MA0004 Matematická analýza 1, 11. seminář

4. 5. 2020 (původně)

Náplň cvičení

1. Totální diferenciál
2. Tečná rovina
3. Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Literatura a použité zdroje

- Kuben J. a kol. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: `homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf`
- Došlá Z., Došlý O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf`
- Klaška J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných.* Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: `http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021`

Totální diferenciál

Totální diferenciál

Definice: Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0; y_0]$ je v tomto bodě diferencovatelná, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Lineární funkce $Ah + Bk$ proměnných h, k se nazývá diferenciál funkce v bodě $[x_0; y_0]$ a značí se $df(x_0, y_0)(h, k)$, příp. $df(x_0, y_0)$.

Poznámka: Totální diferenciál lze použít k přibližnému výpočtu hodnoty funkce dvou proměnných v zadaném bodě. Funkci $Ah + Bk$ lze nahradit takto:

$$df\,(x_0,\ y_0) = f_x\,(x_0,\ y_0) \cdot h + f_y\,(x_0,\ y_0) \cdot k$$

Využití totálního diferenciálu

Je-li $x = x_0 + h,\ \ y = y_0 + k$, pak lze pomocí diferenciálu vypočítat přibližnou hodnotu funkce f v bodě $[x,\ y]$ vypočítat takto:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\doteq f(x_0,\ y_0) + df(x_0, y_0) \\ &= f(x_0,\ y_0) + f_x(x_0,\ y_0) \cdot h + f_y(x_0,\ y_0) \cdot k \end{aligned}$$

Totální diferenciál – příklady

Příklad 1: Spočtěte totální diferenciál funkce f v obecném bodě $[x, \; y]$.

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3$

b) $f(x, y) = y \cdot \ln 2x$

c) $f(x, y) = x^y$

d) $f(x, y) = \arctan xy$

e) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

Totální diferenciál – příklady

Příklad 1: Spočtěte totální diferenciál funkce f v obecném bodě $[x,\ y]$.

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3$
b) $f(x, y) = y \cdot \ln 2x$
c) $f(x, y) = x^y$
d) $f(x, y) = \arctan xy$
e) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

Výsledky:

a) $df(x, y) = 6x \cdot dx - 6y \cdot dy$
b) $df(x, y) = \frac{y}{x} \cdot dx + \ln 2x \cdot dy$
c) $df(x, y) = x^{y-1} \cdot (y \cdot dx + x \cdot \ln y \cdot dy)$
d) $df(x, y) = \frac{1}{1+x^2y^2} \cdot (y \cdot dx + x \cdot dy)$
e) $df(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x \cdot dx + y \cdot dy)$

Totální diferenciál – příklady

Příklad 2: Vypočtěte totální diferenciál funkce f v bodě A pro dané $dx,\ dy$.

a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy},\ A = [2,\ 2],\ dx = 0{,}03,\ dy = 0{,}01$

b) $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2+y^2},\ A = [3,4],\ dx = 0{,}1,\ dy = 0{,}2$

c) $f(x,y) = e^{xy},\ A = [1,2],\ dx = -0{,}1,\ dy = 0{,}1$

d) $f(x,y) = \operatorname{arccotg}\frac{x}{y},\ A = [2,\ 1],\ dx = 0{,}01,\ dy = 0{,}05$

Příklad 3: Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu následujících výrazů.

a) $\arctan \frac{1{,}02}{0{,}95}$

b) $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$

c) $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$

d) $\ln\left(0{,}97^2 + 0{,}05^2\right)$

e) $e^{0{,}05^3 - 0{,}02}$

Výsledky příkladů 2, 3

2. a) 0,02; b) $\frac{4}{50} = 0,08$; c) $\frac{e^2}{10} \doteq -0,739$, d) $\frac{9}{500} = 0,018$
3. a) $\frac{\pi}{4} + 0,035$, b) 2,95, c) $\frac{\pi}{6} - \frac{0{,}09}{\sqrt{3}}$, d) $-0,06$, e) $1,13$

Tečná rovina

Definice: Rovina τ o rovnici $z = Ax + By + C$ se nazývá *tečnou rovinou* ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $M_0 = [x_0, y_0, z_0]$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$, jestliže

i) τ prochází bodem M_0,

ii) platí $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-Ax-By-C}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$.

Věta: Tečná rovina τ ke grafu funkce f v bodě M_0 existuje právě tehdy, když je funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Její rovnice je

$$\tau : z = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Poznámka: Přímka n procházející dotykovým bodem M_0 kolmo k rovině τ je *normála* ke grafu funkce f bodě T. Normálový vektor roviny τ je $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$ a parametrické rovnice normály jsou tudíž: $(x, y, z) = (x_0 + t \cdot f_x(x_0, y_0), y_0 + t \cdot f_y(x_0, y_0), z_0 - t), t \in \mathbb{R}$.

Tečná rovina a normála – příklady

Příklad 4: Určete rovnici tečné roviny τ a normály n ke grafu funkce v zadaném bodě:

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $[x_0, y_0, \; z_0] = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \; \frac{1}{\sqrt{3}}; \; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

b) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$, $[x_0, y_0, \; z_0] = [1; 1; 4]$

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $[x_0, y_0, \; z_0] = [1; \; -1; ?]$

d) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $[x_0, y_0, \; z_0] = [0; 0; ?]$

Tečná rovina a normála – příklady

Příklad 4: Určete rovnici tečné roviny τ a normály n ke grafu funkce v zadaném bodě:

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $[x_0, y_0,\ z_0] = \left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

b) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$, $[x_0, y_0,\ z_0] = [1; 1; 4]$

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $[x_0, y_0,\ z_0] = [1;\ -1; ?]$

d) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $[x_0, y_0,\ z_0] = [0; 0; ?]$

Výsledky:

a) $\tau : x + y + z = \sqrt{3}$, $n : (x,y,z) = (\frac{1}{\sqrt{3}} - t, \frac{1}{\sqrt{3}} - t, \frac{1}{\sqrt{3}} - t)$, $t \in \mathbb{R}$

b) $\tau : 3x + 5y - z = 4$, $n : (x,y,z) = (1 + 3t, 1 + 5t, 4 - t)$, $t \in \mathbb{R}$

c) $\tau : x + y - 2z = \frac{\pi}{2}$, $n : (x,y,z) = (1 + \frac{1}{2}\cdot t, -1 + \frac{1}{2}\cdot t, \frac{\pi}{4} - t)$, $t \in \mathbb{R}$

d) $\tau : z = 1$, $n : (x,y,z) = (0, 0, 1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Lokální extrémy, stacionární bod

Definice: Nechť $f(x,y)$ je funkce dvou proměnných a $M[x_0, y_0] \in D(f)$.

a) Řekneme, že funkce f má v bodě M *lokální maximum*, jestliže existuje okolí $O(M)$ takové, že pro každé $[x,y] \in O(M)$ platí $f(x,y) \leq f(M)$.

b) Řekneme, že funkce f má v bodě M *lokální minimum*, jestliže existuje okolí $O(M)$ takové, že pro každé $[x,y] \in O(M)$ platí $f(x,y) \geq f(M)$.

Jestliže pro $[x,y] \neq [x_0, y_0]$ jsou předchozí nerovnosti ostré, mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.

Definice: Řekneme, že bod $M[x_0, y_0]$ je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže platí $f_x(M) = 0$ a $f_y(M) = 0$.

Lokální extrémy – jak je vyšetřit

Věta: Nechť funkce f má v bodě $T[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a T je její stacionární bod. Označme

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y).$$

Pak platí:

1. Jestliže $J(T) > 0$, je v bodě T ostrý lokální extrém.
   - Pro $f_{xx}(T) > 0$ je T minimum,
   - pro $f_{xx}(T) < 0$ je T maximum.
2. Jestliže $J(T) < 0$, není v bodě T lokální extrém.
3. Jestliže $J(T) = 0$, nedává věta odpověď (extrém může být, ale nemusí).

Lokální extrémy – příklady

Příklad 5: Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných.

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y$
b) $f(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y$
c) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
d) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$
e) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$

Lokální extrémy – příklady

Příklad 5: Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných.

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y$
b) $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y$
c) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
d) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$
e) $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$

Výsledky:

a) lokální minimum v bodě $\left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right]$
b) lokální minimum v bodě $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$
c) lokální minimum v bodě $[0, 0]$, lokální maximum v bodě $\left[-\frac{5}{3}, \ 0\right]$, stac. body, v nichž extrém nenastává: $[-1, 2]\,; [-1, -2]$
d) lokální minimum v bodě $\left[\sqrt{2}, 1\right]$, lokální maximum v bodě $\left[-\sqrt{2}, 1\right]$, stac. body, v nichž extrém nenastává: $\left[0, 1 + \sqrt{6}\right]$; $\left[0, 1 - \sqrt{6}\right]$
e) lokální minimum v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, stacionární bod, v němž extrém nenastává: $[0, 0]$