MA0004 Matematická analýza 1, 2. seminář

24. 2. 2020

Náplň cvičení

1. Hromadné body posloupnosti
2. Limita funkce

Literatura a použité zdroje

- Došlá, Z., Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* MU: Brno, 2004.
- * Samková, L. *Materiály k výuce v zimním semestru - Matematická analýza 3*. 2019. Dostupné zde: `http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/ma3.htm`
- # Voldánová, A. *Posloupnosti a jejich hromadné body*. Bakalářská práce, 2007. Dostupné zde: `https://is.muni.cz/th/150974/prif_b/`

Hromadné body posloupnosti

Příklad 1: Vysvětlete, co je to hromadný bod posloupnosti. Pokud nevíte, podívejte se sami do svých poznámek z přednášky, případně na mobilu. Můžete pracovat ve skupině, čas na rešerši: 3 minuty.

Hromadné body posloupnosti

Příklad 1: Vysvětlete, co je to hromadný bod posloupnosti. Pokud nevíte, podívejte se sami do svých poznámek z přednášky, případně na mobilu. Můžete pracovat ve skupině, čas na rešerši: 3 minuty.

Vybraná podposloupnost a hromadný bod

Definice: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoupcí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybraná podposloupnost** z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice: Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **hromadný bod** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro každé okolí $O(a)$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pro které platí, že $a_n \in O(a)$.

Věta: Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Hromadné body posloupnosti

Příklad 2: Najděte všechny hromadné body daných posloupností a určete limitu superior a limitu inferior daných posloupností:

(a) $a_n = (-1)^{n+3}$

(b) $a_n = (-2)^n$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

(d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n}{n+1}$

(e) $a_n = \operatorname{tg}\left((2n+1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)$

(f) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$

(g) $a_n = \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{3}\right)$

(h) $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$

(i) $a_n = 5 + 4\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{3}\right)$

(j) $a_n = 5 + 4\cdot\cos^n\left(n\cdot\frac{\pi}{3}\right)$

Výsledky Příkladu 2

(a) $H(a_n) = \{-1,\ 1\}$, $\liminf a_n = -1, \limsup a_n = 1$

(b) $H(a_n) = \{-\infty, \infty\}$, $\liminf a_n = -\infty, \limsup a_n = \infty$

(c) $H(a_n) = \{0,\ 1\}$, $\liminf a_n = 0, \limsup a_n = 1$

(d) $H(a_n) = \{-2,\ 2\}$, $\liminf a_n = -2, \limsup a_n = 2$

(e) $H(a_n) = \{-1,\ 1\}$, $\liminf a_n = -1, \limsup a_n = 1$

(f) $H(a_n) = \{0,\ 1,\ 2\}$, $\liminf a_n = 0, \limsup a_n = 2$

(g) $H(a_n) = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $\liminf a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \limsup a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(h) $H(a_n) = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, $\liminf a_n = -\frac{1}{2}, \limsup a_n = 1$

(i) $H(a_n) = \{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$, $\liminf a_n = 1, \limsup a_n = 9$

(j) $H(a_n) = \{1,\ 5, 9\}$, $\liminf a_n = 1, \limsup a_n = 9$

Limita funkce

Příklad 3: Limita funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tj. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ může být různého typu, známe tyto případy:

(a) Vlastní limita ve vlastním bodě
(b) Vlastní limita v nevlastním bodě
(c) Nevlastní limita ve vlastním bodě
(d) Nevlastní limita v nevlastním bodě

Zkuste pomocí vhodných počítačových aplikací, na základě vlastního úsudku či po poradě s kamarády, přijít na to, jakého typu jsou následující limity:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x+1} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2+5}$$

$$\lim_{x\to -\infty} 2^x \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{1-x^3}{x^2+4} \qquad \lim_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x$$