MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

9. cvičení (původně 20. dubna 2020)

Definiční obor funkce dvou proměnných

Definice: Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ n $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce n reálných proměnných* a množina M se nazývá *definiční obor* této funkce a značí se $D(f)$.

Poznámka:

- V případě $n = 2$ hovoříme (reálné) funkci dvou (reálných) proměnných x, y. Každé uspořádané dvojici $[x, y] \in D(f)$ je přiřazeno právě jedno $z \in \mathbb{R}$ takové, že $z = f(x, y)$.
- Pokud je funkce zadána předpisem $z = f(x, y)$ a není udaný definiční obor funkce, pak definičním oborem rozumíme množinu všech bodů $[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro které tento předpis má smysl.
- Stanovení definičního oboru zadané funkce dvou proměnných bude častým úkolem. Kromě symbolického předpisu je možné definiční obor popsat i zakreslením příslušné oblasti v kartézské soustavě souřadnic (O, x, y).

1. Vyšetřete definiční obor následujících funkcí dvou proměnných a následně jej zakreslete v kartézském souřadném systému (O, x, y).

a) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 9}$ [3]

b) $f(x,y) = \ln(x \cdot \ln(y - x))$ [3]

c) $f(x,y) = \sqrt{(1 - \ln y) \cdot \ln(-x)}$ [3]

d) $f(x,y) = \ln(x^2 - y) + \sqrt{x - 2y + 4}$ [3]

e) $f(x,y) = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$ [3]

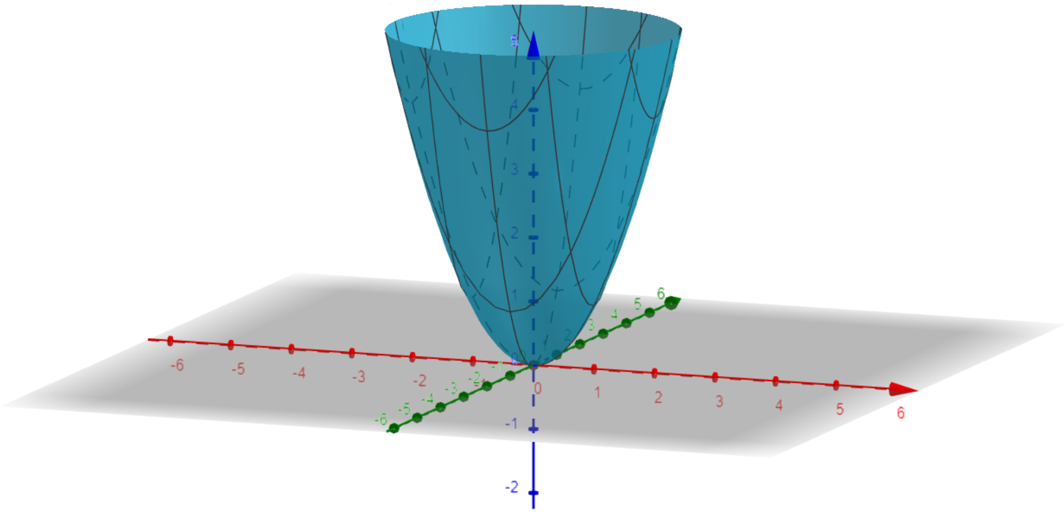
f) $f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$ [3]

g) $f(x,y) = \sqrt{\left(x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \cdot (x^2 + y^2 - 6x)}$ [2]

h) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$ [2]

Graf funkce dvou proměnných

Definice: Grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných nazýváme množinu uspořádaných trojic $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$, pro které $[x, y]$ patří do definičního oboru $D(f)$.



Graf funkce $z = x^2 + y^2$ vykresleného nástrojem Geogebra 3D grafy:

Limita funkce dvou proměnných

Definice: Řekneme, že funkce $z = f(x,y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ limitu rovnou číslu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny body z ryzího δ-okolí bodu M platí $|f(x,y) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{[x,y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L.$$

Poznámka:

- U funkcí více proměnných nemáme k dispozici L'Hospitalovo pravidlo.
- Postupujeme podobně jako u výpočtu limit z funkcí jedné proměnné: nejdříve dosadíme limitní bod do předpisu funkce. Pokud výraz nelze vyčíslit, hledáme jeho vhodnou úpravu tak, abychom jej zjednodušili a mohli dosadit do pozměněného výrazu.
- Platí stejná aritmetika limit pro součet, rozdíl, součin a podíl dvou výrazů jako u limit funkcí jedné proměnné.

Při výpočtu se může hodit tato věta:

Věta: Nechť $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0; y_0]$. Pak

$$\lim_{[x,y]\to[x_0;y_0]} f(x,y)\cdot g(x,y) = 0.$$

2. Vypočítejte následující limity.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [1, 5]

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-4,-1)} \dfrac{\left(x-y\right)^2-9}{x^2+y^2}$ [1, 2]

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$ [3, 5]

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3\left(x^2 + y^2\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$ [3, 5]

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$ [3, 5]

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 3y + 3x - xy}$ [5]

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cdot \cos\dfrac{1}{xy^2}$ [2]

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \sin\dfrac{1}{y}$ [1]

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + y\right) \cdot \sin\dfrac{1}{x} \cdot \sin\dfrac{1}{y}$ [2]

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)} \dfrac{\cos y}{x + y}$ [2]

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$ [2]

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{e^{xy} - 1}{x}$ [1, 2]

Důkaz neexistence limity

- V případě funkce jedné proměnné se k limitnímu bodu blížíme po přímce $y=0$, u funkcí dvou proměnných se k němu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby, po různých přímkách, parabolách atd.
- Existence limity v daném bodě znamená, že \textbf{nezáleží na cestě}, po které se k danému bodu blížíme. Dostaneme-li různé hodnoty limity pro různé cesty, limita v daném bodě nemůže existovat.
- Uvedeme si několik způsobů, jak ukázat, že v zadaném bodě limita funkce neexistuje.

Věta (Metoda postupných limit): Označme

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = L_1, \quad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_2.$$

Existuje-li limita $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L,$ pak platí $L = L_1 = L_2$.

Poznámka: Tato věta je implikací, takže slouží pouze jako metoda důkazu neexistence limity. Pokud ukážeme, že $L_1 \neq L_2$, pak to znamená, že limita nemůže existovat.

K limitnímu bodu se $[x_0, y_0]$ můžeme přibližovat po

- po přímkách, např. pomocí substituce $y = k \cdot (x - x_0) + y_0$, přičemž počítáme limitu pro $x \to x_0$,
- o parabolách, např. pomocí substituce $y = k \cdot (x - x_0)^2 + y_0$, přičemž opět počítáme limitu pro $x \to x_0$,
- po kružnicích pomocí polárních souřadnic, substitucí $x = x_0 + ń \cdot \cos\varphi, y = y_0 + ń \cdot \sin\varphi$, přičemž počítáme limitu pro $ń \to 0$,
- či po jiných obecných cestách.

Poznámka: Pokud po volbě nějaké cesty a následné substituci vyjde limita závislá na parametru k či pouze na φ, znamená to, že volba těchto parametrů mění hodnotu limity -- tedy limita neexistuje. V opačném případě (výsledek limity nezávisí na těchto parametrech) není existence limity prokázána!

Transformace do polárních souřadnic

$$x = x_0 + ń \cdot \cos\varphi,$$

$$y = y_0 + ń \cdot \sin\varphi,$$

kde $[x_0, y_0]$ je limitní bod a $ń > 0$, je možností, jak ukázat i existenci limity a spočítat její výsledek. Platí následující lemma:

Lemma pro výpočet limity pomocí polárních souřadnic

Lemma: Předpokládejme, že funkci $f(x, y)$ lze v polárních souřadnicích se středem v bodě $[x_0, y_0]$ vyjádřit ve tvaru $f(x, y) = L + g(ń) \cdot h(ń, \varphi), L \in \square$, kde

i) $\lim\limits_{ń \to 0} g(ń) = 0$,

ii) $h(ń, \varphi)$ je ohraničená na obdélníku $(0, ń_0\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, kde $ń_0 > 0$.

Pak platí $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = L$.

Postup hledání limity pomocí lemmatu

1. Transformujeme limitní výraz do polárních souřadnic.
2. Počítáme limitu pro $ń \to 0$.
3. Výsledkem může být výraz $L + g(ń) \cdot h(ń, \varphi)$, kde $g(ń)$ je funkce závislá pouze na $ń$, jejíž limita pro $ń$ jdoucí k nule je 0, a $h(ń, \varphi)$ je ohraničená funkce. Pak je limita rovna zbylému reálnému číslu L, které samozřejmě může být i nula.
4. Je-li výsledkem je pouze funkce $h(ń, \varphi)$ závislá na obou parametrech či pouze na φ, pak limita neexistuje.

3. Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-2y}{3x+y}$ [3]

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$ [3]

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$ [1]

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ [2, 4]

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ [1]

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ [5]

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^3+5y^2}{x^2+y^2}$ [5]

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ [5]

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^4+y^4}$ [3]

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ [3]

Spojitost funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Poznámka:

- Nalézt body nespojitosti funkce znamená určit body, v nichž není funkce definovaná.
- Domluvme se, že funkce je spojitá v izolovaných bodech definičního oboru.

4. Určete body, v nichž není funkce spojitá (cvičení 2.6 v [2])

a) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$

c) $f(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{x+y}$

d) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{xy}$

e) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$

f) $f(x,y)=\ln\left|1-x^2-y^2\right|$

Zdroje

[1] KUBEN J., MAYEROVÁ Š., RAČKOVÁ P., ŠARMANOVÁ P. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf

[2] DOŠLÁ Z., DOŠLÝ O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf

[3] KLAŠKA J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021

[4] KURÁŇOVÁ S., VONDRA J. *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2009. Dostupné z: https://is.muni.cz/elportal/estud/prif/ps09/sbirka/web/index.html

[5] KADEŘÁBEK Z. *Limity funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. 2007. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/xpb8v/Limity_funkci_vice_promennych.pdf

[6] isibalo.com. *Matematika: Diferenciální počet funkcí více proměnných.* 2020. Dostupné z: https://isibalo.com/matematika/diferencialni-pocet-funkci-vice-promennych

Výsledky

1.

a) $D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}\quad x \quad \wedge |y|\geq 3\}$

b) $D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}\quad x \quad \wedge y>x+1)\vee(x<0\wedge y<x+1\wedge y>x)\}$

c) $D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}\quad y\leq e\wedge x\leq -1)\vee(y>e\wedge -1\leq x<0)\}$

d) $D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}\quad y \quad x \wedge y\leq \frac{1}{2}x+2\}$

e) $D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}\quad x \quad \wedge y>-2x^2)\vee(x<0\wedge y<-2x^2)\}$

f) $D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}\quad x^2\leq y\leq 1-x^2\}$

g) $D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}\quad \left(\frac{(y-2)^2}{4}+x^2-1\geq 0\wedge x^2+y^2-6x\geq 0\right)\vee\left(\frac{(y-2)^2}{4}+x^2-1\leq 0\wedge x^2+y^2-6x\leq 0\right)\}$

h) $D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}\quad y \quad -x, y^2\geq x, y\in(0,2\rangle\}$

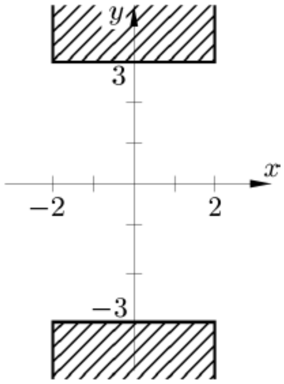
Zobrazení definičních oborů v rovině (O, x, y) najdete na následující stránce.

2. a) $\ln 2$, b) 0, c) $\frac{3}{8}$, d) 12, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{4}{5}$, g) 0, h) 0, i) 0, j) 0, k) 2, l) 2

3. a) neex., b) neex., c) neex., d) neex., e) 0, f) neex., g) 0, h) 0, i) neex., j) neex.

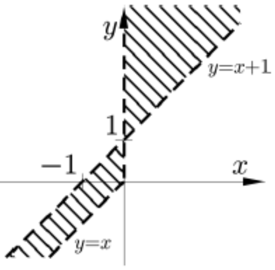
4. a) [0, 0], b) $\{[x,y];x=-y\}$, c) $\{[x,y];x=-y\}$, d) $\{[x,y];x=0\vee y=0\}$, e) $\{[x,y];x=k\pi,$ $y=k\pi,k\in \boldsymbol{N}\}$, f) $\{[x,y];x^2+y^2=1\}$

1. a)



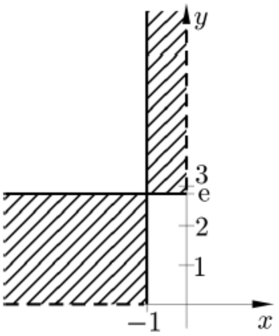
Obr. 1

b)



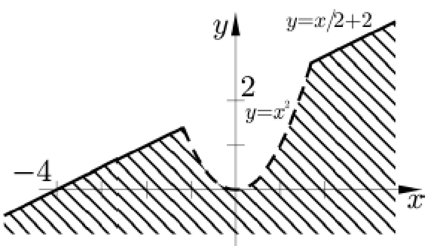
Obr. 2

c)



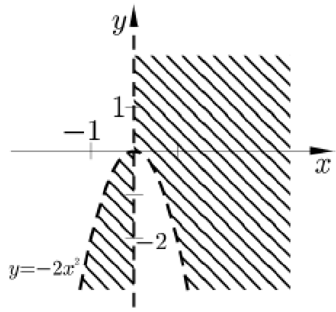
Obr. 4

d)



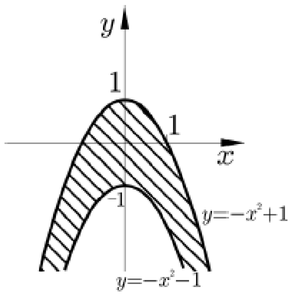
Obr. 5

e)



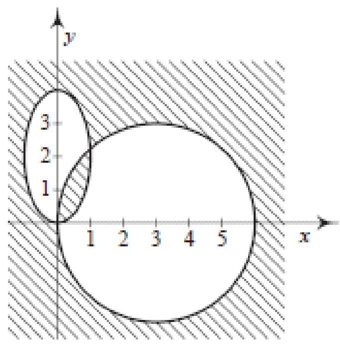
Obr. 6

f)



Obr. 7

g)



h)