I. EUKLEIDOVSKÉ KONSTRUKCE

① konstrukce s ideálními nástroji ... ← kolmice, rovnoběžka

② — " — s omezenými nástroji, resp. nákresnou ...

spojení bodů ↗ ↑ bod mimo papír!

③ — " — s chybějícími nástroji

↖ (jen okrajově)

pro zájemce ... BONUSOVÝ ÚKOL $\boxed{č. 9}$

POZN ... postupně odkazujeme na:

- shodné △ (sss, sus, ...)
- charakterizaci ∥ ($\alpha = \beta \Leftrightarrow a \parallel b$)
- geom. transformace (posunutí, stejnolehlost, ...)

II. OBSAHY A KVADRATURA MNOHOÚHELNÍKU

rovnoběžník, obdélník

1. sestrojte ▱, resp. ▭, který má stejný obsah jako daný △ trojúhelník

2. sestrojte ▱, resp. ▭, který má dánu ⊢⊣ jednu stranu a stejný obsah jako daný ▱, resp. ▭.

čtverec

3. sestrojte □, který má stejný obsah jako daný ▱, resp. ▭.

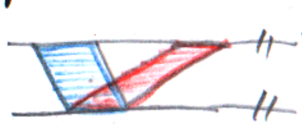
4. sestrojte □, který má stejný obsah jako daný obecný … 4-, 5-, … -úhelník.

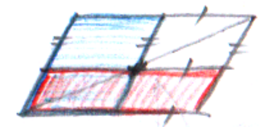
↓

úkol $\boxed{\text{č. 1}}$

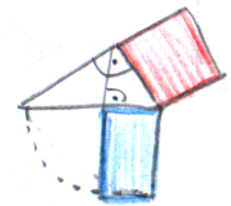
II. POZN.

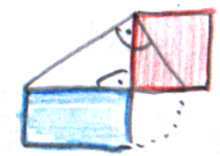
postupně odkazujeme na zákl. věty o obsazích:

* 

* 

* Eukleidovy věty:





* Pythagorova věta

resp. Thaletova věta:

Pro zájemce ... každou z uvedených transformací lze doprovodit stříháním !
→ BONUSOVÝ ÚKOL $\boxed{č. 8}$

POSTŘEHY ... u víceúhelníků lze "sčítání" dílčích obsahů realizovat mnoha způsoby ...

III. ZLATÝ ŘEZ A KVADRATICKÉ ROVNICE

① připomeňte si definici <u>zlatého řezu</u> úsečky a vymyslete si nějakou konstrukci.

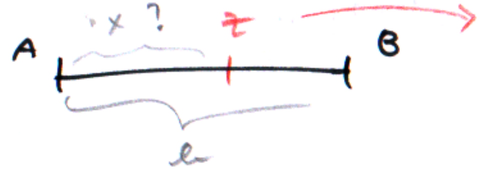
② Interpretujte <u>druhý kořen</u> odpovídající kvadratické rovnice.

③ pro dané úsečky, jejichž velikosti představují kladná reálná čísla 1 c b :

- rozhodněte, zda rovnice $\boxed{x^2+bx+c=0}$ má <u>reálné kořeny</u>
- pokud ANO, kořeny sestrojte $\qquad x^2 \pm bx \pm c = 0$
- pokud NĚ, pozměňte znaménka
  a řešte znovu ...

úkol $\boxed{\text{č. 2}}$

III. POZN.



ZLATÝ ŘEZ:

$$\boxed{AB : AZ = AZ : ZB}$$

* def. rovnost $\iff b : x = x : (b-x) \iff b\cdot(b-x) = x^2$

  $\iff \boxed{x^2 + bx - b^2 = 0}$

* ⇝ kořeny ... $x_{1,2} = \frac{b}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ ← (jeden > 0, druhý < 0)

* ⇝ vztahy (Vietovy) ... $\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = -b^2 \end{array}}$!

* v konstrukci postupně používáme:
  - pyth. větu (resp. Euklid. o výšce/odvěsně)
  - skládání úseček
  - půlení úsečky

* kořeny na "číselné ose":

⇝ platí $AB : AZ_1 = AZ_1 : AB$ ... $b : x = x : (b-x)$ $\Updownarrow$

$\Downarrow$

$Z_2B : Z_2A = Z_2A : AB$ ... $(2b+x) : (b+x) = (b+x) : b$

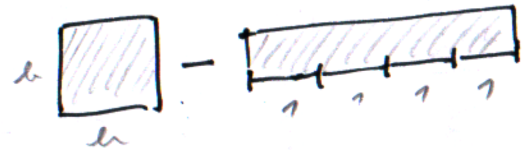
... apod.

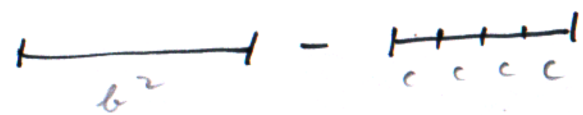
III. POZN ... KVADRATICKÁ ROVNICE

$$x^2 + bx + c = 0 \rightsquigarrow D = b^2 - 4\cdot c$$

... má reálné kořeny $\iff D \geq 0$!

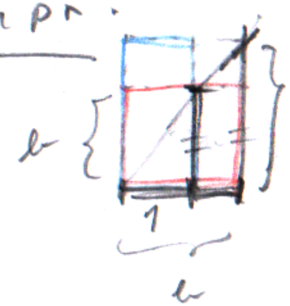
* pro dané úsečky 1, b, c můžeme D interpretovat:

a) pomocí obsahů ...  ... viz II ✓

b) pomocí úseček  ... viz II opět!

pro konstrukce stačí vhodně přiřadit stávající zadání předchozím obecným poznatkům ...

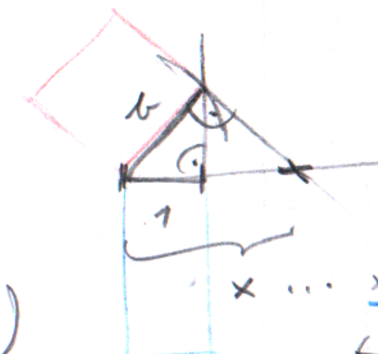
Např.



$x \ldots x\cdot 1 = b\cdot b$

tj. $x = b^2$

(resp. PODOBNÉ △ $x : b = b : 1$)



$x \ldots x\cdot 1 = b^2$

tj. $x = b^2$

apod.

$\left(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2} \right)$

* ZBYTEK snadný ...

III. POZN ... VIETOVY VZTAHY

$$\underbrace{x^2+bx+c=(x-x_1)\cdot(x-x_2)}\rightsquigarrow\boxed{\begin{aligned}x_1+x_2&=-b\\x_1\cdot x_2&=c\end{aligned}}$$

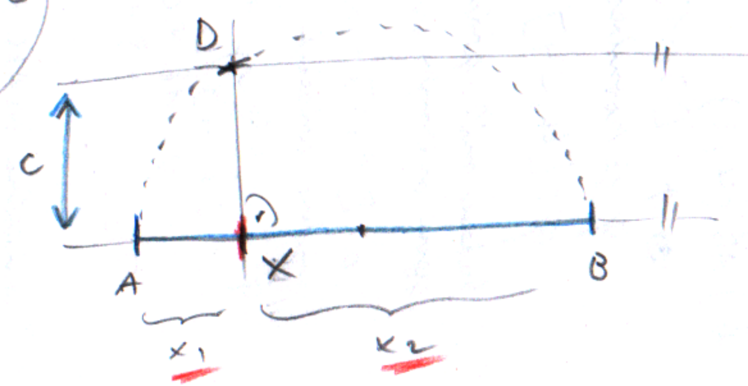
* známe jeden kořen $\Longrightarrow$ známe druhý!
* kořeny mají $\left\{\begin{matrix}\text{stejná}\\\text{opačná}\end{matrix}\right\}$ znaménka $\Longleftrightarrow\left\{\begin{matrix}c>0\\c<0\end{matrix}\right\}$

⋮

* jen na těchto vztazích lze založit mnohé KONSTRUKCE ...

Např. pro $x^2-bx+c^2=0$, $b>0$:

má řešení $\Leftrightarrow b^2-4c^2>0$ $\Leftrightarrow c<\frac{b}{2}$ ✓



1) $|AB|=b$
2) rovnoběžka vzdál. $=c$
3) Thalet. kruž. $\rightsquigarrow$ bod D
4) kolmice $\rightsquigarrow$ bod X $\rightsquigarrow$ x_1, x_2

$$\underbrace{}\quad\boxed{\begin{aligned}x_1+x_2&=b\\x_1\cdot x_2&=c^2\end{aligned}}\longleftarrow\left(\text{Euklid. věta o výšce}\right)$$

↳ tedy x_1, x_2 .. KOŘENY

IV. PRAVIDELNÉ MNOHOÚHELNÍKY

1. vyjádřete velikost vnitřního úhlu pravidelného $\boxed{n}$-úhelníku.

2. vyjádřete velikost strany pravidelného $\boxed{n}$-úhelníka (např. vzhledem k poloměru opsané kružnice)

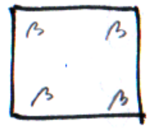
3. Vzpomeňte na zlatý trojúhelník a vraťte se k předchozí úloze.

4. sestrojte co nejvíc pravidelných $\boxed{n}$-úhelníků..
neshodných, nepodobných!

5. zejména si uvědomte vztahy typu
„umím $\boxed{k}$-úhelník ... ⟹ umím $\boxed{l}$-úhelník ...“

úkol $\boxed{č. 3}$

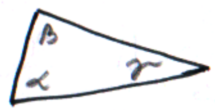
IV. POZN. . . ÚHLY

*    . . . .  $\boxed{n}$-úhelník

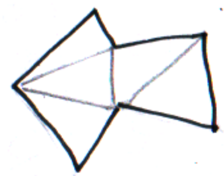
$3\alpha = 180^\circ$ $\quad$ $4\beta = 360^\circ$ $\quad$ $5\gamma = 540^\circ$ $\quad$ $n \cdot \alpha_n = (n-2)\cdot 180^\circ$

$\alpha = 60^\circ$ $\quad$ $\beta = 90^\circ$ $\quad$ $\gamma = 108^\circ$ $\quad$ $\alpha_n = \boxed{\frac{n-2}{n}} \cdot 180^\circ$

* . . . odkazujeme na větu o součtu úhlů △ :



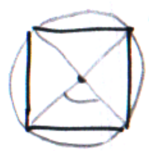
$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\rightsquigarrow$ 

$\boxed{n}$-úhelník:

součet $= \boxed{n-2} \cdot 180^\circ$

* středový úhel :

   . . . . 

120° $\quad$ 90° $\quad$ 72°

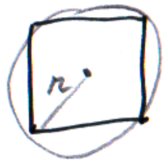
$\boxed{n}$-úhelník

$\omega_n = \boxed{\frac{1}{n}} \cdot 360^\circ$

IV. POZN ... STRANY

* 

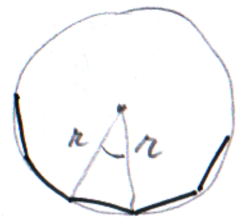
$a_3 = r\sqrt{3}$



$a_4 = r\sqrt{2}$

... umíme rovnou ...

* obecně ...



a_n

... kosinová věta:

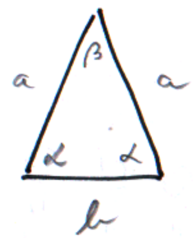
$$a_n^2 = r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cdot \cos\frac{360°}{n}$$

$$a_n^2 = 2r^2\left(1 - \cos\boxed{\frac{360°}{n}}\right)$$

* zejména pro $n=5$ ... $a_5 = r\sqrt{2-2\underbrace{\cos\boxed{72°}}}$

umíme nějak upravit / sestrojit?

IV. POZN. ... ZLATÝ TROJÚHELNÍK (viz přednáška s. 37)



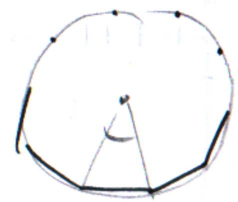
$$\boxed{\alpha = 2\beta \iff a : b = \text{zlatý poměr}}$$

tj. ve zlatém △ platí:

$\underline{\beta = 36^\circ}$, $\underline{\alpha = 72^\circ}$, $\underline{b = a \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$!

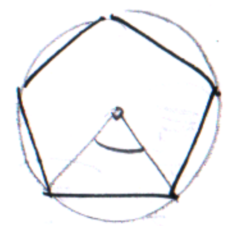
TEDY

→ $\underline{a_{10} = r \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$



$\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

→ $\underline{a_5 = r \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}$



$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

z kosinové věty ve zlatém △

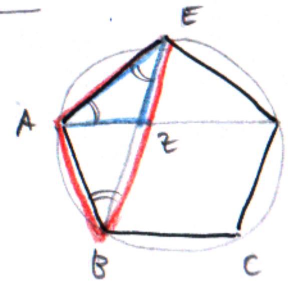
$$\boxed{\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

z uvedených vyjádření vidíme, že pravidelný 5-, resp. 10-úhelník JE SESTROJITELNÝ ...

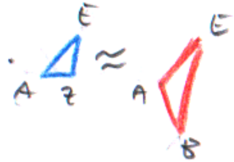
a umíme si <u>vymyslet</u> konstrukci!

IV. POZN ... PRAVIDELNÝ 5-ÚHELNÍK

* zlatý řez lze v 5-úh. vidět přímo:



. podobné trojúhelníky ...



. shodné strany

AE = AB = ... = ZD

AD : DZ = DZ : ZA

apod.

* odtud SNADNÉ konstrukce pomocí jednoho zlatého řezu ...

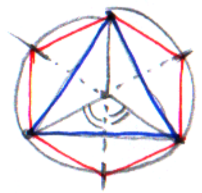
* pro lib. omezení (daná strana, úhlopř.,
kružnice opsaná, ...)

stačí jeden pravidelný 5-úh.
vhodně přeškálovat ...
(zvětšit / zmenšit)

IV. POZN ... OSTATNÍ MNOHOÚHELNÍKY

* umíme $\boxed{k}$-úhelník $\Longrightarrow$ umíme $\boxed{2k}$-úhelník

$k = 3$ ...

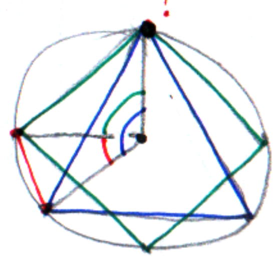


← půlením středového úhlu

* umíme $\boxed{k}$-úh. a $\boxed{l}$-úh., kde k, l .. NESOUDĚLNÉ

$\Longrightarrow$ umíme $\boxed{k \cdot l}$-úhelník !

$k = 3$
$l = 4$



← úprava zlomků:

$$\angle = \frac{360^\circ}{k}, \qquad \angle = \frac{360^\circ}{l}$$

$$\angle = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{l}\right) \cdot 360^\circ = \boxed{\frac{l-k}{k \cdot l}} \cdot 360^\circ$$

* některé ÚHLY NEJDOU $\Longrightarrow$ některé $\boxed{n}$-úh. NEJDOU !

... viz Gauss-Wantzelovu větu

					$2 \cdot 3$		$2 \cdot 4$		$2 \cdot 5$		$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$								
lze	podstatné	3	4	5												17			
	odvozené				6		8		10		12			15	16				
nelze						7		9		11		13	14				18	19	...

V. DOTYKOVÉ ÚLOHY

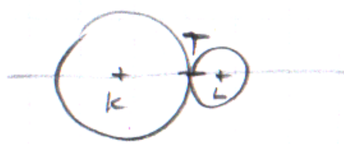
1. připomeňte si základní definici a charakterizace dotyku kružnic, resp. přímek
2. sestrojte tečnu z bodu ke kružnici.
3. sestrojte společné tečny dvou kružnic.
4. sestrojte kružnici, která se dotýká dvou přímek a prochází daným bodem.
5. sestrojte kružnici, která prochází dvěma body a dotýká se dané přímky.
6. vzpomeňte na úlohu Apollóniovu, uvažujte varianty předchozích zadání a zamyslete se nad obecným případem ...

V. POZN ... ZÁKLADNÍ VĚCI

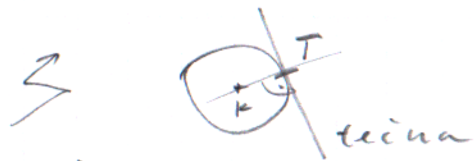
* **Definice**: $\boxed{\text{DOTYK}}$ kružnic, resp. přímky a kruž.

... $\boxed{\text{právě jeden společný BOD}}$

* **věta** (geom. char.):



T = dotykový bod $\Longleftrightarrow$ k, l, T na přímce.



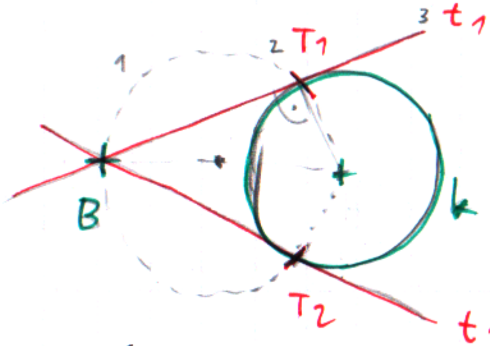
k, l ... středy kružnic

T = dotykový bod $\Longleftrightarrow$ kT kolmý k tečně.

(DŮKAZY zpravidla nepřímo...)

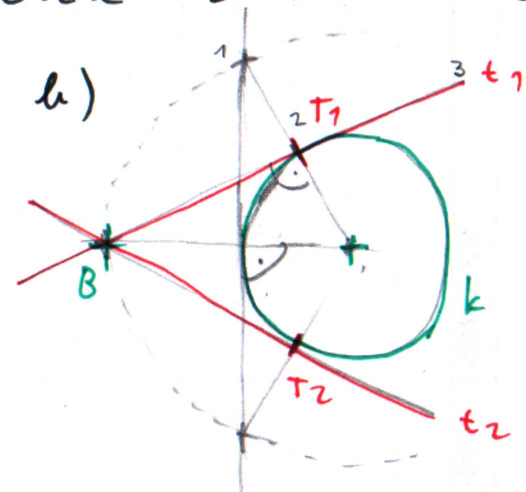
* **pomocná úloha** ... tečna z bodu B ke kružnici k

a)



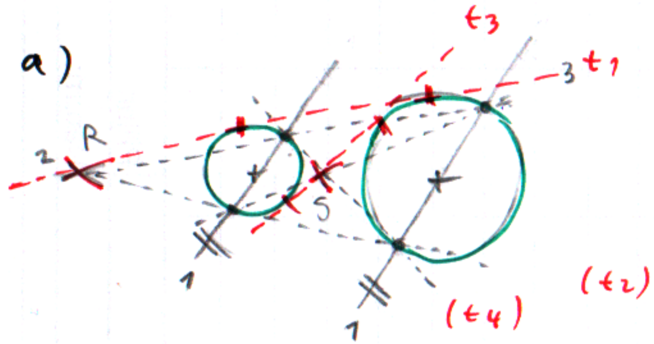
.. pomocí Thaletovy kruž./vity

b)



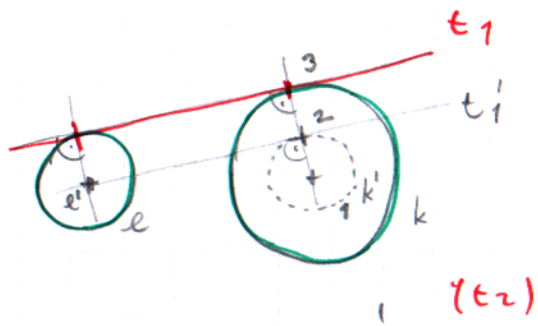
.. pomocí souměrnosti (shodné △)

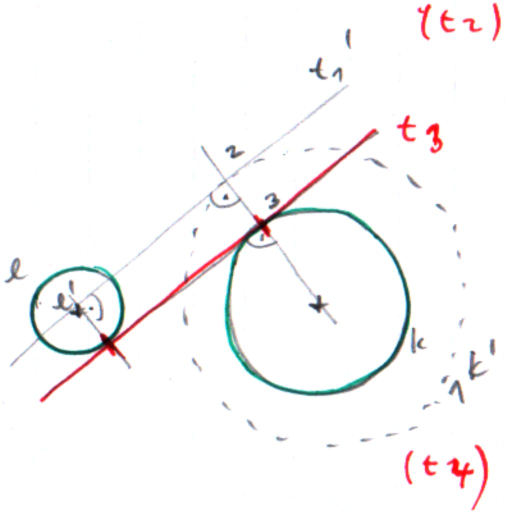
V. POZN ... SPOLEČNÉ TEČNY

a) 

.. pomocí **stejnolehlosti**:

* R, S = středy stejnol.
* t_i = tečny z BODU ke kruž. ✓

b) 



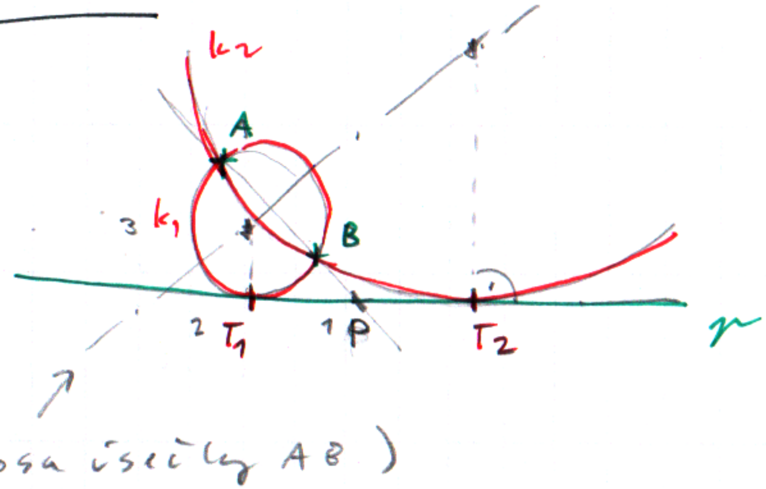
... pomocí **DILATACE**:

* "zmenšit" .. $R_{k'} = R_k - R_\ell$
* t_i' = tečna z BODU ke kruž. ✓
* "zvětšit" zpátky ... !

... totéž s "opačnou orientací"

t_i: $R_{k'} = R_k + R_\ell$

V. POZN ... DOTYKOVÁ KRUŽNICE pro A, B, p:



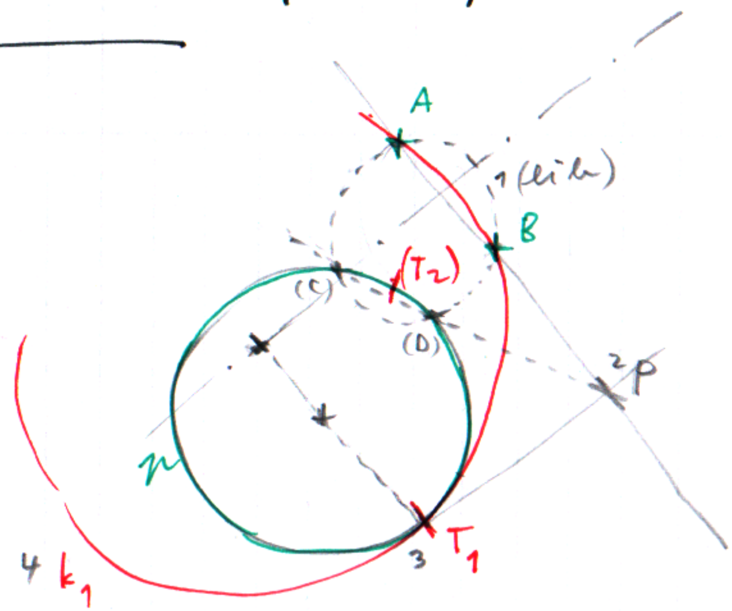
... pomocí MOCNOSTI:

* $P = AB \cap p$
* $\boxed{PA \cdot PB = PT \cdot PT}$!

  → $|PT|$ umíme sestrojit ✓

⋮

varianta pro p = kružnice:



* lib = libovolná kruž. proch. A, B a P!
* $\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT \cdot PT}$

  → $|PT|$ umíme ✓

VI. KRUHOVÁ INVERZE

1) Připomeňte si definici kruhové inverze a vymyslete si konstrukci obrazu obecného bodu.

2) Připomeňte si vlastnosti kruhové inverze a sestrojte obraz obecné přímky, kružnice.

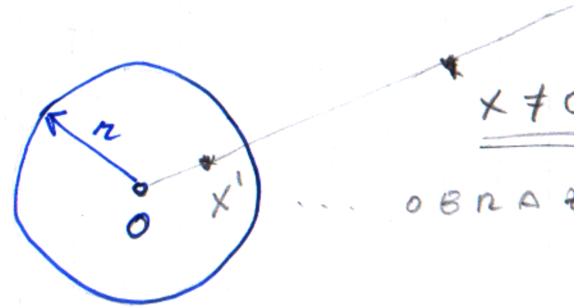
3) Vyřešte pomocí kruhové inverze nějakou dotykovou úlohu.

4) Vzpomeňte na úlohu Apollóniovu, uvažujte varianty předchozích zadání a zamyslete se nad obecným případem ...

úkol $\boxed{\text{č. 4}}$

VI. POZN ... DEFINICE

* KRUHOVÁ INVERZE určená kružnicí: (střed O, poloměr r)



$X \neq O$ lib. ... vzor

... OBRAZ ...

a) X' na polopřímce OX

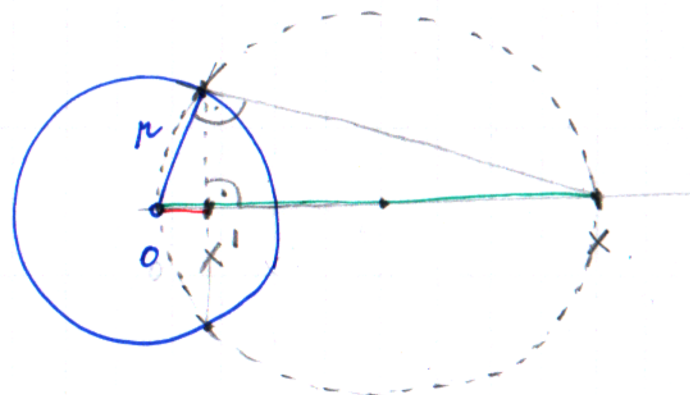
b) $\boxed{|OX'| \cdot |OX| = r^2}$

tj.: $OX' = \dfrac{r^2}{OX}$

* pro dané r a $|OX|$

umíme $|OX'|$ sestrojit ↯

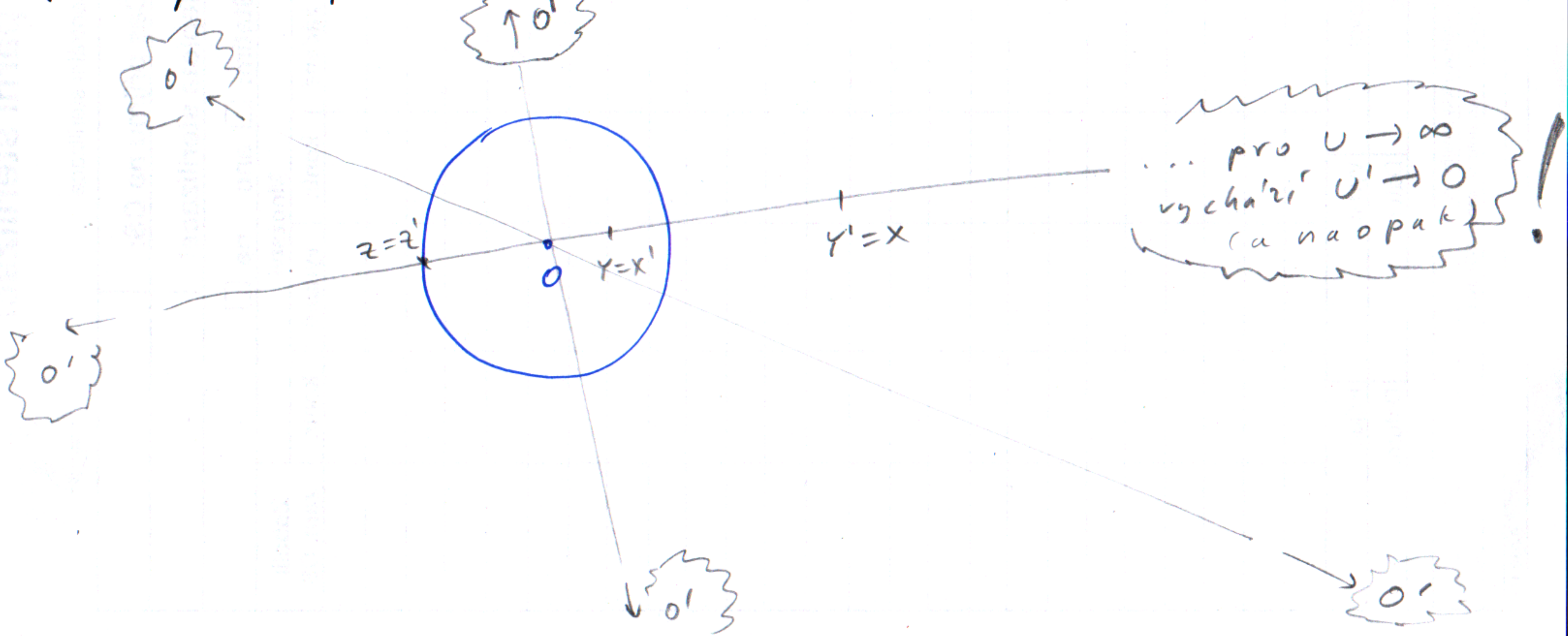
... viz např. Eukl. větu o odvěsně:



("zevnitř ven" nepotřebujeme Thalet. kruž.)

VI. POZN ... VLASTNOSTI ZŘEJMÉ

* Involuce, tj: $Y = X' \iff Y' = X$
* $X \in$ určující kružnici $\iff X' = X$
* X vně ... $\iff X'$ uvnitř ... (a naopak)
* p = přímka proch. středem $O \implies p' = p$

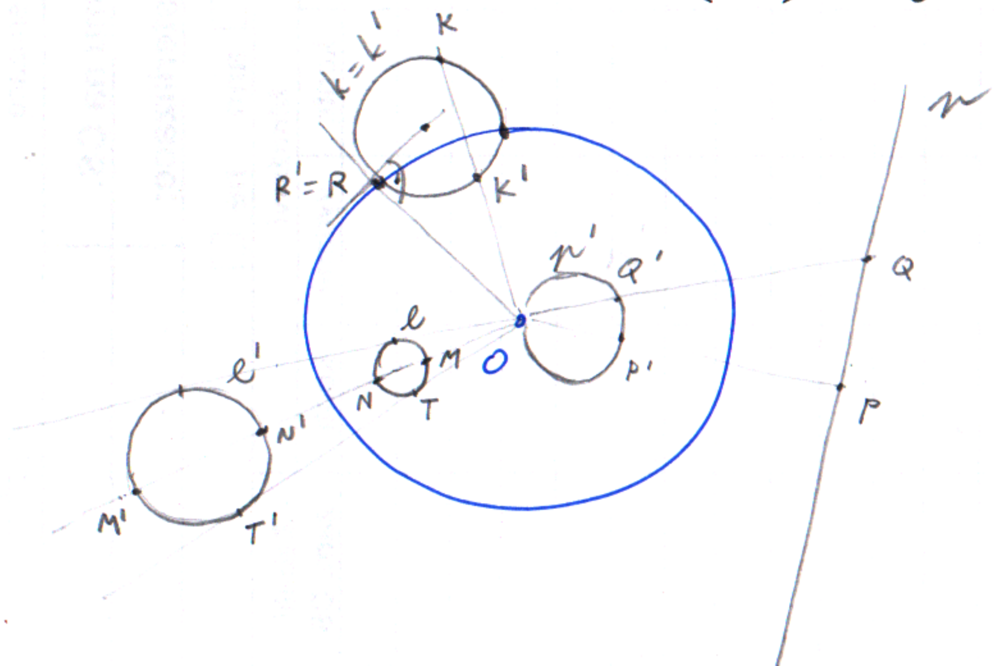


VI. POZN ... VLASTNOSTI NEZŘEJMÉ

* p = přímka NEPROCH. středem O
  $\iff$ p' = kružnice PROCH. O

* k = kružnice KOLMÁ na určující kruž.
  $\iff$ $k' = k$

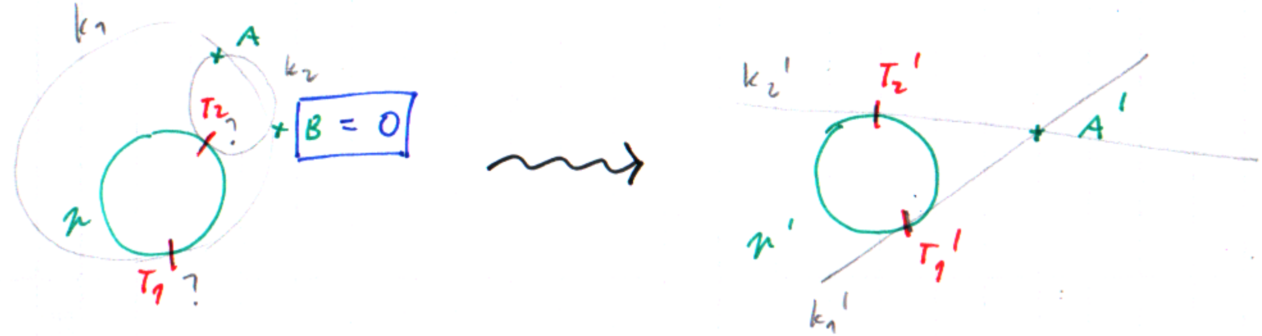
* l = kružnice OBECNÁ
  $\iff$ l' = kružnice OBECNÁ



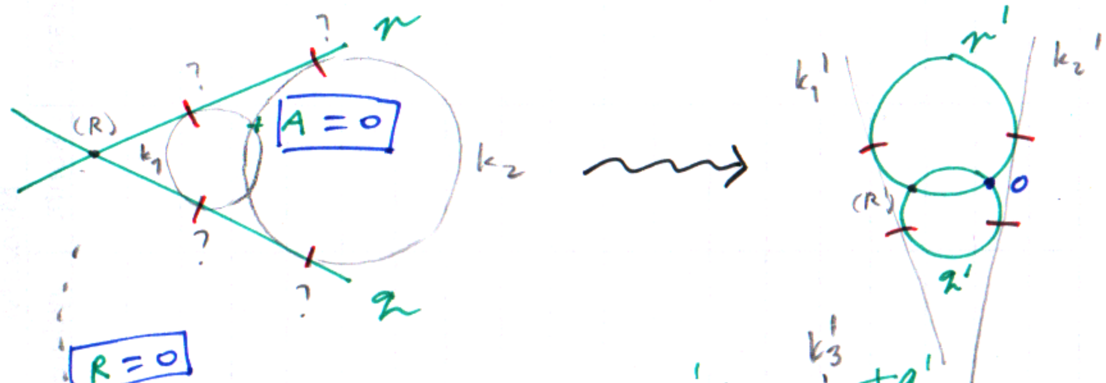
VI. POZN ... UŽITEK

„VHODNĚ zvolený střed inverze $\Longrightarrow$ zajímavá ZJEDNODUŠENÍ"

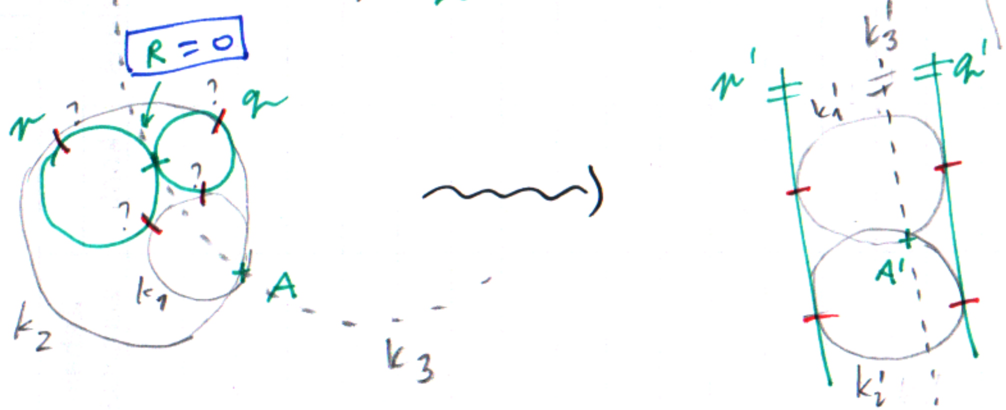
Např.



... tečny z BODU ke kružnici ✓



... společné tečny DVOU kružnic ✓



... kružnice vepsané mezi DVĚ ROVNOBĚŽKY ✓

VII. SHODNÁ ZOBRAZENÍ

1. Posuňte se od shodných útvarů ke shodným zobrazením, zformulujte základní a všechny další vlastnosti shodných zobrazení.

2. Popište základní shodná zobrazení v rovině, sestrojte obraz obecného bodu.

3. Vyražte obecné shodné zobr. zadané dvěma shodnými trojúhelníky:
   * vyjádřete toto zobrazení jako složení základních,
   * sestrojte obraz obecného bodu.

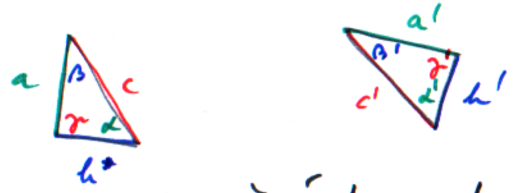
4. Vzpomeňte na všechny druhy shodností v rovině. dim 2

5. Zamyslete se nad obdobnými úkoly na přímce dim 1 a v prostoru dim 3.

VII. POZN.

* SHODNÉ TROJÚHELNÍKY (⇝ MNOHOÚHELNÍKY) dim 2

... po dvojicích SHODNÉ úhly a strany:

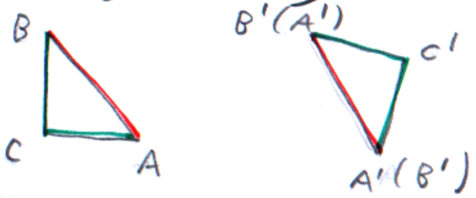


$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$

$\boxed{a = a', b = b', c = c'}$

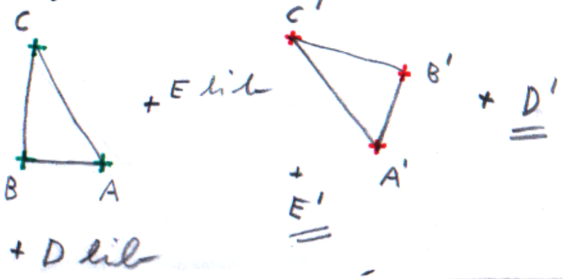
* věta SSS ⇒ stačí kontrolovat strany

* "SOUMĚRNÉ" útvary dovolují více interpretací:



⇝ rozlišíme podle značení bodů

* SHODNOST trojúhelníků lze ROZŠÍŘIT do celé roviny



⇝ SHODNÉ zobrazení

* SHODNOSTI na přímce ... triviální (jen úsečky)

dim 1

— " — v prostoru ... navíc stěnové úhly ..

dim 3

VII. POZN ... VLASTNOSTI

* SHODNÁ zobrazení zachovávají:

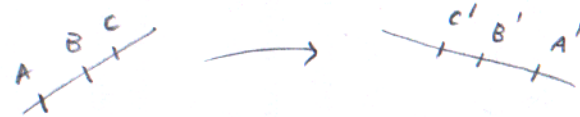
• VZDÁLENOSTI BODŮ (= shodnost úseček)

$A'B' = AB$

$\Downarrow$

• různost bodů (= PROSTÉ) $A \neq B \iff A' \neq B'$

• kolineárnost bodů

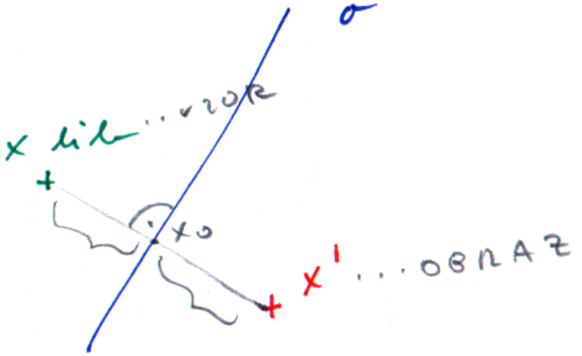


• odchylky přímek (= shodnost úhlů)

• obsahy / objemy

VII. POZN ... ZÁKLADNÍ shodnost v rovině

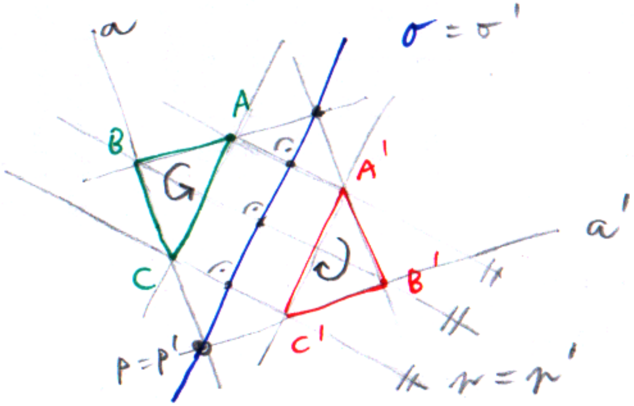
= OSOVÁ SOUMĚRNOST :.. určena **osou** : ↖ přímkou



a) $XX' \perp o$

b) $\overrightarrow{X_0X'} = -\overrightarrow{X_0X}$

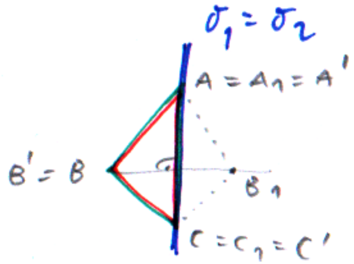
* VLASTNOSTI zřejmé :
  - shodnost ... $X'Y' = XY$ pro lib X, Y
  - involutivní ... $Y = X' \Leftrightarrow Y' = X$
  - o = přímka pevných bodů ... $X \in o \Leftrightarrow X' = X$
  - vzor / obraz v opačných polorovinách ⤳ NEPŘÍMÉ
  - $p' = p \Leftrightarrow p = o$ nebo $p \perp o$



- osa o = osa úseček XX' pro lib. X
- osa o = množina průsečíků $q \cap q'$ pro lib. $q \not\parallel o$

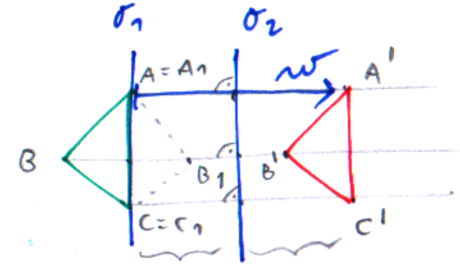
VII. POZN ... SKLÁDÁNÍ základních

* $\sigma_1 = \sigma_2$



IDENTITA

* $\sigma_1 \parallel \sigma_2$



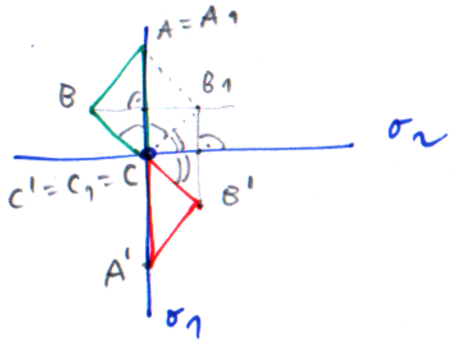
POSUNUTÍ

o vektor $\vec{w}$ ... $\vec{w} \perp \sigma_1, \sigma_2$

... $|\vec{w}| = |AA'|$

$= 2 \cdot$ vzdál σ_1, σ_2

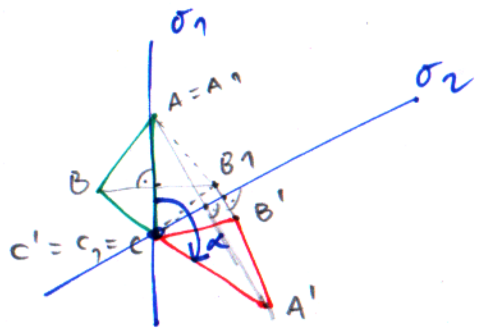
* $\sigma_1 \perp \sigma_2$



STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

se středem $S = \sigma_1 \cap \sigma_2$

* σ_1, σ_2 obecné



OTÁČENÍ

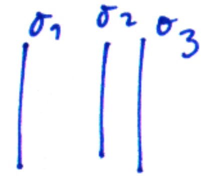
· se středem $S = \sigma_1 \cap \sigma_2$

· o úhel $\alpha = 2 \cdot$ úhel σ_1, σ_2

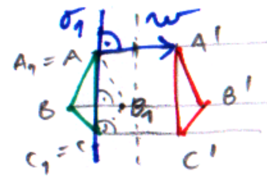
...

VII. POZN. ... SKLÁDÁNÍ základních (pokrač.)

* $\sigma_1 \parallel \sigma_2 \parallel \sigma_3$

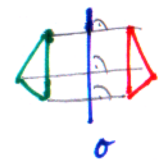


totéž, co



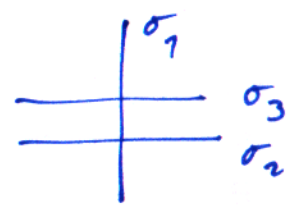
složení os. soum. σ_1 & posunutí $w \perp \sigma_1$

totéž, co

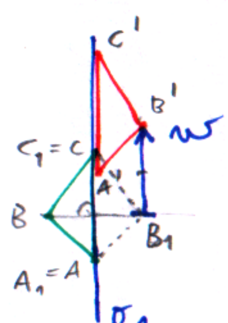


OSOVÁ SOUMĚRNOST s posunutou osou σ

* $\sigma_1 \perp \sigma_2, \sigma_2 \parallel \sigma_3$



totéž, co

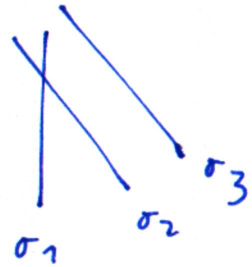


POSUNUTÁ SOUMĚRNOST určená osou σ_1 a vektorem $w \parallel \sigma_1$

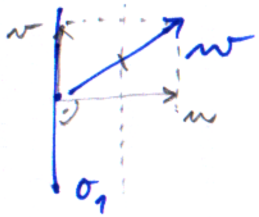
VII. POZN ... SKLÁDÁNÍ základních (pokrač.)

* $\sigma_2 \parallel \sigma_3$

σ_1 obecně

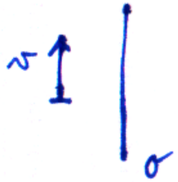


totéž, co



složení os. soum. σ_1 & posunutí $w = u + v$

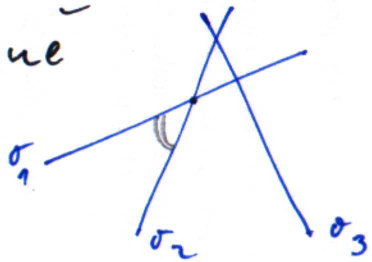
totéž, co



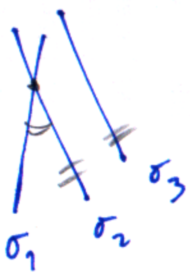
POSUNUTÁ SOUMĚRNOST

urč. osou σ a vektorem v

* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ obecně



totéž, co



, tj.

... POSUNUTÁ SOUMĚRNOST

VIII. PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

1. Posuňte se od podobných útvarů k podobným zobrazením, zformulujte základní a všechny další vlastnosti podobných zobrazení.

2. Popište základní podobná zobrazení v rovině, sestrojte obraz obecného bodu.

3. Vraťte obecné podobné zobr. zadané dvěma podobnými trojúhelníky:
   * vyjádřete toto zobrazení jako složení základních,
   * sestrojte obraz obecného bodu.

dim 2

4. ~~Vzpomeňte na všechny druhy podobností v rovině.~~

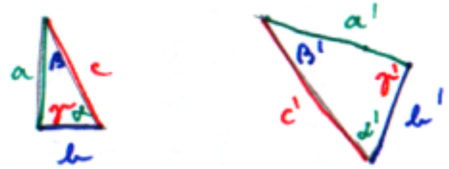
5. Zamyslete se nad obdobnými úkoly na přímce a v prostoru.

dim 1

dim 3

VIII. POZN

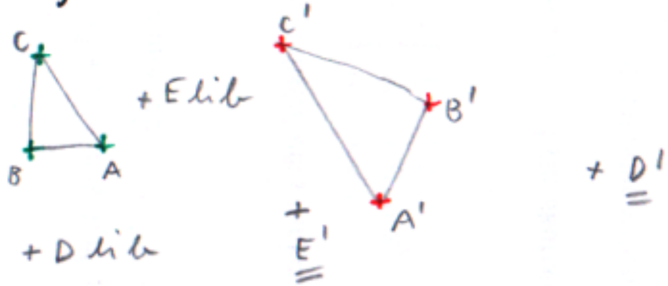
* PODOBNÉ TROJÚHELNÍKY (⇝ MNOHOÚHELNÍKY)
  ... po dvojicích SHODNÉ úhly a ÚMĚRNÉ strany:



$\alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = \gamma$

(*) $\boxed{a' : a = b' : b = c' : c}$ = koeficient podobnosti

* zákl. věta ⟹ stačí kontrolovat strany
* PODOBNOST trojúhelníků lze rozšířit do CELÉ roviny



⇝ PODOBNÉ ZOBRAZENÍ

* VLASTNOSTI

PODOBNÁ zobrazení zachovávají:

- POMĚRY VZDÁLENOSTÍ BODŮ ... viz (*)

⇓

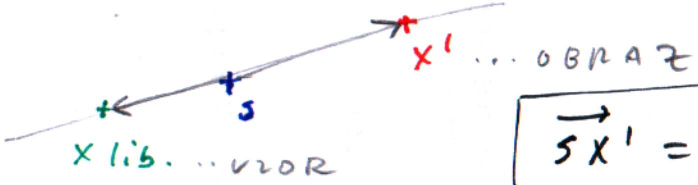
- různost bodů (PROSTÉ)
- kolineárnost
- odchylky přímek

VIII. POZN ... ZÁKLADNÍ PODOBNOST

= STEJNOLEHLOST ... určena středem ← bod S

a koeficientem ← $k \in \mathbb{R}$

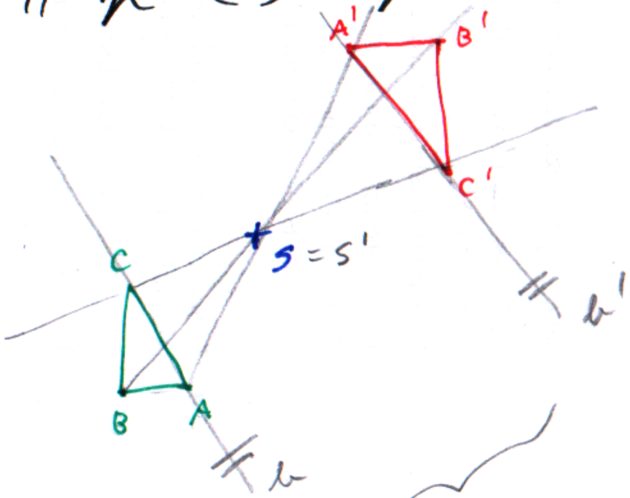
škálování



$$\boxed{\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}}$$

* VLASTNOSTI

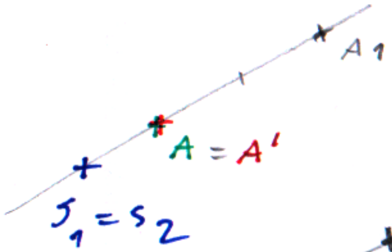
- S = pevný bod ... $S' = S$
- v rovině PŘÍMÉ zobr. ... zach. ORIENTACI
- ⊙ $p' = p \iff p$ prochází středem S
- ⊙ $p' \parallel p \iff p$ neprochází středem S



- střed S = spol. průsečík všech přímek XX' pro lib. X
- $k = -1 \rightsquigarrow$ STŘEDOVÁ SOUM.
- "střed v nekonečnu" $\rightsquigarrow$ POSUNUTÍ ($k = 1$)
- "osa v nekonečnu"

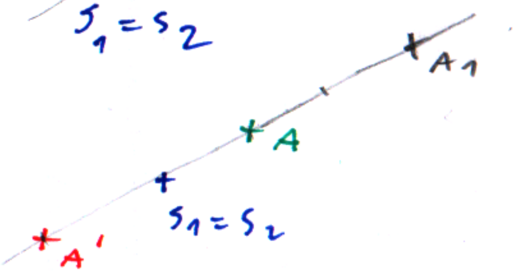
VIII. POZN ... skládání stejnolehlostí

* $S_1 = S_2$, $k_2 = 1/k_1$



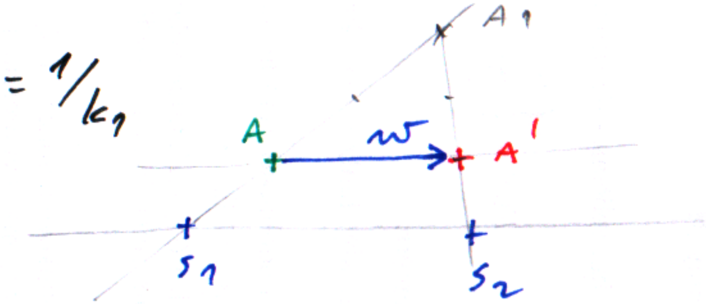
IDENTITA

* $S_1 = S_2$, $k_2 \neq 1/k_1$



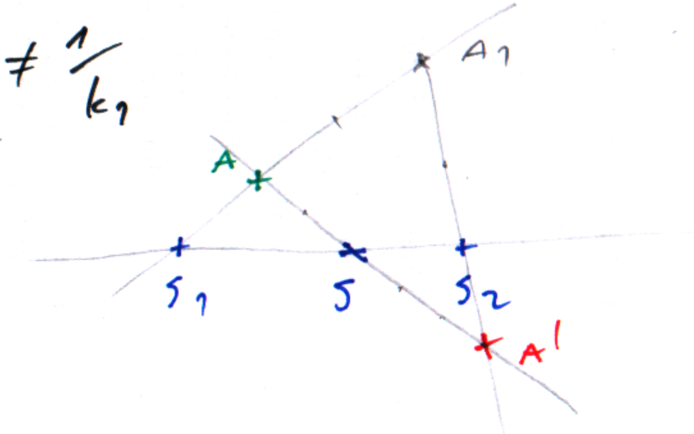
STEJNOLEHLOST se stejným středem a koef. $k = k_1 \cdot k_2$

* $S_1 \neq S_2$, $k_2 = 1/k_1$



POSUNUTÍ o vektor $w \parallel S_1S_2$

* $S_1 \neq S_2$, $k_2 \neq 1/k_1$



STEJNOLEHLOST se středem $S \in S_1S_2$ a koef. $k = k_1 \cdot k_2$

IX. AFINNÍ ZOBRAZENÍ

1. ~~Posuňte se od afinních útvarů k afinním zobrazením,~~ zformulujte základní a všechny další vlastnosti afinních zobrazení.

2. Popište základní afinní zobrazení v rovině, sestrojte obraz obecného bodu.

3. Uvažte obecné afinní zobr. zadané dvěma ~~afinními~~ trojúhelníky:
   * vyjádřete toto zobrazení jako složení základních,
   * sestrojte obraz obecného bodu.

dim 2

4. ~~Vzpomeňte na všechny druhy afinit v rovině.~~

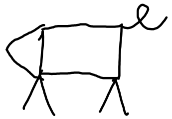
5. Zamyslete se nad obdobnými úkoly na přímce a v prostoru.

dim 1

dim 3

IX. POZN. ... ÚVOD

VZOR



OBRAZ

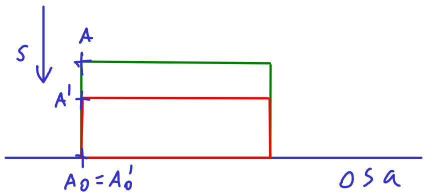
"otočené" — SHODNÉ

"zvětšené" — PODOBNÉ

"zmáčknuté" "nakloněné" — AFINNÍ

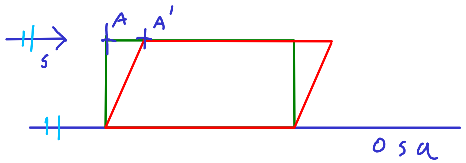
. . .

"zmáčknutí"



... škálování ve směru s v poměru $\overrightarrow{A_0A'} : \overrightarrow{A_0A}$ ... ozn. m

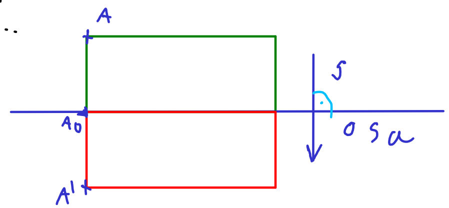
"naklonění"



... ve směru $s \parallel$ osou

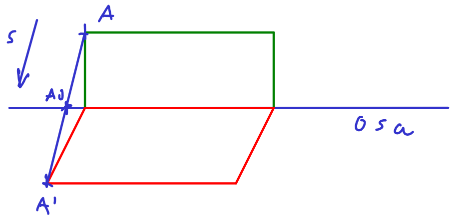
OBDOBNÉ PŘÍKLADY:

osová souměrnost



... směr $s \perp$ ose, poměr $m = -1$

"šikmá souměrnost"

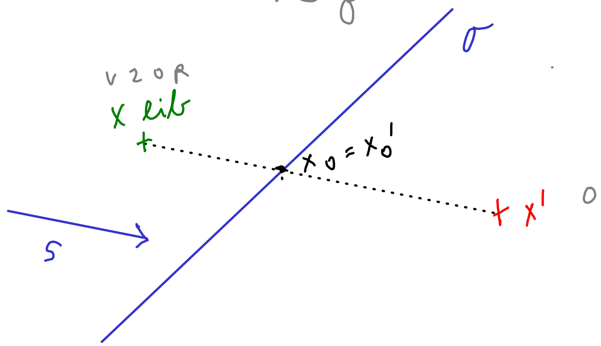


... směr obecný, poměr $m = -1$

IX. POZN ... ZÁKLADNÍ AFINNÍ v rovině

= OSOVÁ AFINITA (= škálování v JEDNOM směru)

... určena přímkou o, směrem s, koeficientem $m \in \mathbb{R}$ (modul)



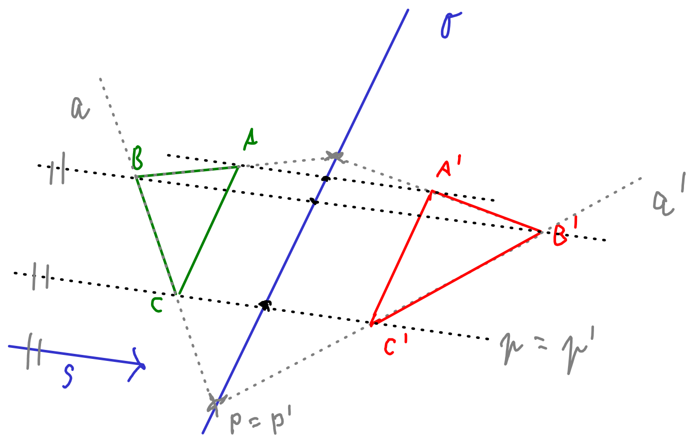
a) $XX' \parallel s$

b) $\overrightarrow{X_0X'} = m \cdot \overrightarrow{X_0X}$

$X_0 = XX' \cap o$

* VLASTNOSTI (zřejmé):
  - o = přímka pevných bodů
  - $p' = p \iff p = o$ nebo $p \parallel s$
  - přímé / nepřímé $\iff m > 0 \,/\, m < 0$
  - involutivní $\iff m = -1$
  - degenerované $\iff m = 0$

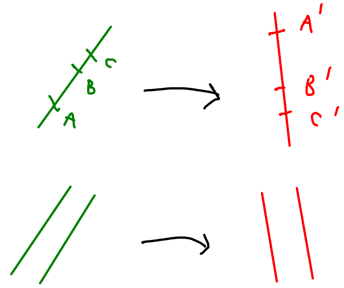
(rovnoběžné promítání do přímky)



- množina průsečíků $a \cap a'$ = OSA
- "spol. průsečík všech přímek XX'" = STŘED v nekonečnu"

IX. POZN ... VLASTNOSTI (další)

- kolineárnost
- poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů
- rovnoběžnost přímek



→ obecná **AFINNÍ** zobrazení zachovávají tyto vlastnosti (kdykoli to dává smysl).

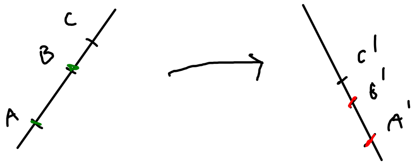
nemusí být PROSTÉ!

- * AFINNÍ zobr. v rovině určeno obrazem trojúhelníku ...
  ("každé dva trojúhelníky jsou AFINNÍ")
- * AFINNÍ zobr. v rovině je SLOŽENÍM základních ...

ÚKOL $\boxed{č. 5}$

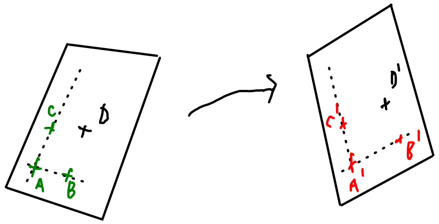
IX. POZN. . . . INDUKCE

dim $\boxed{1}$



- AFINNÍ $\Leftarrow\!\Rightarrow$ zach. poměry trojic bodů $\Leftarrow\!\Rightarrow$ PODOBNÉ
- určeno obrazy $\boxed{2}$ bodů*

dim $\boxed{2}$



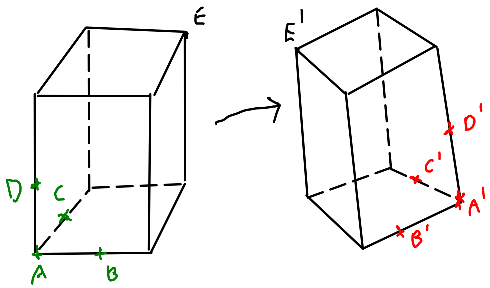
- AFINNÍ $\Leftarrow\!\Rightarrow$ zach. poměry trojic kolin. bodů . . .

$\Uparrow$

zach. poměry trojic lib. bodů $\Leftarrow\!\Rightarrow$ PODOBNÉ

- určeno obrazy $\boxed{3}$ bodů*

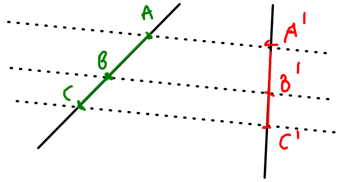
dim $\boxed{3}$

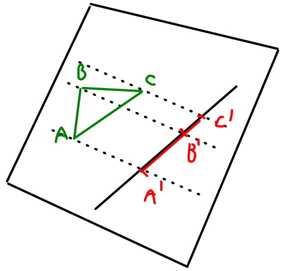


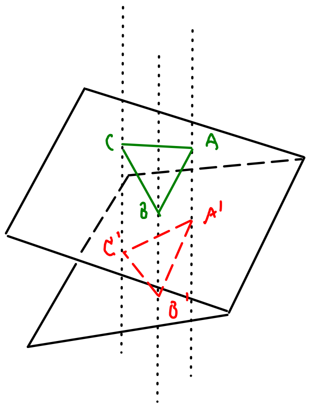
- AFINNÍ . . . . . . $\Leftarrow$ . . . . . PODOBNÉ
- určeno obrazy $\boxed{4}$ bodů*

* . . . v obecné poloze

$\underline{\text{IX}}$. POZN … ROVNOBĚŽNÉ PROMÍTÁNÍ







etc.

- může i nemusí být PROSTÉ
- je vždy AFINNÍ

(někdy též PODOBNÉ, SHODNÉ)

X. PROJEKTIVNÍ ZOBRAZENÍ

1. ~~Posuňte se od projektivních útvarů k projektivním zobrazením,~~ zformulujte základní a všechny další vlastnosti projektivních zobrazení.

2. Popište základní projektivní zobrazení v rovině, sestrojte obraz obecného bodu.

3. Uvažte obecné projektivní zobr. zadané dvěma ~~projektivními~~ čtyřúhelníky:
   * vyjádřete toto zobrazení jako složení základních,
   * sestrojte obraz obecného bodu.

4. ~~Vzpomeňte na všechny druhy projektivit v rovině.~~ dim 2

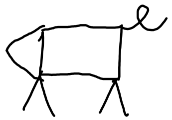
5. Zamyslete se nad obdobnými úkoly na přímce a v prostoru.

dim 1

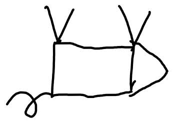
dim 3

X. POZN... ÚVOD

VZOR

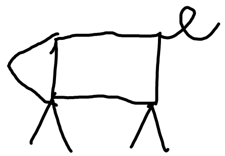


OBRAZ



"otočené"

SHODNÉ

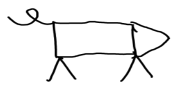


"zvětšené"

PODOBNÉ

"nakloněné"

EKVI-



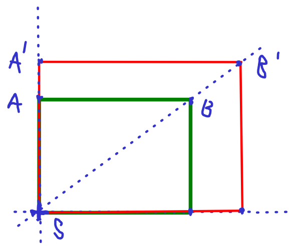
"zmáčknuté"

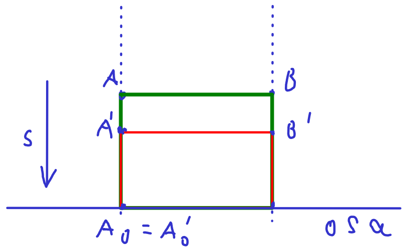
AFINNÍ

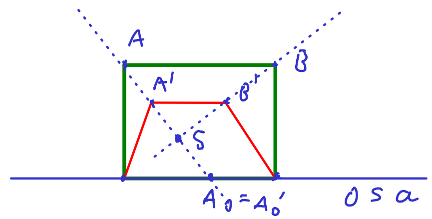
"perspektiva"

PROJEKTIVNÍ

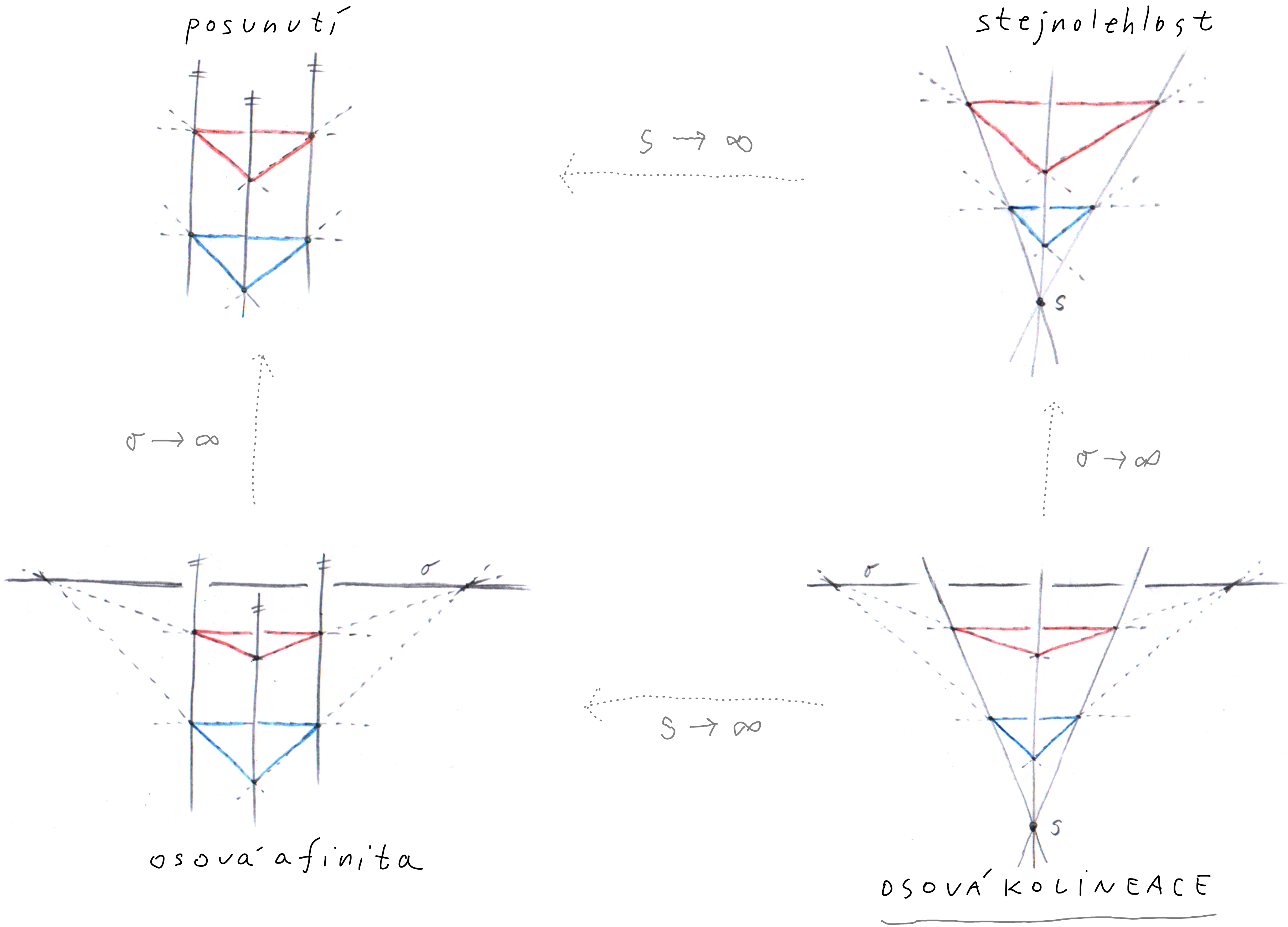
ZÁKLADNÍ





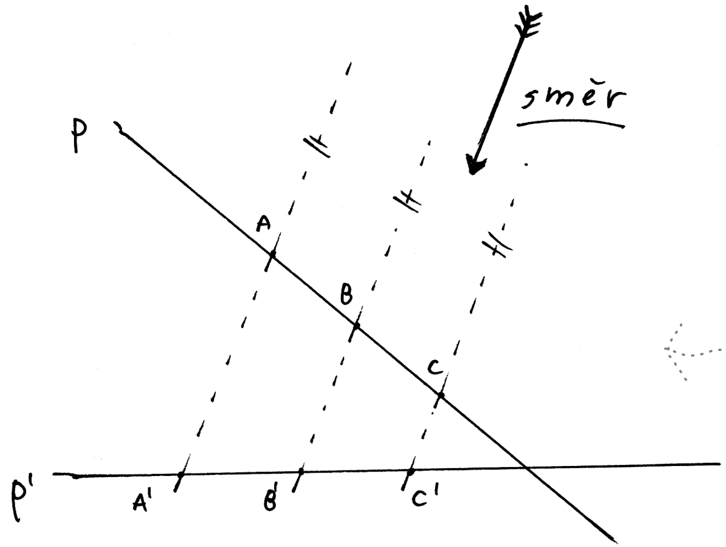


X. POZN ... ZÁKLADNÍ SOUVISLOSTI

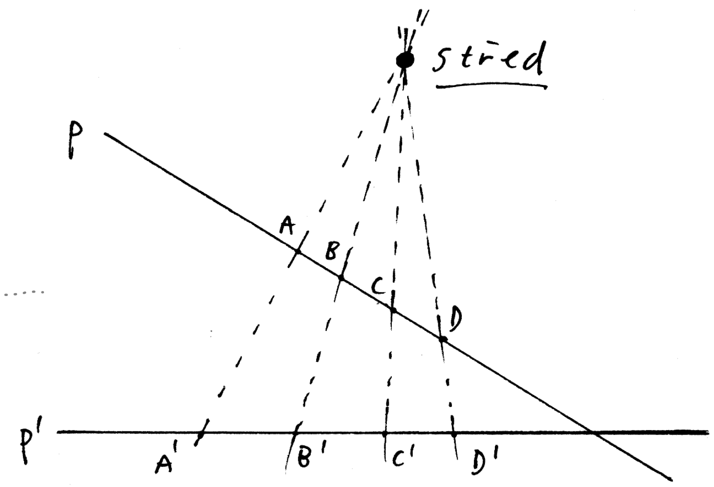


[viz větu DESARGUESOVU]

X. POZN … ZÁKLADNÍ SOUVISLOSTI



S → ∞



rovnoběžné promítání

STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

zachovává

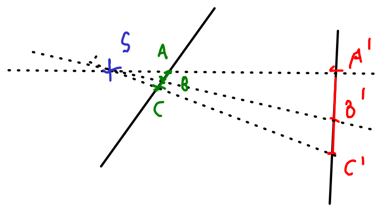
poměry trojic bodů

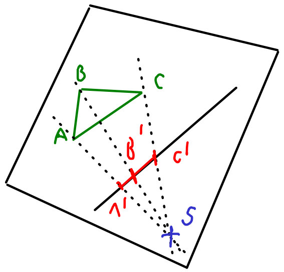
"dvojpoměry" čtveřic bodů

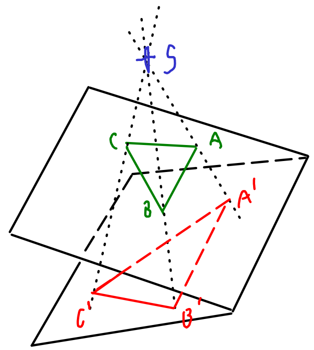
[podobné △]

[věta PAPPOVA]

X. POZN ... STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ (= PROJEKCE)







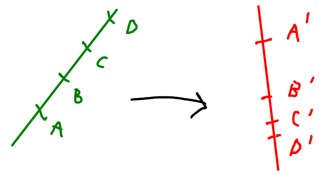
etc.

- může i nemusí být PROSTÉ
- je vždy PROJEKTIVNÍ !

(někdy též AFINNÍ, PODOBNÉ, SHODNÉ)

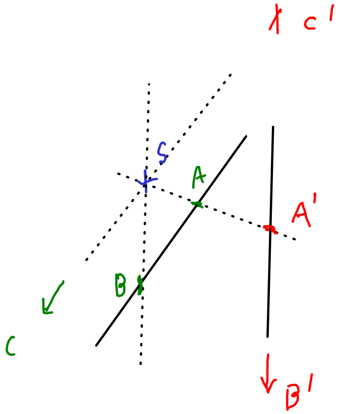
⟶ obecná PROJEKTIVNÍ zobrazení zachovávají

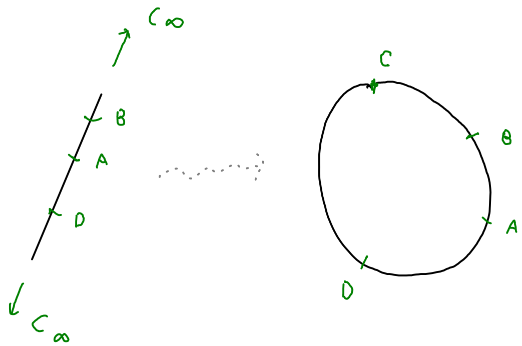
- kolinearnost
- dvojpoměry vzdáleností čtveřic kolineárních bodů



X. POZN ... POZOR

* třeba rozšířit o "body v NEKONEČNU" (⇝ úběžníky, úběžnice, ...)
* USPOŘÁDÁNÍ, resp. ORIENTACE nedávají po rozšíření smysl!
* DVOJPOMĚR $(ABCD) \longrightarrow$ obyč. POMĚR $\vec{AC} : \vec{BC}$, pro $D \longrightarrow \infty$





$$\underbrace{\lim_{D\to\infty} \frac{\vec{AD}}{\vec{BD}} = 1}$$

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\vec{AC}}{\vec{BC}} : \frac{\vec{AD}}{\vec{BD}} = \frac{\vec{AC}}{\vec{BC}}$$

DÁLE:

* PROJEKTIVNÍ zobr. v rovině určeno obrazem čtyřúhelníku ...
("každé dva čtyřúhelníky jsou PROJEKTIVNÍ")

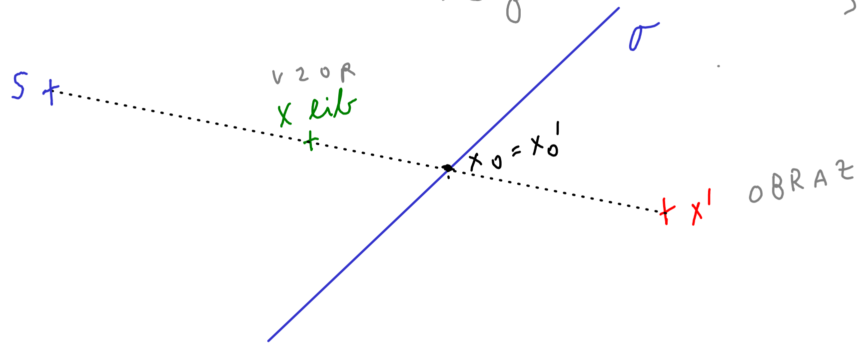
* PROJEKTIVNÍ zobr. v rovině je SLOŽENÍM základních ...

X. POZN … ZÁKLADNÍ PROJEKTIVNÍ v rovině

= OSOVÁ (středová) KOLINEACE

… určena přímkou, středem, koeficientem

σ … přímkou; S … středem; $m \in \mathbb{R}$ (modul) … koeficientem



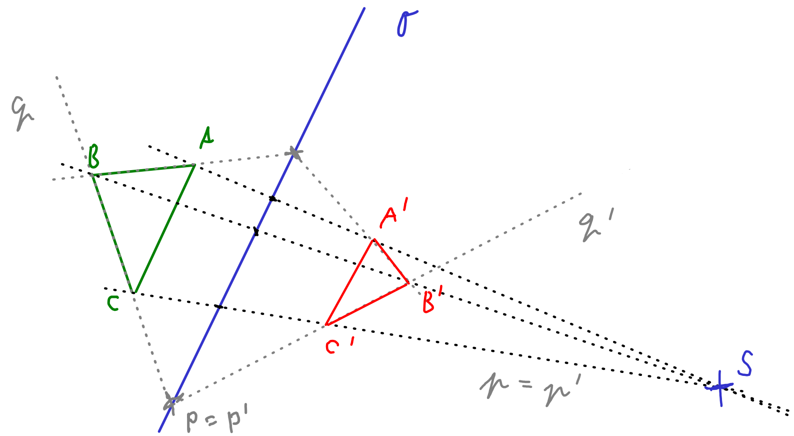
a) $XX' \ni S$

b) dvojpoměr $(X'XX_0S) = m$

$X_0 = XX' \cap \sigma$

* VLASTNOSTI (zřejmé):
  - σ = přímka pevných bodů
  - S = pevný bod
  - $p' = p \iff p = \sigma$ nebo $p \ni S$
  - involutivní $\iff m = -1$
  - degenerované $\iff m = 0$

(středové promítání do přímky)



- množina průsečíků $q \cap q'$ = OSA
- spol. průsečík všech přímek XX' = STŘED

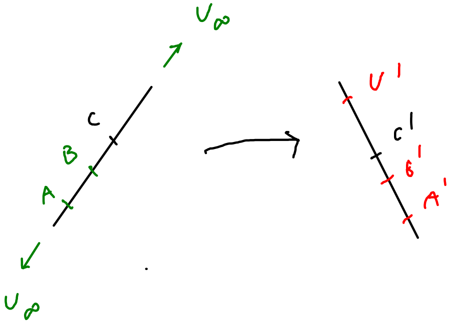
X. POZN. ... INDUKCE

• PROJEKTIVNÍ $\Leftarrow$ zach. dvojpoměry čtveřic bodů

$\Uparrow$

zach. poměry trojic bodů $\Longleftrightarrow$ AFINNÍ

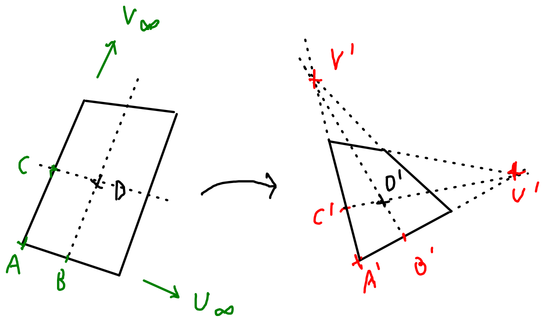
dim $\boxed{1}$



• určeno obrazy $\boxed{2}$ bodů* + $\boxed{1}$ úběžník

resp. $\boxed{3}$ bodů**

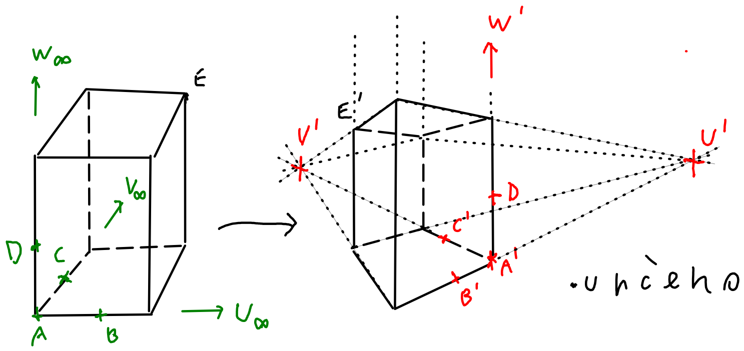
dim $\boxed{2}$



• určeno obrazy $\boxed{3}$ bodů* + $\boxed{2}$ úběžníky

resp. $\boxed{4}$ bodů**

dim $\boxed{3}$



• určeno obrazy $\boxed{4}$ bodů* + $\boxed{3}$ úběžníky

resp. $\boxed{5}$ bodů**

* ... v obecné poloze

** ... v "dost." obecné poloze

XI. PROSTOROVÉ ÚLOHY

1. Sestrojte projektivní, resp. afinní obrazy pár pravidelných mnohoúhelníků.

2. Sestrojte projektivní, resp. afinní obrazy pár pravidelných jehlanů a hranolů.

3. Sestrojte řez jehlanu / hranolu rovinou určenou třemi body.

4. Upřesněte zadání a sestrojte mnohoúhelník řezu 3 ve skutečné velikosti.

5. Uvědomte si možnosti dosavadních postupů a uvažte dostupné vychytávky . . .

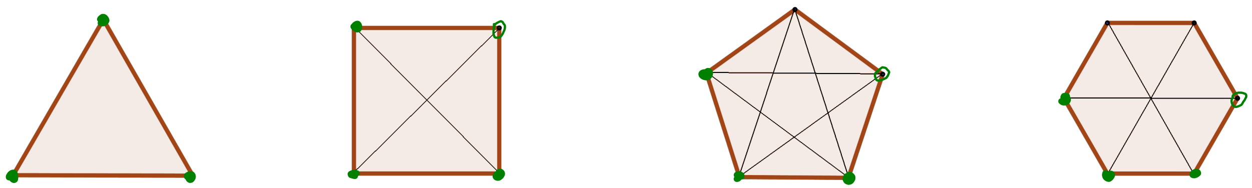
viz XII.

ÚKOLY č. $\boxed{6 - 8}$

XI. POZN. . . OBRAZY PRAVIDELNÝCH MNOHOÚHELNÍKŮ

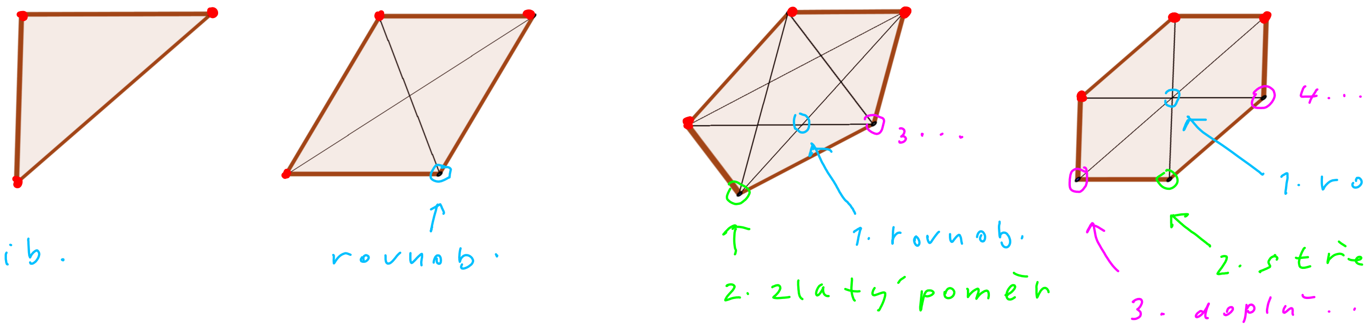
(A) "**volně**" . . . obrazy pár bodů:

(• originály



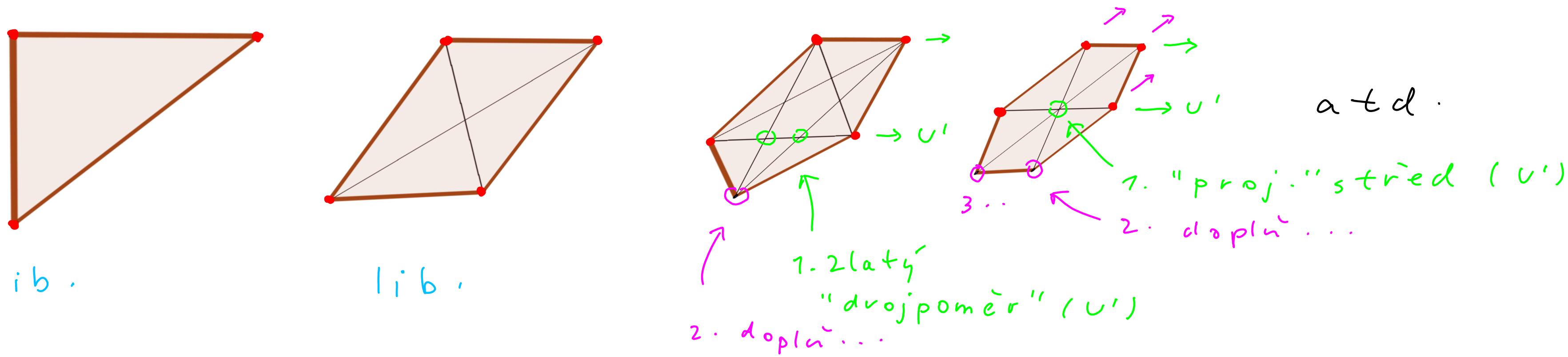
atd.)

• afinní obrazy



atd.

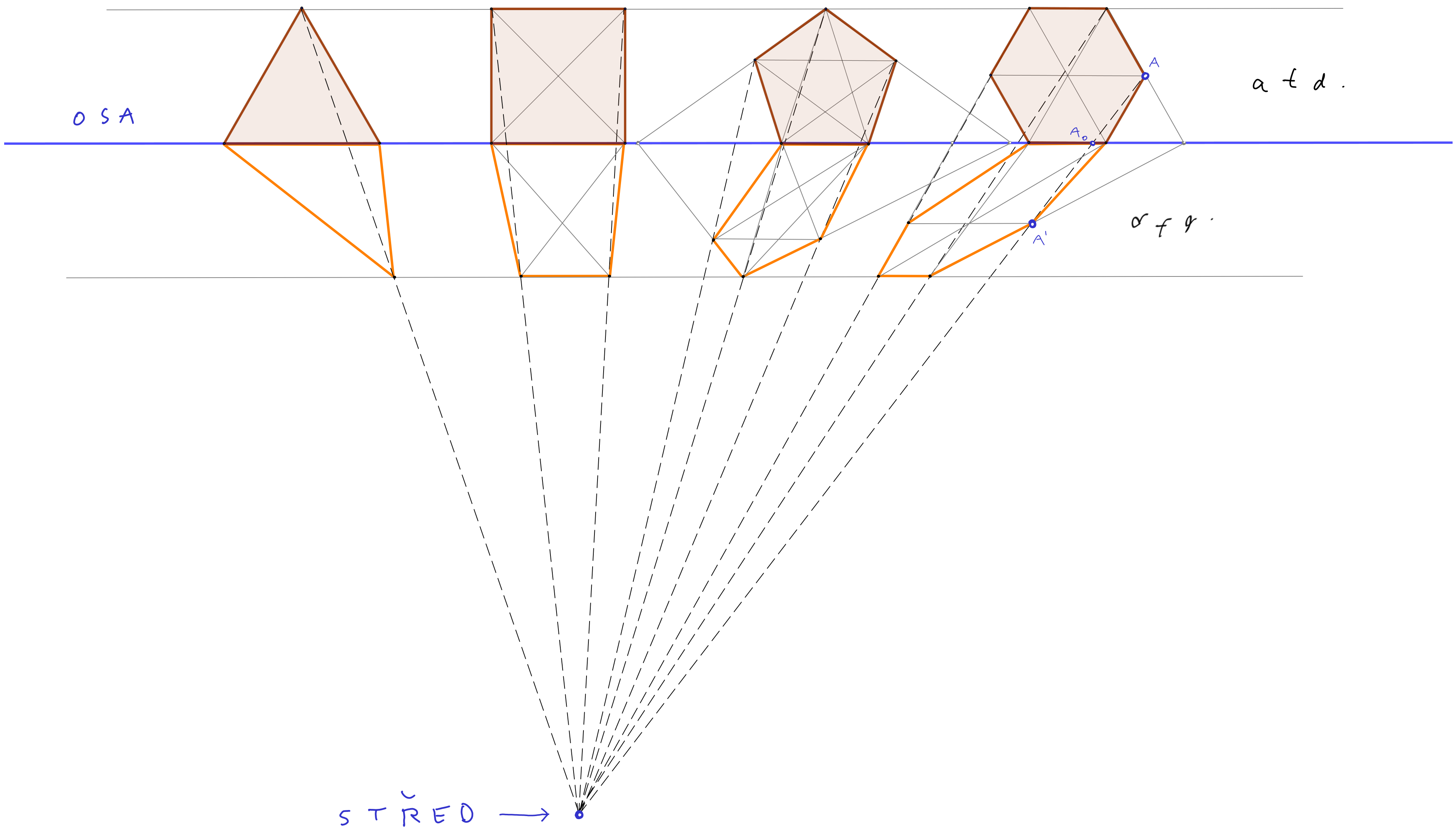
• projektivní obrazy



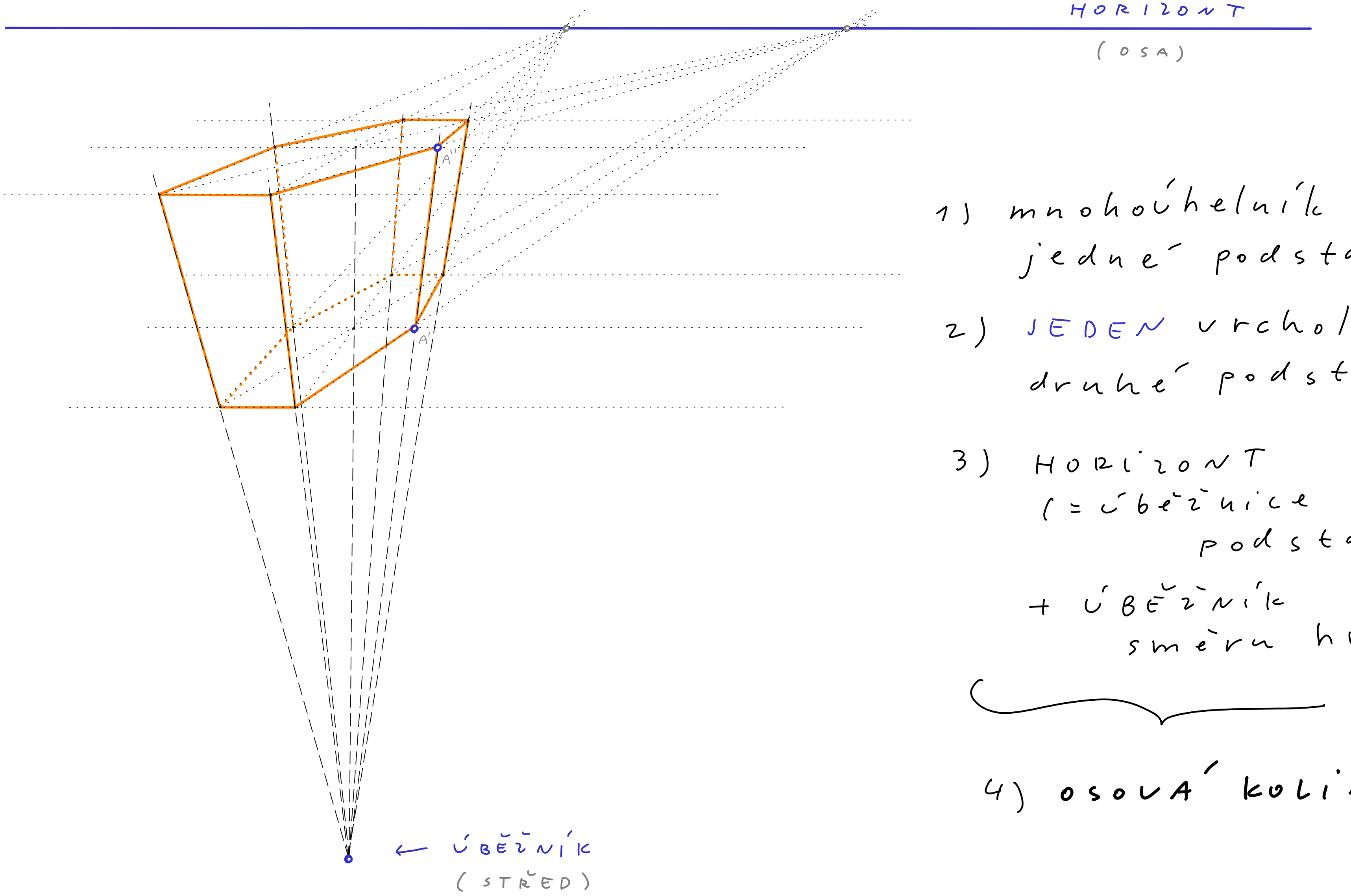
atd.

XI. POZN ... OBRAZY PRAVIDELNÝCH MNOHOÚHELNÍKŮ

(B) základní transformace ... osová kolineace :



XI. POZN. . . OBRAZ PRAVIDELNÉHO HRANOLU



1) mnohoúhelník jedné podstavy (A' . . .)

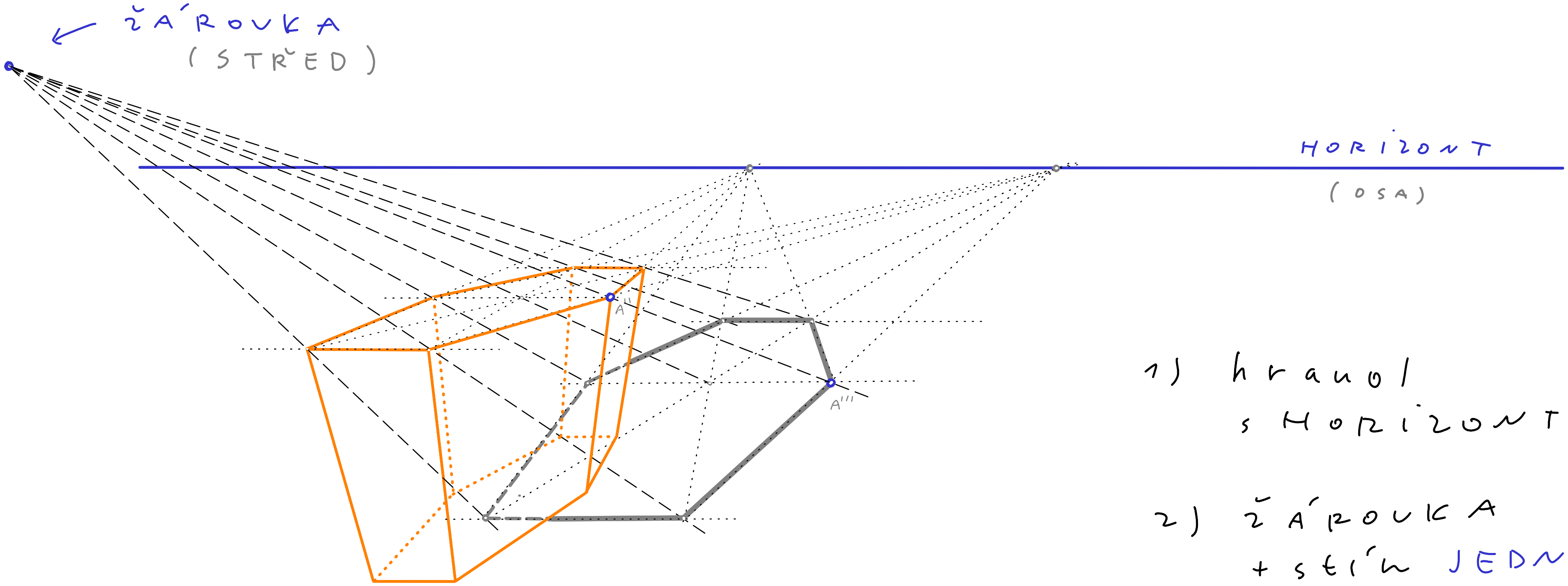
2) JEDEN vrchol druhé podstavy (A'')

3) HORIZONT (= úběžnice rovin podstav)

+ ÚBĚŽNÍK směru hran

4) OSOVÁ KOLINEACE

XI. POZN ... STÍN PRAVIDELNÉHO HRANOLU

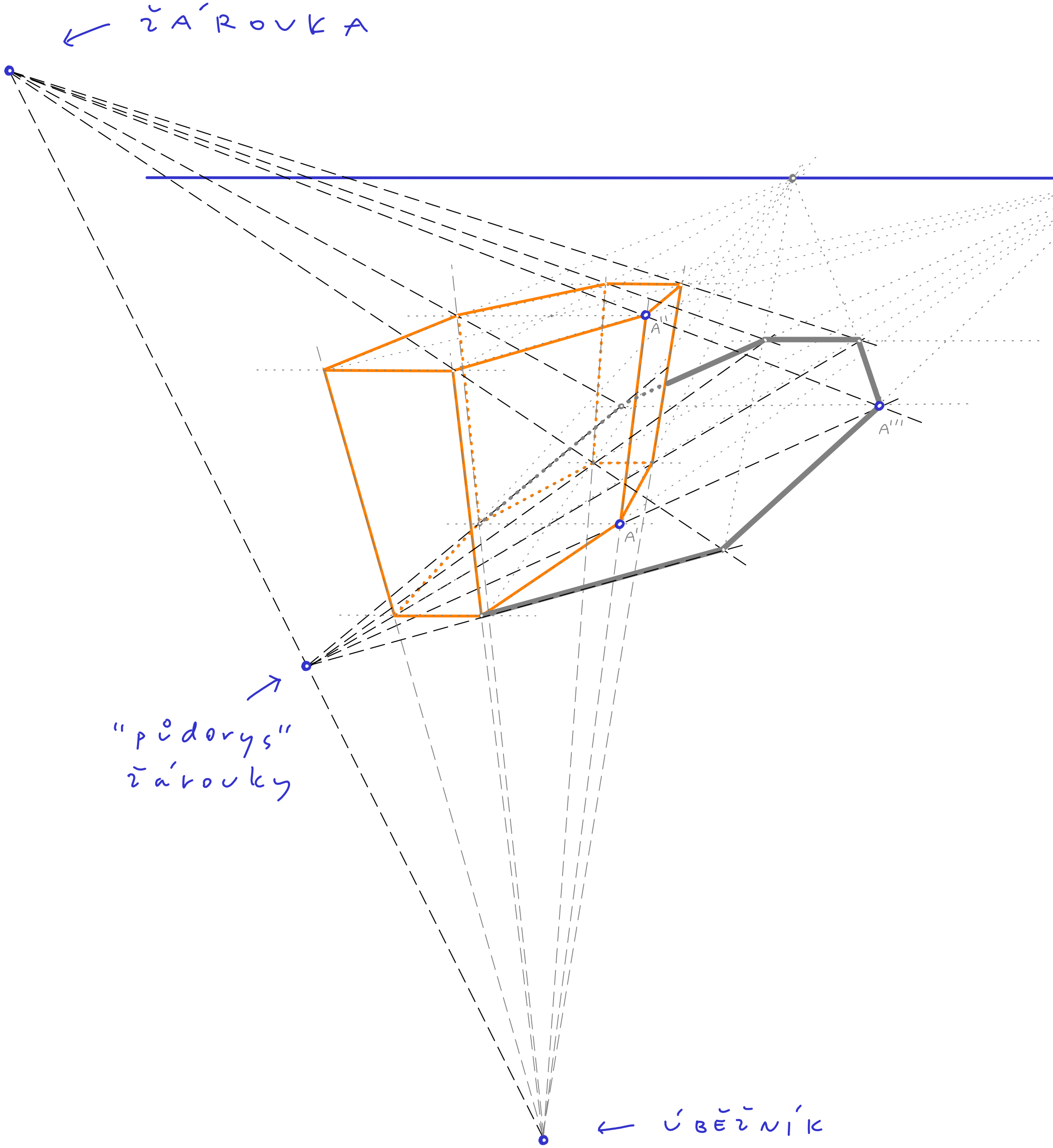


1) hranol
s HORIZONTEM ...

2) ŽÁROVKA
+ stín JEDNOHO bodu
(A''')

3) OSOVÁ KOLINEACE

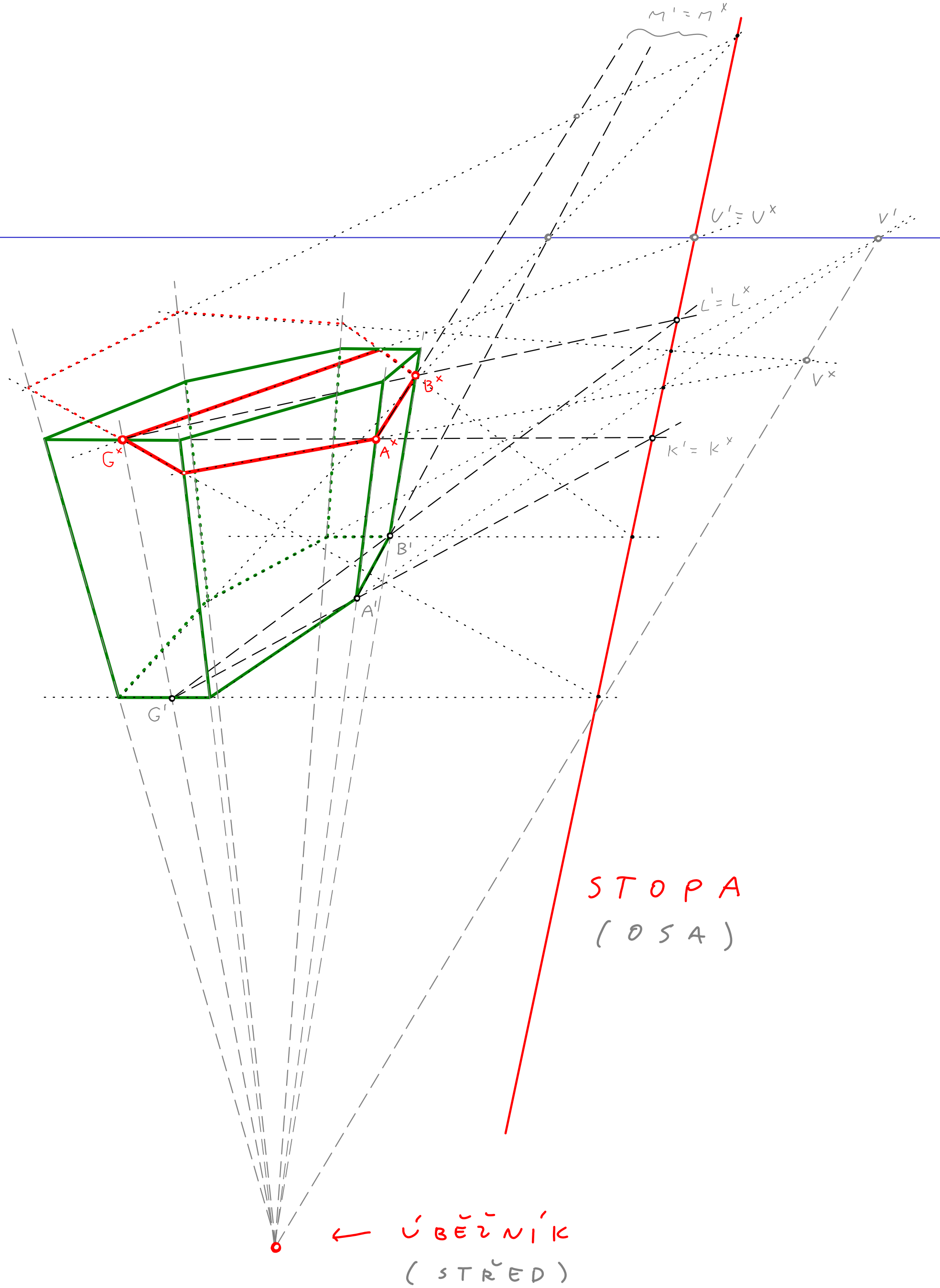
XI. POZN ... STÍN PRAVIDELNÉHO HRANOLU



úplná STEREOMETRICKÁ interpretace ...

... OSOVÝCH KOLINEACÍ tu je více!

XI. POZN ... ŘEZ PRAVIDELNÉHO HRANOLU



1) hranol s horizontem a úběžníkem směru hran

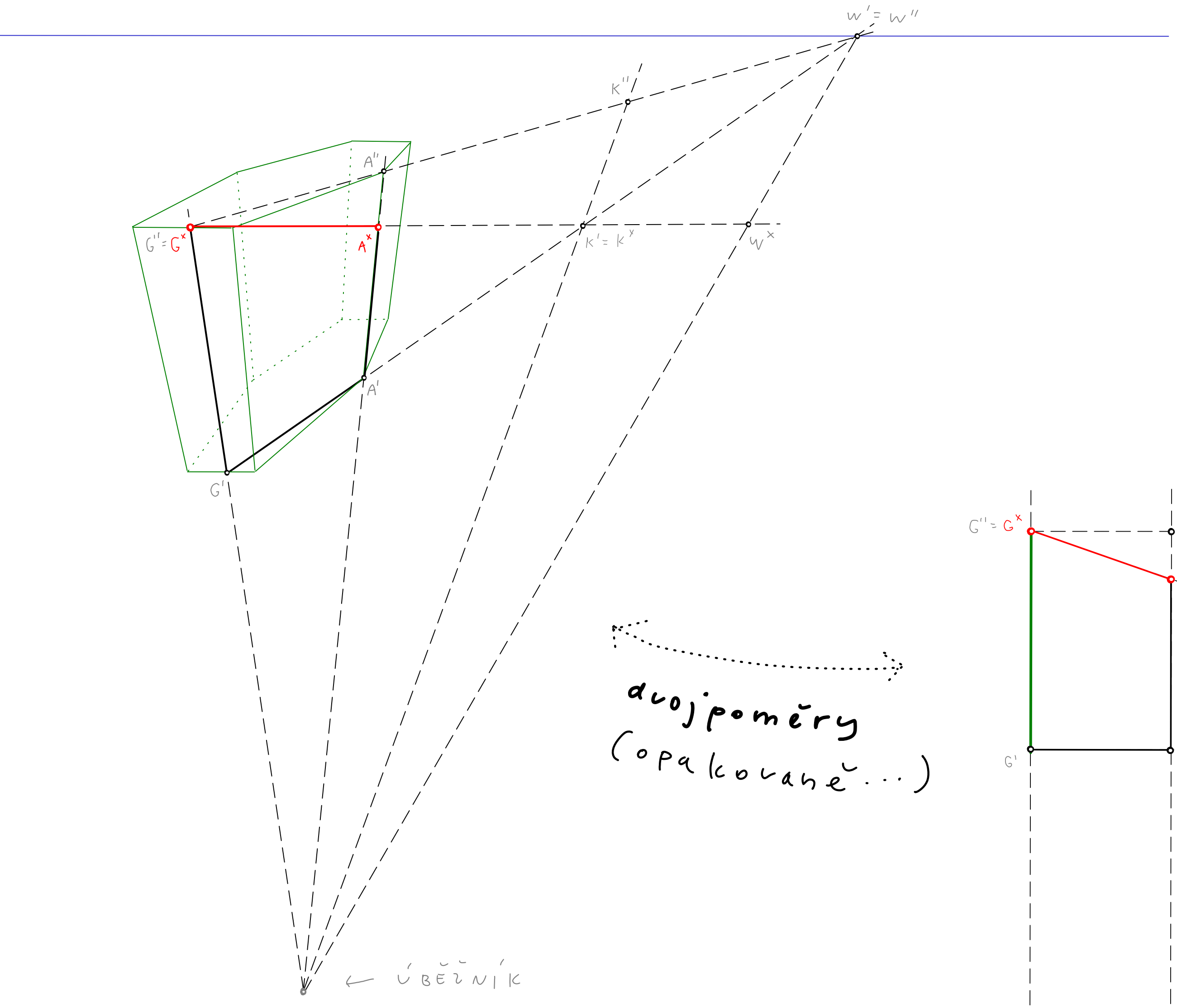
2) Rovina určená třemi body (A^x, B^x, G^x)

3) STOPA pomocí tří dvojic přímek (K, L, M)

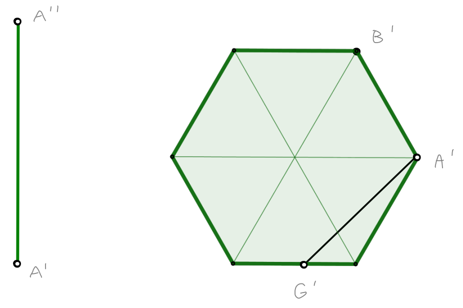
4) osová kolineace

XI. POZN ... MĚŘENÍ (velikost úsečky)

OBECNÝ PRŮMĚT

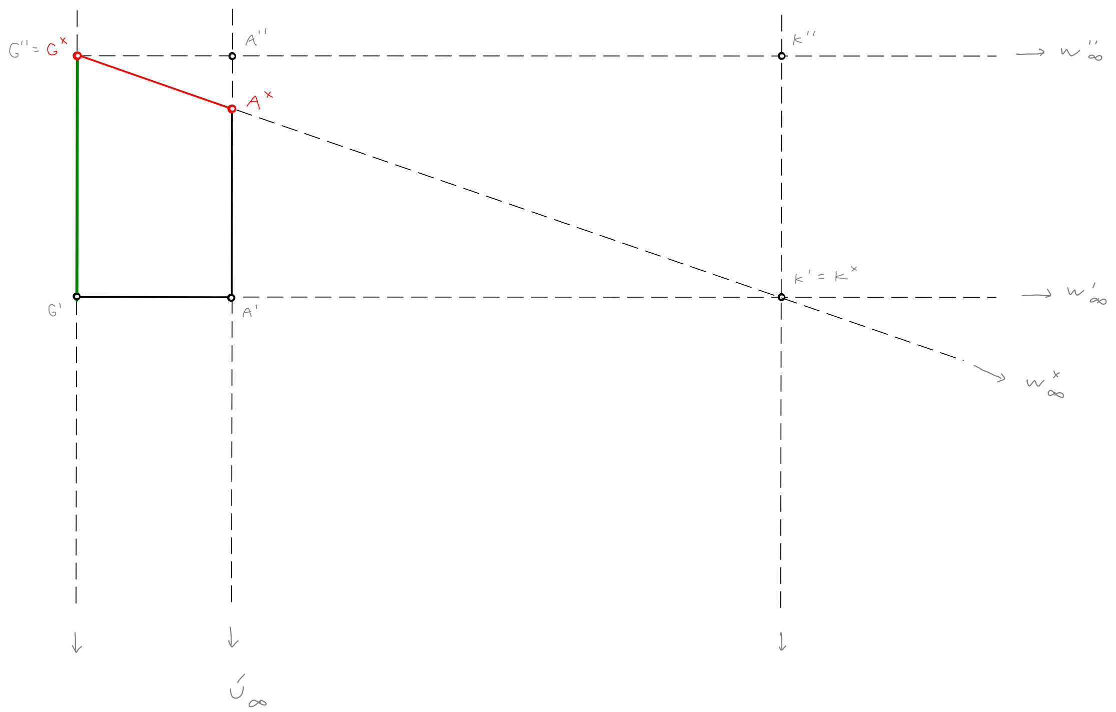


UPŘESNĚNÍ

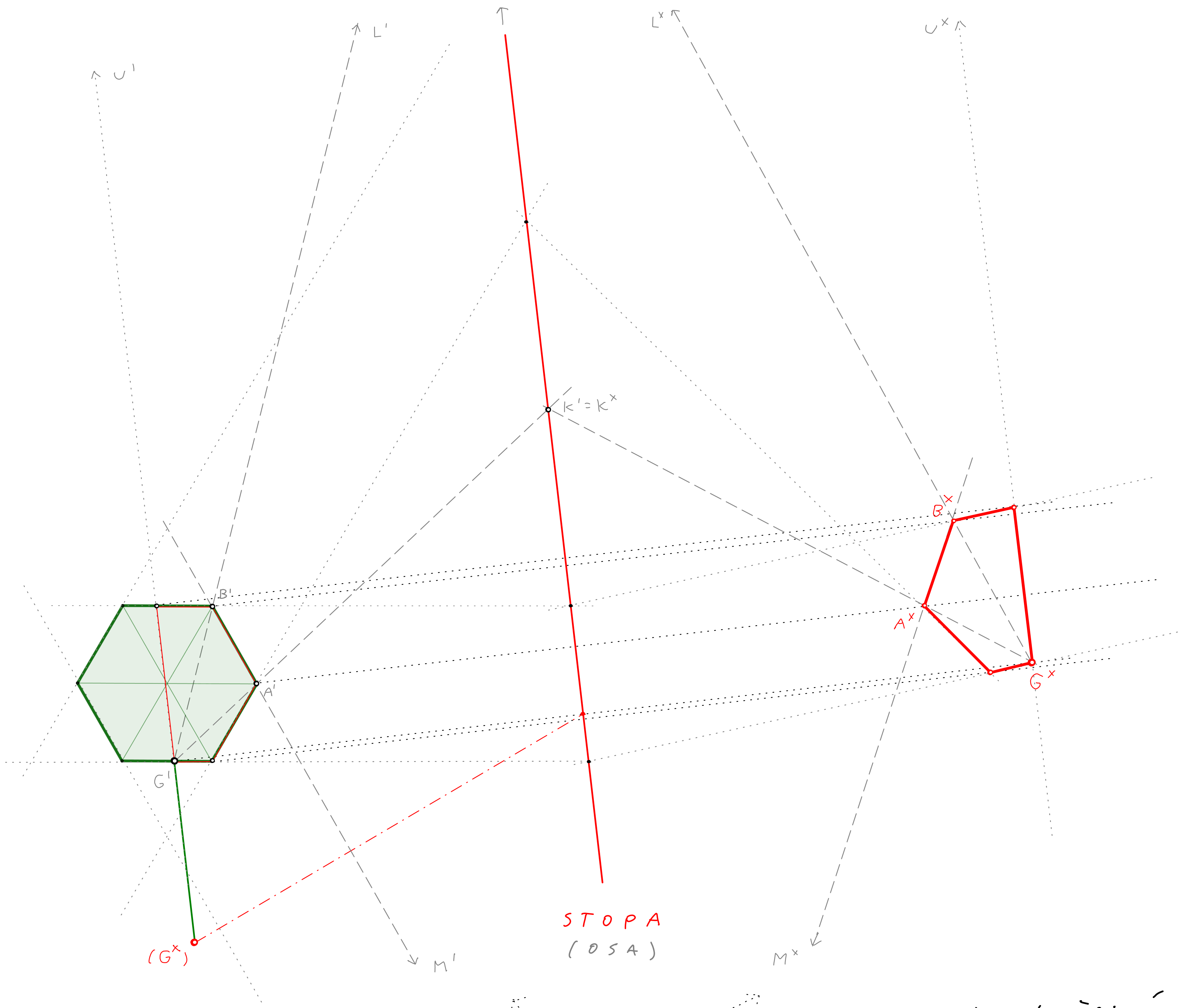


dvojpoměry (opakované...)

SKUTEČNÉ VZTAHY



XI. POZN ... MĚŘENÍ (otočení roviny)



PŮDORYS

SKUTEČNÝ
(OTOČENÝ)
OBRAZ

2) OSOVÁ AFINITA

1) otočení JEDNOHO bodu (G^x)

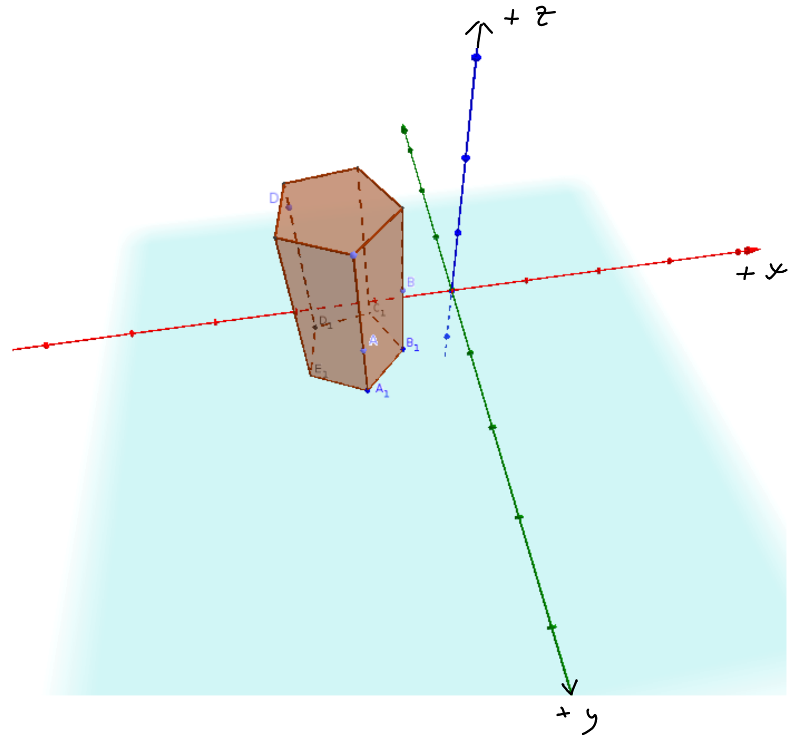
XII. PROSTOROVÉ ÚLOHY JINAK

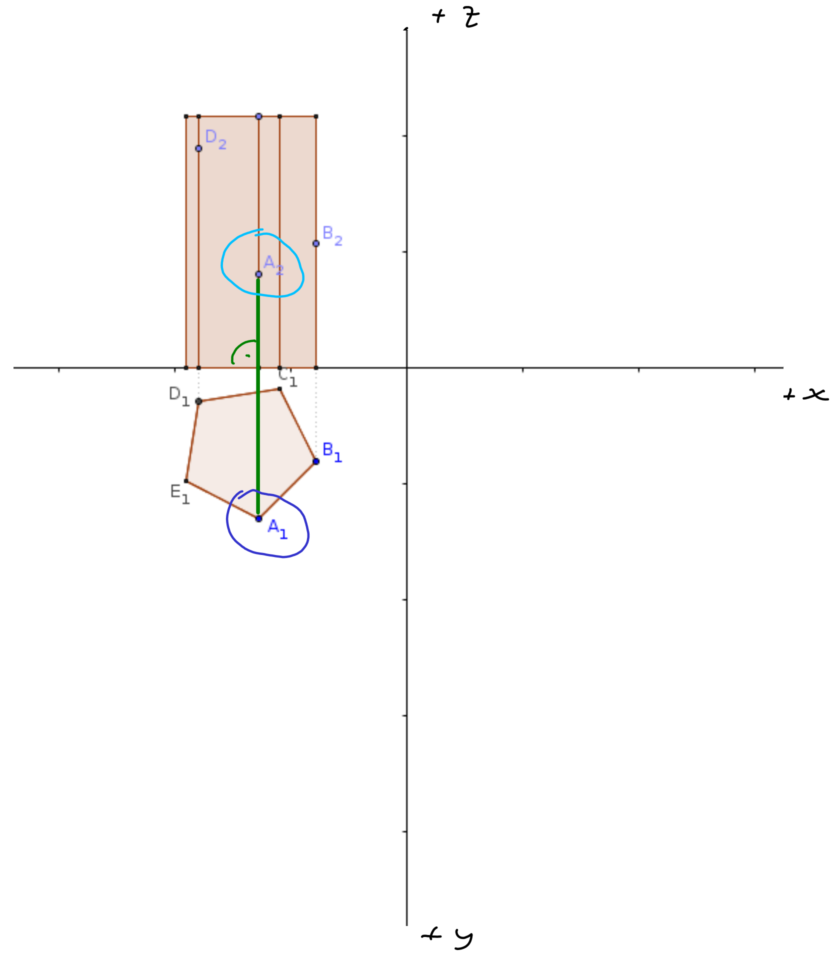
1. Přeložte úlohy s řezy a měřením do řeči sdružených (Mongeových) průmětů.

2. V tomto duchu vyražte objekt σ, rovinu ρ a bod S.
   Sestrojte (vázaný) průmět objektu σ z bodu S do roviny ρ.

3. Uvědomte si pro a proti jednotlivých nápadů ...

XII. POZN... SDRUŽENÉ PRŮMĚTY





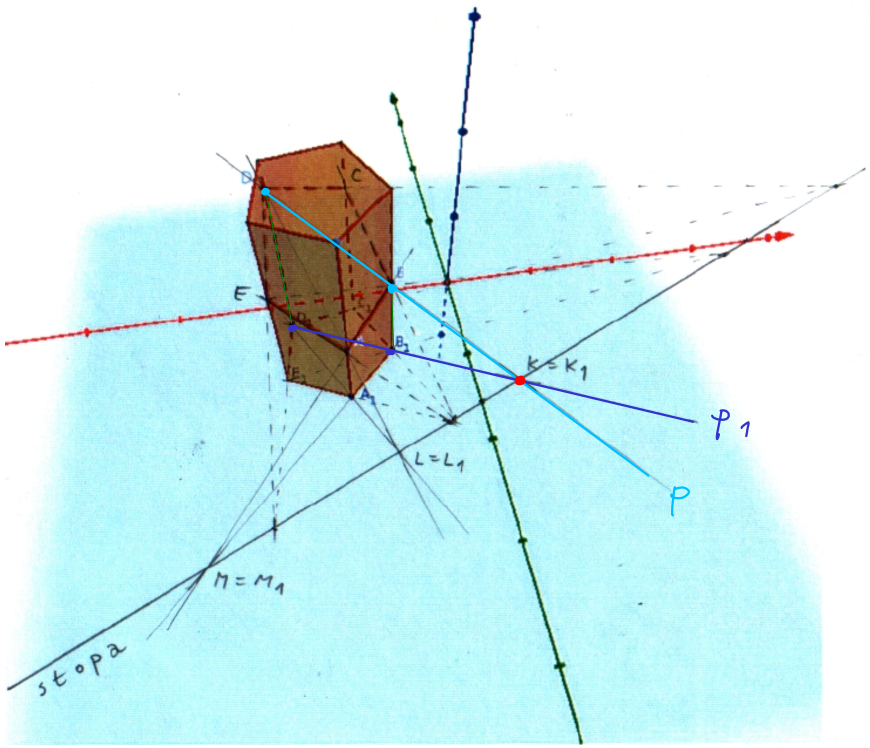
0) pomocná kolmá "souř." soustava (x, y, z)

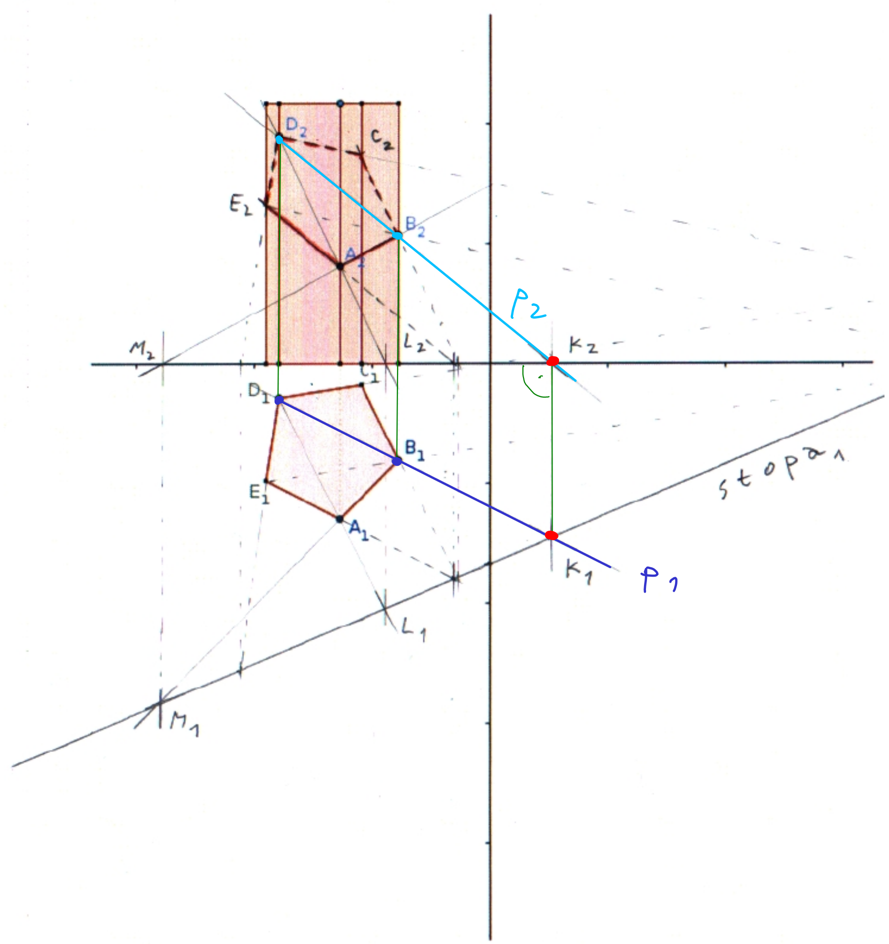
1) "půdorys" = kolmý průmět do roviny "x y"

2) "nárys" = kolmý průmět do roviny "x z"

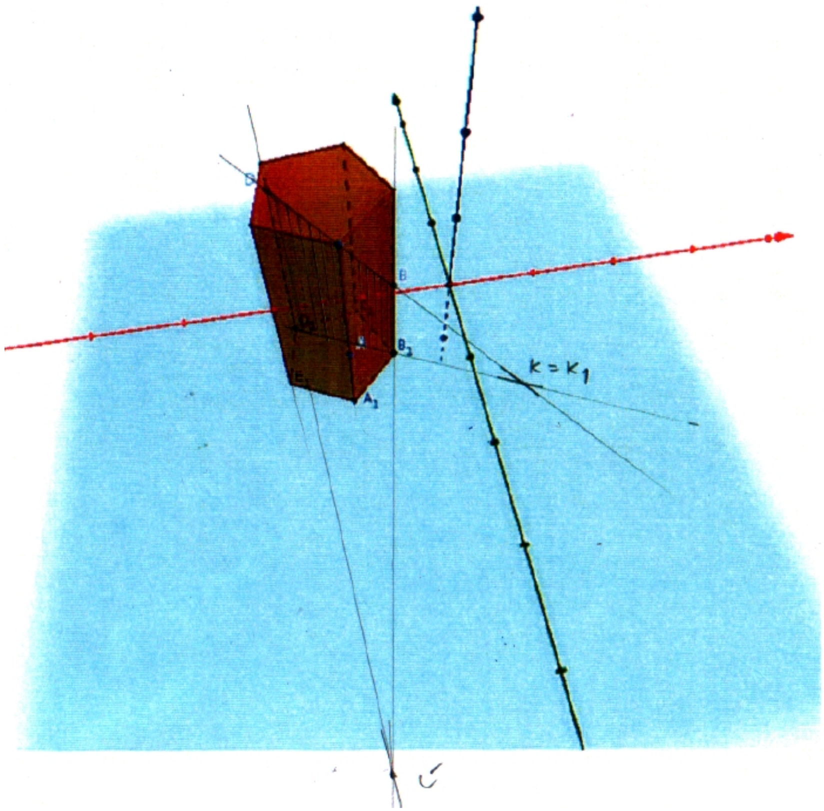
3) **SDRUŽENOST** = vzhledem k "souř. x"

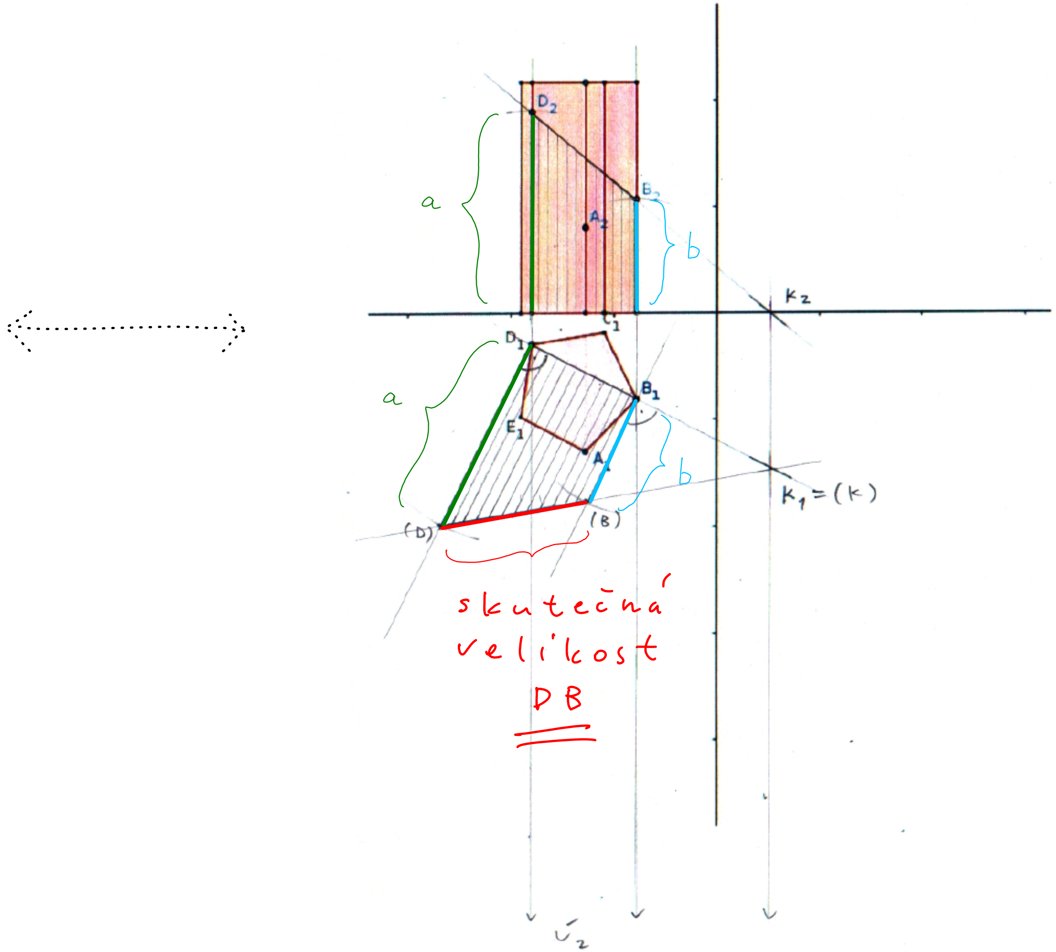
XII. POZN . . . ŘEZ HRANOLU



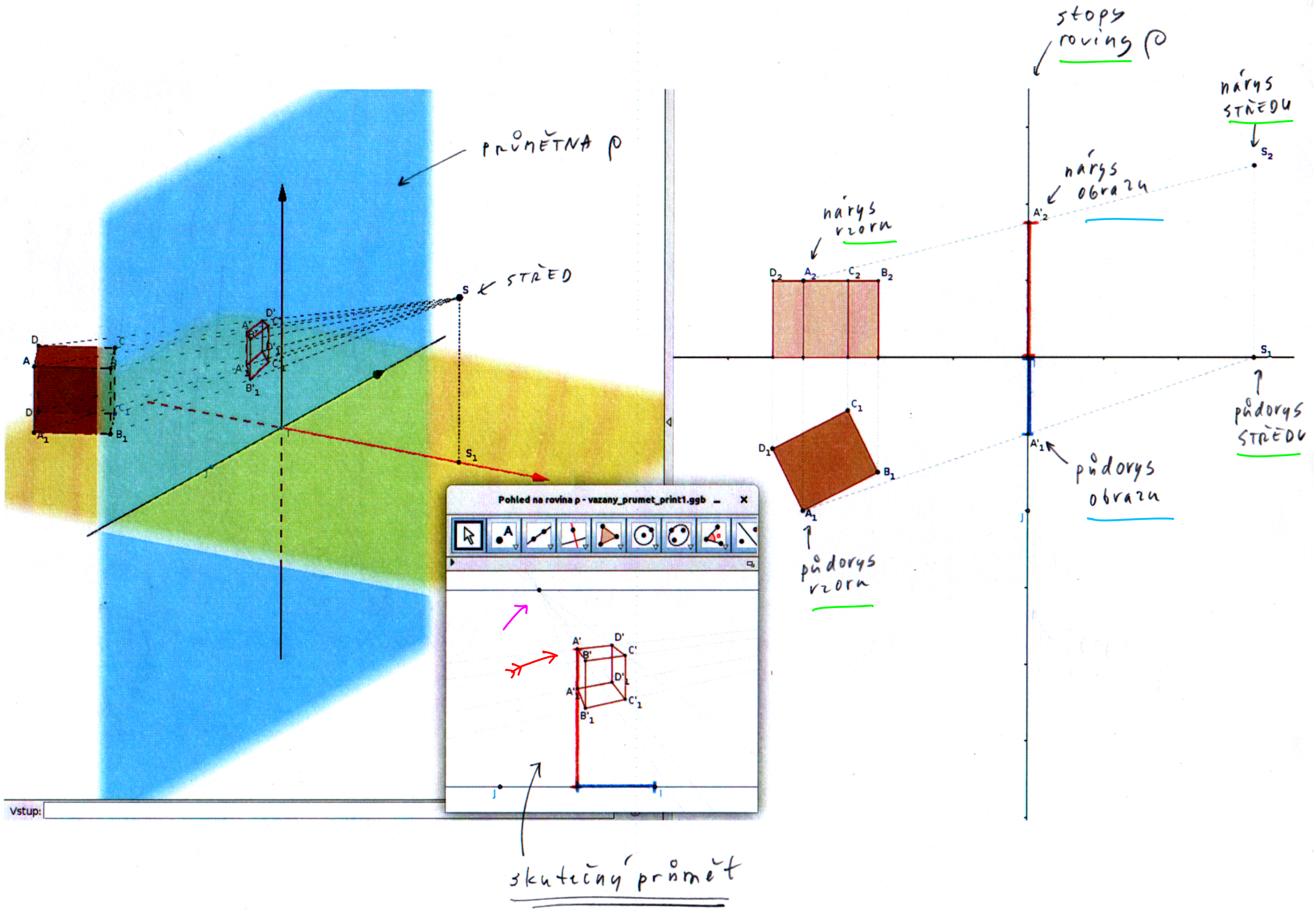


XII. POZN ... MĚŘENÍ





XII. POZN. . . VÁZANÉ ZOBRAZOVÁNÍ



0) vázané zadání (vzor A, střed S, rovina ρ)

1) sdružené průměty obrazu (A_1', A_2') . . . pro SPEC. ρ snadné

2) skutečný průmět (A') . . . přenášení VZDÁLENOSTÍ

3) další užitečná data . . . úběžníky apod.