) na $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ a $(2 + \sqrt{2}, \infty)$ konvexní, na $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ konkávní,

$\left[2 - \sqrt{2}, (6 - 4\sqrt{2})e^{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$, $\left[2 + \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2})e^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$ inflexní body

c) na $(0, 1)$ a (e^2, ∞) konkávní, na $(1, e^2)$ konvexní, $\left[e^2, \frac{e^2}{2}\right]$ inflexní bod

d) na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$ konkávní, na $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, \infty)$ konvexní, $[0, 0]$, $\left[-\sqrt{3}, e^{\frac{3}{2}}\right]$,

$\left[\sqrt{3}, e^{\frac{3}{2}}\right]$ inflexní body

e) na $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ konvexní, na $(-1, 2)$ konkávní, $[-1, -19]$, $[2, -37]$ inflexní body

f) na $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ a $(-1 + \sqrt{2}, \infty)$ konvexní, na $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ konkávní,

$\left[-1 - \sqrt{2}, \frac{6 - 4\sqrt{2}}{e^{-1 - \sqrt{2}}}\right]$, $\left[-1 + \sqrt{2}, \frac{6 + 4\sqrt{2}}{e^{-1 + \sqrt{2}}}\right]$ inflexní body

C. Asymptoty:

3. a) $x = 0$, b) neexistuje, c) $x = 1$

4. a) $y = 3x + 3$, b) $y = -x$, c) $y = 0$