

# MA0004 Matematická analýza 1, 4. seminář

9. 3. 2020

## 1 Derivace funkce jedné proměnné

- Geometrický význam derivace
- Využití základních vzorců
- Derivace složené funkce
- Úprava funkce před stanovením derivace
- Tečna a normála funkce

## Literatura a použité zdroje

- Došlá, Z., Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. MU: Brno, 2004.
- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*. Brno, 2012. Dostupné z: <https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>

## Derivace funkce

**Definice:** Derivací funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  nazveme limitu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Značit budeme  $f'(x)$ , resp.  $y'$ . Je-li limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, v opačném případě se jedná o derivaci nevlastní. V případě, že existují jen jednostranné limity, mluvíme o derivaci zprava (zleva).

Ukázka animace vysvětlující geometrický význam derivace  $f'(x)$  v určitém bodě  $S1 = [x, f(x)]$ , který se přibližuje k bodu  $S2 = [x_0, f(x_0)]$ .

**Příklad 1:** Zderivujte následující funkce:

$$1 \quad f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$3 \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$4 \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$5 \quad f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

**Příklad 1:** Zderivujte následující funkce:

1  $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

2  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

3  $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

4  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

5  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

**Výsledky:**

1.  $\left[ \frac{11}{6} \cdot \sqrt[6]{x^5} \right]$ , 2.  $\left[ \frac{(x-1) \cdot \sqrt{x}}{2x^2} \right]$ , 3.  $[x \cdot (2 \ln x + 1)]$ ,

4.  $\left[ -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \right]$ , 5.  $\left[ \frac{1}{1-\sin x} \right]$

**Příklad 2:** Zderivujte následující funkce:

1  $f(x) = \sin^4 x$

2  $f(x) = e^{x^2-2x+1}$

3  $f(x) = \ln^3(x^2 - 1)$

4  $f(x) = \operatorname{tg}^3 2x$

5  $f(x) = 5^{x^2-1} + 3$

6  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}$

7  $f(x) = \frac{1}{(5-2x)^2}$

8  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$

**Příklad 2:** Zderivujte následující funkce:

1  $f(x) = \sin^4 x$

2  $f(x) = e^{x^2-2x+1}$

3  $f(x) = \ln^3(x^2 - 1)$

4  $f(x) = \operatorname{tg}^3 2x$

5  $f(x) = 5^{x^2-1} + 3$

6  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}$

7  $f(x) = \frac{1}{(5-2x)^2}$

8  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$

**Výsledky:**

1.  $[4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x]$ , 2.  $[2(x-1) \cdot e^{x^2-2x+1}]$ , 3.  $\left[\frac{6x \cdot \ln^2(x^2-1)}{x^2-1}\right]$ , 4.  $\left[\frac{6\sin^2 2x}{\cos^4 2x}\right]$   
5.  $[2x \cdot 5^{x^2-1} \cdot \ln 5]$ , 6.  $\left[\frac{x(2+3x^2) \cdot \sqrt{1+x^2}}{x^2+1}\right]$ , 7.  $\left[\frac{4}{(5-2x)^3}\right]$ , 8.  $\left[\frac{1}{1+x^2}\right]$

**Příklad 3:** Zderivujte následující funkce:

1  $f(x) = x^x$

2  $f(x) = x^{\ln x}$

3  $f(x) = x^{\sin x}$



**Příklad 3:** Zderivujte následující funkce:

1  $f(x) = x^x$

2  $f(x) = x^{\ln x}$

3  $f(x) = x^{\sin x}$

**Výsledky:**

1.  $[x^x \cdot (\ln x + 1)]$ , 2.  $[2 \cdot \ln x \cdot x^{\ln x - 1}]$ , 3.  $[x^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})]$

**Příklad 4:** Napište rovnici tečny a normály grafu dané funkce v bodě  $T = [x_0, y_0]$ .

1  $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$ ,  $T = [2, ?]$

2  $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$ ,  $T = [-\frac{1}{2}, ?]$

3  $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ ,  $T = [2, ?]$

4  $f(x) = x \cdot \ln x$ ,  $T = [e, ?]$

**Příklad 4:** Napište rovnici tečny a normály grafu dané funkce v bodě  $T = [x_0, y_0]$ .

1  $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$ ,  $T = [2, ?]$

2  $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$ ,  $T = [-\frac{1}{2}, ?]$

3  $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ ,  $T = [2, ?]$

4  $f(x) = x \cdot \ln x$ ,  $T = [e, ?]$

**Výsledky:**

4.1.  $T = [2, \frac{5}{7}]$ , tečna:  $y = \frac{11}{49}x + \frac{13}{49}$ , normála:  $y = -\frac{49}{11}x + \frac{741}{77}$

4.2.  $T = [-\frac{1}{2}, -1]$ , tečna:  $y = -2x - 2$ , normála:  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

4.3.  $T = [2, 1]$ , tečna:  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ , normála:  $y = 2x - 1$

4.4.  $T = [e, e]$ , tečna:  $y = 2x - e$ , normála:  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}e$

**Příklad 5:** Napište rovnici tečny a normály

- 1 ke kružnici  $x^2 + y^2 = 2$  v jejím bodě  $[1, -1]$
- 2 k parabole  $y^2 = x$  v jejím bodě  $[4, -2]$

**Příklad 6:** Napište rovnici tečny ke křivce  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ , která svírá úhel  $\varphi = 45^\circ$  s osou  $x$ .

**Příklad 7:** Napište rovnici tečny ke křivce  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ , je-li tečna rovnoběžná s přímkou  $p : 3x - y + 5 = 0$ .

**Příklad 5:** Napište rovnici tečny a normály

- 1 ke kružnici  $x^2 + y^2 = 2$  v jejím bodě  $[1, -1]$
- 2 k parabole  $y^2 = x$  v jejím bodě  $[4, -2]$

**Příklad 6:** Napište rovnici tečny ke křivce  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ , která svírá úhel  $\varphi = 45^\circ$  s osou  $x$ .

**Příklad 7:** Napište rovnici tečny ke křivce  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ , je-li tečna rovnoběžná s přímkou  $p : 3x - y + 5 = 0$ .

**Výsledky:**

5.1. Tečna:  $y = x - 2$ , normála:  $y = -x$

5.2. Tečna:  $y = -\frac{1}{4}x - 1$ , normála:  $y = 4x - 18$

6.  $T = \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right]$ , tečna:  $y = x - \frac{13}{4}$

7.  $T = \left[\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right]$ , tečna:  $y = 3x - \frac{13}{4}$