MA0004 Matematická analýza 1, 10. seminář

27. 4. 2020 (původně)

Náplň cvičení

1. Parciální derivace funkce dvou proměnných

Literatura a použité zdroje

- Kuben J. a kol. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: `homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf`
- Došlá Z., Došlý O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf`
- Klaška J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných.* Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: `http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021`

Parciální derivace 1. řádu funkce dvou proměnných

Parciální derivace 1. řádu funkce dvou proměnných

Definice: Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definovaná v bodě $[x_0; y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0; y_0]$ a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$. To znamená, že

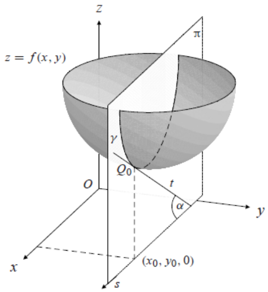
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0; y_0]$ a označujeme $f_y(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$.

Při parciální derivaci podle proměnné x bereme proměnnou y jako konstantu a takto s ní nakládáme při derivaci. Stejně naopak, derivujeme-li podle proměnné y.

Geometrický význam parciální derivace 1. řádu

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a G_f je její graf. Nechť π je rovina daná rovnicí $y = y_0$. Za rozumných předpokladů (např. spojitost funkce f) je průsečíkem $G_f \cap \pi$ křivka v rovině π a parciální derivace $f_x(x_0; y_0)$ udává směrnici tečny t k této křivce v bodě $Q_0 = [x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$, viz obrázek. (Připomeňme, že směrnice tečny t je $\operatorname{tg} \alpha$).



Podobně, derivace $f_y(x_0; y_0)$ udává směrnici tečny ke křivce v bodě Q_0, která vznikne průsečíkem plochy G_f s rovinou $x = x_0$.

Příklady na parciální derivace 1. řádu

Příklad 1: Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a) $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100$

b) $z = \frac{x}{y}$

c) $z = \left(x^2y + y\right)^4$

d) $z = x^y$

e) $z = x \cdot \ln\left(x^2 - y^2\right)$

f) $z = \sqrt{x + \sin xy}$

Příklad 2: Spočtěte parciální derivace 1. řádu funkce v bodě A:

a) $f(x,\ y) = y^2 + y \cdot \sqrt{1 + x^2},\ A = [2,\ 5]$

b) $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right),\ A = [1,\ 2]$

c) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x},\ A = [0,\ 1]$

Výsledky příkladů

Příklad 1:

a) $z_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4,\ z_y = 2x^2 + 6xy - 5,$

b) $z_x = \frac{1}{y},\ z_y = -\frac{x}{y^2},\ y \neq 0$

c) $z_x = 8xy^4\left(x^2+1\right)^3,\ z_y = 4y^3\left(x^2+1\right)^4$

d) $z_x = yx^{y-1},\ z_y = x^y \ln x,\ x > 0$

e) $z_x = \ln\left(x^2 - y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2-y^2},\ z_y = -\frac{2xy}{x^2-y^2},\ x^2 - y^2 > 0$

f) $z_x = \frac{1+y\cdot\cos xy}{2\sqrt{x+\sin xy}},\ z_y = \frac{x\cdot\cos xy}{2\sqrt{x+\sin xy}},\ x + \sin xy > 0$

Příklad 2:

a) $f_x\left(2,\ 5\right) = 2\sqrt{5},\ f_y\left(2,5\right) = 10 + \sqrt{5}$

b) $f_x\left(1,2\right) = 0,\ f_y\left(1,2\right) = \frac{1}{4}$

c) $f_x\left(0,1\right) = 1,\ f_y\left(0,1\right) = 0$

Parciální derivace 2. řádu funkce dvou proměnných

Parciální derivace 1. řádu $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ mohou mít v bodech svého definičního oboru opět parciální derivace podle x nebo y, které nazýváme *parciální derivace 2. řádu* funkce f:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f''_{xx}$ ... druhá parciální derivace f podle x,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f''_{yy}$ ... druhá parciální derivace f podle y,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = f''_{xy}$ ... druhá parciální derivace f podle x a y,

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = f''_{yx}$ ... druhá parciální derivace f podle y a x.

Schwarzova věta: Nechť funkce f má spojité parciální derivace f_{xy}, f_{yx} v bodě $[x_0; y_0]$. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Příklad 3: Spočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = x^2 + xy - 3xy^3$

b) $z = \frac{xy+x}{y}$

c) $z = e^{2y} \cdot \sin x$

Příklad 3: Spočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = x^2 + xy - 3xy^3$

b) $z = \frac{xy+x}{y}$

c) $z = e^{2y} \cdot \sin x$

Výsledky:

a) $z_x = 2x + y - 3y^3,\ z_y = x - 9xy^2,\ z_{xx} = 2,\ z_y = -18xy,$
$z_{xy} = z_{yx} = 1 - 9y^2$

b) $z_x = \frac{y+1}{y},\ z_y = -\frac{x}{y^2},\ z_{xx} = 0,\ z_{yy} = \frac{2x}{y^3}, z_{xy} = z_{yx} = -\frac{1}{y^2}$

c) $z_x = e^{2y} \cos x,\ z_y = 2e^{2y} \sin x,\ z_{xx} = -e^{2y} \sin x,$
$z_{yy} = 4e^{2y} \sin x,\ z_{xy} = z_{yx} = 2e^{2y} \cos x$