MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

8. cvičení (původně 13. dubna 2020)

Přibližné vyjádření funkce

A. Diferenciál
B. Taylorův polynom

A. Přibližné vyjádření funkce pomocí diferenciálu

Věta 26. *Funkce* f *má v bodě* x_0 *diferenciál (je diferencovatelná v* x_0*) právě tehdy, když existuje vlastní derivace* $f'(x_0)$*. Přitom platí*

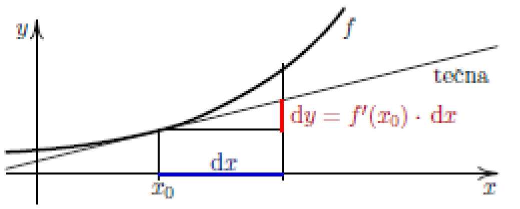
$$df(x_0)(h) = f'(x_0)\cdot h, \quad \textit{píšeme též } df(x) = f'(x)\,dx.$$

Pro dostatečně malé h platí:

$$f(x_0+h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h, \quad \text{též } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \text{ pro } x \to x_0.$$

- Proměnnou $h = dx = x - x_0$ nazýváme přírůstek proměnné x.
- Diferenciál funkce f v bodě x_0 zapisujeme výrazem $df(x_0)(h)$.
- Pomocí diferenciálu lze aproximovat hodnotu funkce $f(x)$ v bodě x blízkém bodu x_0, pro který snadno spočítáme funkční hodnotu $f(x_0)$ i hodnotu 1. derivace $f'(x_0)$. Čím větší hodnotu má přírůstek $h = dx = x - x_0$, tím méně přesná bude aproximace.

Geometrický význam diferenciálu



Obr. 6.7: Diferenciál je přírůstek funkce na tečně.

- Modrá úsečka je přírůstek $dx = x - x_0$ proměnné x.
- Červená úsečka dy je "přírůstek na tečně" t k funkci f v bodě x_0, tj. o kolik větší/menší je hodnota $t(x)$ v porovnání s $t(x_0) = f(x_0)$.
- Obě úsečky svírají pravý úhel v pravoúhlém trojúhelníku. Úhel α naproti červené úsečce je stejný jako úhel, který tečna svírá s osou x. Tangens úhlu α je směrnicí tečny t. Platí pro něj $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx}$.
- Pro dy platí: $dy = \mathrm{tg}\alpha \cdot dx = f'(x_0)\cdot dx$ (rovnice pro diferenciál). Délka červené úsečky vyjadřuje diferenciál funkce f v bodě x_0.

Příklad 1: Pomocí diferenciálu určitě přibližnou hodnotu následujících výrazů.

a) $\sin 29^\circ$ b) $\sqrt{80}$ c) $\log 11$

d) $\operatorname{arctg} 1{,}1$ e) $\sqrt[3]{70}$ f) $\cos 151^\circ$

g) $2^{1{,}003}$ h) $\ln 1{,}1$

B. Přibližné vyjádření funkce pomocí Taylorova polynomu

Věta 27 (Taylorova věta). *Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí tzv. Taylorův vzorec*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$$\text{kde} \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

přičemž ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x. Chyba $R_n(x)$ se nazývá zbytek

- Zbytek uvedený v Taylorově větě je v tzv. *Lagrangeově tvaru*, což není jediná možnost jeho vyjádření.
- Pokud v Taylorově vzorci vynecháme zbytek, obdržíme tzv. *Taylorův polynom.*
- Pokud v Taylorově větě položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův vzorec*, resp. tzv. *Maclaurinův polynom.*

Příklad 2: Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě x_0 pro funkci $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1$ b) $f(x) = e^x, x_0 = 1$

c) $f(x) = \sin x, x_0 = 0$ d) $f(x) = \cos x, x_0 = 0$

e) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, x_0 = 0$ f) $f(x) = e^x \cdot \sin x, x_0 = 0$

Zdroje:

[1] ZEMÁNEK, Petr, HASIL, Petr. Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I. Brno, jaro 2012. Dostupné z: https://is.muni.cz/elportal/?id=980552[1]

[2] Ústav matematiky, FSI VUT Brno. MATEMATIKA online – Matematika I. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx[2]

Výsledky:

A. Diferenciál:

a) 0,484885; b) 8,9445; c) 1,0434294; d) 0,83539; e) 4,125; f) $-0{,}874752$; g) 2,004; h) 0,1

B. Taylorův polynom:

a) $1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3$,

b) $e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e}{6}(x-1)^3$,

c) $x-\frac{x^3}{3!}$

d) $1-\frac{x^2}{2!}$

e) $1-\frac{x^2}{2}$

f) $x+x^2+\frac{x^3}{3}$

[1] Příklady vybrány z kapitoly I.5 Vyšetřování průběhu funkce

[2] Příklady vybrány z kapitol Monotonnost a extrémy funkce, Průběh funkce