

# MA0004 Matematická analýza 1, 1. seminář

17. 2. 2020

## 1 Posloupnosti

- Opakování znalostí ze střední školy
- Monotonie a omezenost posloupnosti
- Limita posloupnosti

## Literatura

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.
- Bušek, I. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. Praha: SPN, 1985.
- Odvárko, O. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-195-7.

## Zopakujte si doma:

- posloupnosti a jejich vlastnosti (pojem posloupnost, rekurentní určení posloupnosti, některé vlastnosti posloupností)
- aritmetická posloupnost
- geometrická posloupnost

**Příklad 1:** Rozhodněte, zda je posloupnost  $(a_n)$  monotónní:

(a)  $\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

(b)  $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(c)  $\left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

**Příklad 2:** Rozhodněte, zda je posloupnost  $(a_n)$  omezená:

(a)  $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(b)  $\left(\frac{3n+4}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

(c)  $\left((-1)^n \cdot n\right)_{n=1}^{\infty}$

**Příklad 1:** Rozhodněte, zda je posloupnost  $(a_n)$  monotónní:

(a)  $\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

(b)  $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(c)  $\left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

**Příklad 2:** Rozhodněte, zda je posloupnost  $(a_n)$  omezená:

(a)  $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(b)  $\left(\frac{3n+4}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

(c)  $\left((-1)^n \cdot n\right)_{n=1}^{\infty}$

**Výsledky:**

- 1.(a) rostoucí, (b) není monotónní, (c) klesající;
- 2.(a) omezená, (b) omezená, (c) není omezená.

## Limita posloupnosti

**Definice:** Necht' je dána posloupnost  $\{a_n\}$  a číslo  $L \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má vlastní limitu  $L$ , jestliže ke každému reálnému  $\varepsilon > 0$  existuje index  $n_0 \in \mathbb{N}$  takový, že pro všechna  $n > n_0$  platí  $|a_n - L| < \varepsilon$ .

**Příklad 3a:** Posloupnost  $\{a_n\}$  je dána následujícím předpisem:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+n}}{2n}. \text{ Platí pro ni, že } L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

- Vypočítejte prvních pár členů posloupnosti  $\frac{(-1)^{n+n}}{2n}$ .
- Zvolte vhodně několik kladných hodnot parametru  $\varepsilon$  a najděte vhodné  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, aby platila předchozí definice.

**Příklad 3b:** Pro posloupnost  $\{a_n\}$  najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Pomožte si grafickým znázorněním prvních pár členů.

(a)  $a_n = \frac{1}{n}$

(b)  $a_n = -\frac{1}{n}$

(c)  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

(d)  $a_n = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ )

(e)  $a_n = n$

(f)  $a_n = -n$

**Příklad 3c:** Vypočtěte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  zadaných posloupností:

(a)  $a_n = \frac{3n^2+1}{2n^2+1}$

(b)  $a_n = \frac{3n+1}{2n^2+1}$

(c)  $a_n = \frac{3n^2+1}{2n+1}$

**Příklad 4:** Vypočítejte:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{3-n^2}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2}{n+1} - \frac{6n^3}{n^2-3} \right)$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-2)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( n - \sqrt{n^2+3} \right)$

(g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{6n+1}{2n-3}}$

(h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3}}$



**Příklad 4:** Vypočítejte:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{3-n^2}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2}{n+1} - \frac{6n^3}{n^2-3} \right)$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-2)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( n - \sqrt{n^2+3} \right)$

(g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{6n+1}{2n-3}}$

(h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3}}$

**Výsledky:**

4. (a)  $-2$ , (b)  $-\infty$ , (c)  $\frac{15}{2}$ , (d)  $0$ , (e)  $0$ , (f)  $-\frac{3}{2}$ , (g)  $27$ , (h)  $\ln 2$ .

**Příklad 4:** Vypočítejte:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3^n}{3^n-2}$

(j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^2}$

(k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

(l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

(m)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+2}{3} - \frac{3+5+7+\dots+(2n+1)}{n-5} \right)$

(n)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}$

(o)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$  (pomůžte znalost  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ )

(p)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{9n-7}$  (pomůžte znalost  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ )

**Příklad 4:** Vypočítejte:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3^n}{3^n-2}$

(j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^2}$

(k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

(l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

(m)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+2}{3} - \frac{3+5+7+\dots+(2n+1)}{n-5} \right)$

(n)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}$

(o)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$  (pomůžte znalost  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ )

(p)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{9n-7}$  (pomůžte znalost  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ )

**Výsledky:**

4. (i) 1, (j)  $\infty$ , (k) 0, (l)  $\frac{1}{2}$ , (m)  $-\frac{19}{3}$ , (n)  $\frac{4}{3}$ , (o)  $e^{-\frac{1}{3}}$ , (p)  $e^3$ .