

---

## Předmluva

---

*Omnia sponte fluant, absit violentia rebus!*

J.A.K.

Toto je průvodce přednáškou z Konstruktivní geometrie. První motivace, předpoklady a cíle tohoto kurzu jsou zformulovány v úvodní kapitole. Probíraná látka je rozčleněna do tří hlavních bloků: klasická konstruktivní geometrie, přehled užitečných geometrických zobrazení a úvod do zobrazovacích metod. Stručné shrnutí celého semestru najdete na str. 149–156.

Z dostupných učebnic nejčastěji používáme [A] a [Ha], a to zejména v první části. Jedná se o moderní interpretace zásadního díla [E], jehož český překlad s komentáři [E<sub>V</sub>] lze najít ve všech knihovnách a mnoha knihkupectvích. Další dostupné zdroje, ze kterých čerpáme, jsou knihy [Ku, Ku<sub>2</sub>]. K úvodu do zobrazovacích metod používáme [Me, U] a [Ř]. K samostatnému studiu doporučujeme celkem přístupný text [L] a velmi stručné, o to však poučnější, pojednání [Ha<sub>2</sub>]. Další odkazy a pracovní listy lze najít ve studijních materiálech v IS.<sup>1</sup>

Tento materiál se průběžně vyvíjí, a to i na základě studentských připomínek. Za korekce, věcné poznámky, resp. příspěvky do studijních materiálů děkuji Michaele Ingrštové, Jakubu Klatovskému, Lucii Krézkové, Barboře Mišejkové, Kristýně Nedvědové, Žanetě Němcové, Matrinu Šťávi, Pavlíně Vyhnálkové a všem dalším absolventům, na které jsem náhodou zapomněl.

Brno, 17. února 2020

Vojtěch Žádník

---

<sup>1</sup><http://is.muni.cz/el/1441/jaro2020/MA0007/um/>



<b>I Úvod</b>	<b>5</b>
1 Eukleidovská a neeukleidovská geometrie . . . . .	5
2 Různá pojetí geometrie . . . . .	6
3 Předpoklady a cíle . . . . .	7
<b>II Klasická konstrukční geometrie</b>	<b>9</b>
4 Základy . . . . .	9
5 Úloha Apollóniova a úlohy příbuzné . . . . .	45
6 Typické úlohy . . . . .	53
<b>III Geometrická zobrazení</b>	<b>59</b>
7 Panoptikum geometrických zobrazení . . . . .	59
8 Přehledy a poznámky . . . . .	86
9 Typické úlohy . . . . .	89
<b>IV Zobrazovací metody</b>	<b>95</b>
10 Úvod . . . . .	95
11 Volné promítání . . . . .	97
12 Mongeovo promítání . . . . .	100
13 Kótované promítání . . . . .	112
14 Axonometrie a kosoúhlé promítání . . . . .	113
15 Perspektiva . . . . .	119
16 Cyklografie . . . . .	123
17 Typické úlohy . . . . .	124
<b>V Dodatky</b>	<b>133</b>
18 K Pythagorově větě . . . . .	133
19 K eukleidovským konstrukcím . . . . .	134
20 K úlohám Apollóniovým . . . . .	138
21 Kuželosečky . . . . .	141
<b>Závěrečné shrnutí</b>	<b>149</b>

<b>Literatura</b>	<b>157</b>
<b>Rejstřík</b>	<b>161</b>
<b>Přílohy</b>	<b>163</b>

## 1 Eukleidovská a neeukleidovská geometrie

Eukleidovskou geometrií se tradičně myslí geometrie tak, jak je představena v Eukleidových Základech [E] (cca 300 př. K.), resp. v jejích geometrických knihách. Jedná se o ucelený deduktivní výklad odvozený z několika axiómů a postulátů. Axiómy se týkají obecných veličin. Postuláty jsou ryze geometrického charakteru a vymezují vztahy mezi primitivními pojmy (bod, přímka) a základními relacemi (**incidence**, **shodnost** a **rovnoběžnost**). V Základech se však používá několik dalších předpokladů, aniž by byly jakkoli formulovány (viz axiomy **uspořádání** a **spojitosti**). Přesný axiomatický popis, založený na tom Eukleidově, pochází od D. Hilberta [Hi] (kolem 1900), viz též [Ha, L] nebo přílohu na str. 171.



Obrázek 1.1: [Ko] Miniatura Eukleida ze 6. století.

Už na první pohled je patrné, že jedny z klíčových rolí v Eukleidově geometrii hrají relace shodnosti a rovnoběžnosti. Uvědomte si, že v Eukleidově pojetí je shodnost docela abstraktní koncept; zejména (z pochopitelných důvodů) nepředstavuje žádné číselné vyjadřování délek úseček, velikostí úhlů apod.! Rovnoběžnost úzce souvisí s postulátem, který je v našem značení pátý a který je v rámci Eukleidova systému ekvivalentní s tvrzením, že „každým bodem ke každé přímce prochází jediná rovnoběžka“. Právě diskuze nad původní Eukleidovou formulací měla dalekosáhlé důsledky a vedla k vynálezu *neeukleidovských* geometrií.

Velmi hrubě řečeno, eukleidovská geometrie je založena zejména na relacích shodnosti a rovnoběžnosti. Uvažujeme-li geometrii s relací rovnoběžnosti, aniž bychom užívali shodnosti, jsme na stopě *afinní* geometrii, o které se několikrát zmiňujeme níže. Naopak, neuvažujeme-li rovnoběžnost, pouze shodnost, dospějeme ke geometriím neeukleidovským. Tyto jsou dvojího typu:

- *eliptická* — „žádné rovnoběžky“,
- *hyperbolická* — „více rovnoběžek“ (k jedné přímce jdoucí daným bodem).

Níže naznačíme, proč eliptický případ není kompatibilní s axiomy uspořádání (což je také důvod, proč se nejdříve přišlo na geometrii hyperbolickou). V tomto smyslu má eliptická geometrie velmi blízko ke geometrii *projektivní*, o níž si také něco řekneme. Právě tyto objevy a úplné porozumění neeukleidovským geometriím (kolem 1830) představují jedno z nejzajímavějších dobrodružství v historii matematiky; důležitá jména, která se v této souvislosti připomínají, jsou zejména J. Bolyai, N.I. Lobačevský a C.F. Gauss. Přestože je tato látka zajímavá také z konstrukčního hlediska, nebudeme se jí v tomto kurzu vůbec zabývat. Hezký úvod a další odkazy lze najít např. v [Ha] nebo [D].

## 2 Různá pojetí geometrie

V této podkapitole se zmíníme o různém pojetí geometrie podle použité metody (tedy nikoli podle objektu našich úvah nebo zájmů). Z naznačených možností budeme v tomto kurzu prosazovat zejména postoj syntetický a transformační.

### 2.1 Stanovisko axiomatické

Tento postoj je představen již v Základech a netýká se samozřejmě pouze geometrie. Ukázkou axiomatického přístupu ke geometrii v moderní a úplné podobě jsou Hilbertovy axiomy [Hi]. V této souvislosti se rozlišuje mezi axiomatickou teorií a jejím **modelem**. Je sice pravda, že v případě eukleidovské geometrie jsou všechny modely „stejně“, nicméně formálně je třeba rozlišovat. Např. to, co běžně nazýváme standardní eukleidovskou rovinou, je jen standardním modelem axiomatické teorie popsané axiomy na str. 171.

V této souvislosti je vhodné se alespoň zamyslet nad možnou axiomatizací afinní a projektivní geometrie, o nichž se zmiňujeme níže.

### 2.2 Stanovisko syntetické

Až do 17.–18. století to byl v podstatě výhradní přístup ke geometrii. Syntetickou geometrií se myslí geometrie **bez souřadnic** nebo, poněkud úžeji, geometrie konstrukční. Tato metoda má jistá omezení: Jednak existují úlohy, které nejsou konstrukčně řešitelné, viz např. dodatek 19.1 pojednávající o proslulých geometrických problémech starověku. Jednak při konstrukcích pozorujeme značný rozdíl mezi úlohami v rovině a v prostoru, viz např. konstrukce (průmětů) pravidelných mnohostěnů.

### 2.3 Stanovisko analytické

Můžeme stručně charakterizovat jako stanovisko početní, obvykle je míněno počítání v souřadnicích. Počátky analytické geometrie jsou tradičně spojovány se jménem R. Descarta (kolem 1637), mělo by však být zřejmé, že se nemohlo jednat o analytickou geometrii, jak ji chápeme dnes!<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V té době stále nebyla vynalezena reálná čísla...

Nicméně Descartovou inovací byla aplikace **algebry** k řešení geometrických úloh. Ve starší literatuře je často analytická geometrie jmenována jako algebraická, tento přívlastek má však dnes poněkud posunutý význam.

## 2.4 Stanovisko transformační

Všechny shodnosti eukleidovské roviny tvoří grupu. Tato je podgrupou grupy (bijektivních) afinních transformací, jež je zase podgrupou grupy (bijektivních) projektivních transformací atd. Stanovisko transformační, neboli Kleinovo, je založeno právě na pojmu **transformační grupy**. Tento postoj velmi pomáhá při organizaci geometrických informací a od své přesné formulace (1872) velmi ovlivnil další vývoj geometrie. Podle F. Kleina je ta či ona geometrie zcela charakterizována grupou odpovídajících geometrických transformací. V tomto duchu je geometrie studiem vztahů a vlastností, které jsou invariantní vzhledem k působení nějaké transformační grupy.

## 2.5 Stanovisko diferenciální

Toto pojetí je spojováno s B. Riemannem (okolo 1854) a dovoluje opravdu dalekosáhlá zobecnění. Zde je geometrie určena **infinitesimalně** tzv. Riemannovou metrikou. V tomto duchu jsou eukleidovské prostory Riemannovými prostory s „nulovou křivostí“, zatímco eliptické a hyperbolické prostory jsou Riemannovy prostory s nenulovou, ale „konstantní křivostí“. Tento přístup je nezbytný např. při studiu vlastností některých kartografických zobrazení.

# 3 Předpoklady a cíle

Kromě obvyklého přehledu školské geometrie nepředpokládáme žádné speciální znalosti a dovednosti. Hlavním předpokladem k uspokojivému absolvování tohoto kurzu by měla být schopnost zorganizovat a potřeba vysvětlovat vybrané geometrické poznatky, jejich návaznosti a konstrukční uplatnění.

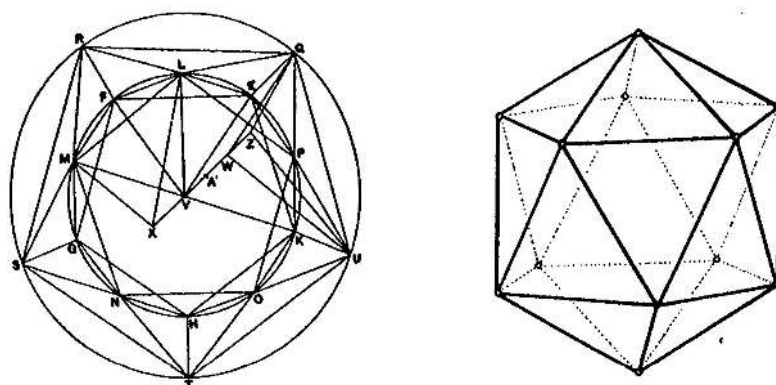
Celý kurz začínáme přehledem základních a/nebo konstrukčně zajímavých témat z Eukleidových Základů (podkap. 4). Ty jsou veskrze planimetrické; ze stereometrických úloh se soustředíme na konstrukce pravidelných konvexních mnohoúhelnů, jimiž tato část vrcholí. Z klasické konstrukční geometrie, která není zastoupena v Základech, se podrobněji věnujeme Apollóniově úloze o dotyku kružnic (podkap. 5). Při řešení těchto úloh se s úspěchem používá geometrických transformací, ke kterým se vracíme v samostatné kapitole (kap. III). Nejobecnější studovanou skupinou zobrazení budou zobrazení afinní a projektivní. S těmito závěry vstoupíme do poslední kapitoly (kap. IV), v níž diskutujeme problémy spojené se zobrazováním trojrozměrného prostoru do roviny. Představíme několik základních metod tak, abychom byli schopni věrně zobrazit jakýkoli prostorový objekt, zejména tedy objekt krásný (viz např. obr. 3.2).

Typické úlohy, které bychom na konci semestru měli umět řešit, zahrnují např.:

- sestrojiti zlatý řez dané úsečky,
- sestrojiti pravidelný pětiúhelník a další pravidelné mnohoúhelníky,
- pro daný mnohoúhelník sestrojiti čtverec se stejným obsahem,
- sestrojiti kružnici, která se dotýká tří daných kružnic, resp. přímek nebo bodů,
- charakterizovat základní transformace v rovině a umět je konstrukčně použít,

- sestrojít obecný průmět pravidelného mnohostěnu či jiného tělesa,
- sestrojít průnik přímky s rovinou, průsečnici dvou rovin apod.,
- sestrojít řez roviny s tělesem a zobrazit tento řez ve skutečné velikosti,
- určit vzdálenost bodu od přímky, resp. roviny,
- apod.

Při konstrukcích rozlišujeme mezi rýsovací a myšlenkovou přesností — ta první zůstane naším nespplněným snem, na té druhé trváme! S výše uvedenými úlohami a jejich řešením si samozřejmě osvojíme značné množství poznatků, které bychom měli umět (aspoň rámcově) zdůvodňovat. Současně by nám mělo záležet na jejich správné logické posloupnosti, tj. uvědomovat si (aspoň rámcově) na čem to či ono tvrzení závisí a co z něj dále vyplývá. . .



Obrázek 3.2: [A] Průmět pravidelného dvacetistěnu v Základech a ve volném rovnoběžném promítání.



---

## Klasická konstrukční geometrie

---

Tuto kapitolu začínáme se skutečnou klasikou — s Eukleidovými Základy. Tím si zopakujeme mnoho dobře i méně dobře známých poznatků, zejména si připomeneme některé pozapomenuté souvislosti. Následně se budeme věnovat tzv. úlohám Apollóniovým, což je zajímavá skupina úloh souvisejících s dotykem kružnic.

### 4 Základy

Velmi rámcový přehled Základů je následující:

- knihy I–IV a VI, planimetrie,
- knihy VII–IX, aritmetika,
- knihy XI–XIII, stereometrie.

Knihy V a X mají poněkud specifické postavení, viz dále.

#### 4.1 Axiómy a postuláty

V každé knize najdeme několik definic, z nichž celou řadu známe téměř ve stejném znění už ze školy. Některé pojmy/relace jsou nedefinované neboli primitivní (např. shodnost úseček a úhlů), jiné jsou sice nějak definované, ale ve skutečnosti jsou též primitivní (např. definice bodu a přímky).

Na začátku I. knihy je formulováno několik axiómů a postulátů. Axiómy se týkají obecných veličin; na str. 165 jsou vyjmenovány jako Common notions a tady je nepřepisujeme. Postuláty jsou ryze geometrického charakteru:<sup>1</sup>

- Každé dva různé body spojuje přímka.*
- Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.*

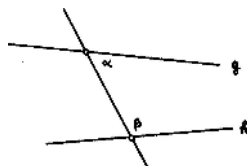
---

<sup>1</sup>V různých edicích jsou axiomy/postuláty organizovány různě, sr. např. s [E<sub>V</sub>]. My odkazujeme na vydání odvozená z překladu T. Heatha, viz [HTD].

- (iii) *Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.*
- (iv) *Všechny pravé úhly jsou shodné.*
- (v) *Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*

V (i) a (ii) je přímkou zřejmě myšlena úsečka, a to jediná. Postuláty (i)–(iii) představují jediné konstrukční nástroje, se kterými si celé Základy vystačí — ideální nekonečně dlouhé pravítko a ideální nekonečně rozkročitelné kružítko. Konstrukce, které lze realizovat s těmito nástroji se nazývají *eukleidovské konstrukce*, viz též dodatek 19.

Postulát (i) je typickým axiómem **incidence**, postulát (iv) nám říká něco o základní relaci **shodnosti**. Postulát (v) je přezdíván jako dodatečný, neboť je původně formulován dodatečně až před tvrzením I.29.<sup>2</sup> Často bývá nahrazován tzv. postulátem o **rovnoběžkách**, se kterým je ekvivalentní, viz odst. 4.4.



Obrázek 4.1: [A] Eukleidův dodatečný postulát:  $\alpha + \beta < 2R \implies g \text{ a } h \text{ se protínají}$ .

V Základech se však používá několik předpokladů, aniž by byly jakkoli formulovány. Přesný axiomatický popis, založený na tom Eukleidově, pochází od D. Hilberta [Hi] (kolem 1900), viz přílohu na str. 171. Eukleidovy nevyslovené axiomy se týkají hlavně uspořádání a spojitosti. Typický axióm **uspořádání** je např.:

- *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.*

Tento požadavek nám mj. říká, že přímka není uzavřená křivka, což ze samotného postulátu (ii) nevyplývá. To v důsledku znamená, že body na přímce lze uspořádat a toto uspořádání je úplné. Uvědomte si, že teprve po této přípravě je možné uspokojivě definovat pojem úsečky! Axiomy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem. Ten lze v řeči uspořádání a tzv. Dedekindových řezů formulovat následovně:

- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

## 4.2 Přehled

Od str. 165 je přiložen stručný přehled nejcitovanějších tvrzení ze všech geometrických knih podle [Ha]. Nyní shrneme několik podrobností k jednotlivým knihám, viz [A].

<sup>2</sup>I.29 = 29. věta v I. knize Základů

## I. Základy planimetrie

Základní a dobře známá tvrzení a konstrukce včetně všech vět o shodnostech trojúhelníků (I.1–26); teorie rovnoběžek (I.27–31); věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku (I.32); obsahy rovnoběžníků a trojúhelníků (I.33–45); Pythagorova věta (resp. Eukleidova věta o odvěsně) a věta opačná (I.47–48).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.4 a 4.6.

## II. O pravoúhelnících

Většina tvrzení se týká tzv. geometrické algebry; konstrukce zlatého řezu (II.11); kosinová věta (II.12–13); kvadratura obecného mnohoúhelníku (II.14).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.6, 4.8, 4.9 a 4.11.

## III. Geometrie kružnic

Věty o kružnicích, jejich průnicích a dotyku, sečnách, tečnách a asociovaných úhlech: např. konstrukce tečny (III.16–17); věty o středových a obvodových úhlech (III.20–21), Thaletova věta (III.31), věta o úsekových úhlech (III.32); mocnost bodu ke kružnici (III.35–37).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.12.

## IV. Pravidelné mnohoúhelníky

Konstrukce některých mnohoúhelníků vepsaných/opsaných dané kružnici a konstrukce kružnice opsané/vepsané danému mnohoúhelníku: jmenovitě pro obecný trojúhelník (IV.2–5), čtverec (IV.6–9), pravidelný pětiúhelník (IV.10–14), pravidelný šestiúhelník (IV.15), pravidelný 15-tiúhelník (IV.16).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.14.

## V. Obecná teorie proporcí

Mnohem abstraktnější kniha než ostatní, nezávislá na předchozích, nutná pro následující; pojednává o poměrech a proporcích obecných veličin (proporce je rovnost dvou poměrů), přičemž se myslí i na nesouměřitelné veličiny (tj. veličiny, jejichž poměr není racionální číslo, viz Def.V.5); typické tvrzení pro představu:  $a : b = c : d \implies a : c = b : d$  (V.16).

## VI. Geometrie podobných útvarů

Základní tvrzení (VI.1) mluví o proporcích mezi obsahy trojúhelníků a velikostmi jejich základů za předpokladu, že mají stejnou výšku; charakterizace podobných trojúhelníků (VI.2,4,5) konstrukce geometrického průměru (Eukleidova věta o výšce) (VI.13); vyjádření poměru obsahů podobných mnohoúhelníků pomocí koeficientu podobnosti (VI.19–20); pokračování geometrické algebry — řešení obecné kvadratické rovnice (VI.28–29); další zobecnění Pythagorovy věty (VI.31).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.16 a 4.18.

## VII. Základní aritmetika

Eukleidův algoritmus k nalezení největšího společného dělitele daných čísel (VII.1–3); poměry a součiny čísel (VII.17–19);

### VIII. a IX. Teorie čísel

Geometrické posloupnosti čísel; čtvercová a kubická čísla; věta o počtu prvočísel (IX.20); sudá, lichá a dokonalá čísla.

### X. Nesouměřitelné veličiny

Nejobsáhlejší kniha ze všech: definice (Def.X.1) a charakterizace (X.5–6) souměřitelných a nesouměřitelných veličin; existence nesouměřitelných veličin (X.10); vztahy mezi souměřitelností a poměry, součty a dalšími operacemi s veličinami; klasifikace nesouměřitelných veličin; . . . . .

### XI. Základy stereometrie

Věty o rovnoběžnosti a kolmosti přímek a rovin (XI.1–19); prostorové úhly (XI.20–23); o rovnoběžnostěnech a jejich objemech (XI.24–37); dvě věty s trojbokými hranoly (XI.38–39).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.20.

### XII. Obsahy a objemy

Myšleno obsahy a objemy pomocí Eudoxovy exhaustivní metody: obsah kruhu (XII.2); objem jehlanu (XII.3–9); objem válce a kužele (XII.10–15); objem koule (XII.18).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.20.

### XIII. Pravidelné mnohostěny

Věty o zlatém řezu (XIII.1–6); věty o pětiúhelníku (XIII.7–15); konstrukce pravidelných mnohostěnů (XIII.13–17), porovnání jejich stran a zdůvodnění, že jich není více (XIII.18).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.21.

## 4.3 Cvičení

- (1) Na vybraných pojmech porovnejte definice v Základech [E] s těmi, které znáte ze školy.
- (2) Najděte nějaké tvrzení v Základech, které neznáte ze školy, a naopak.
- (3) Utvořte si představu o struktuře Základů — nejlépe tak, že si zapamatujete řazení některých význačných tvrzení v jednotlivých knihách.
- (4) Utvořte si představu o rozdílech mezi axiomatickým systémem Eukleidovým [E] a Hilbertovým [Hi], příp. jiným.

## 4.4 Postulát o rovnoběžkách

Jak jsme zmínili výše, postulát (v) je označován jako dodatečný, neboť je původně formulován až před tvrzením I.29 a nikoli na začátku s ostatními. Tento postulát se bezprostředně týká rovnoběžnosti a často bývá nahrazován tzv. postulátem o rovnoběžkách, se kterým je ekvivalentní, viz Věta (\*) na str. 14. Přitom rovnoběžnost přímek je definována následovně (Def.I.23):

Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud leží v téže rovině a nemají žádný společný bod.

**Co je na postulátu (v) nezávislé**

Prvních 28 tvrzení v I. knize je na postulátu (v) nezávislých — jsou to např.:

I.4 Věta SUS.

I.5–6 Rovnoramenné trojúhelníky jsou charakterizovány rovností úhlů při základně.

I.8 Věta SSS.

I.11–12 Konstrukce kolmice k dané přímce daným bodem.

I.16 Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.

[ Zde se poprvé silně používá nevyslovených předpokladů o uspořádání bodů na přímce. ]<sup>3</sup>

I.17–20 Znamé nerovnosti v trojúhelníku.<sup>4</sup>

I.23 Konstrukce daného úhlu na dané polopřímce.

I.26 Věta USU.

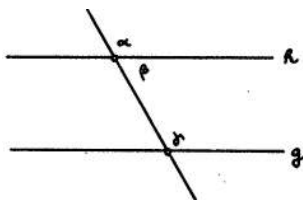
I.27 Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek.

[ Zdůvodněno nepřímo pomocí I.16. ]

Kromě těchto tvrzení je na (v) nezávislé také např.:

I.31 Konstrukce rovnoběžky k dané přímce daným bodem.

[ Konstrukce podle I.23, zdůvodnění podle I.27. ]



Obrázek 4.2: [A] I.27:  $\alpha = \gamma \implies h \parallel g$ . I.29:  $h \parallel g \implies \alpha = \gamma$ .

**Co na postulátu (v) závisí**

Naopak, řada dalších tvrzení je na pátém postulátu závislá, příp. je s ním ekvivalentní. První takové tvrzení je:

I.29 Věta o střídavých úhlech, viz obr. 4.2 (nebo přílohu na str. 172).

[ Dokázáno nepřímo:  $\alpha \neq \gamma \implies \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \implies 2R \neq \gamma + \beta$ ; odtud podle (v) plyne, že se přímky  $h, g$  protínají, tedy nejsou rovnoběžné. ]

Právě z I.29 přímo vyplývá jednoznačnost rovnoběžky sestavené podle I.31:

<sup>3</sup>To je hlavní důvod, proč Věta I.16 a všechny její důsledky neplatí v eliptické geometrii (jež je lokálně modelovaná na sféře)!

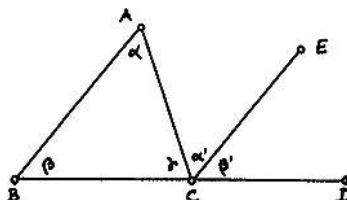
<sup>4</sup>Např. I.17 je tvrzení opačné k postulátu (v), I.20 je trojúhelníková nerovnost.

**Věta.** Každým bodem ke každé přímce prochází **právě jedna** rovnoběžka.

Toto tvrzení je asi nejnámější věta, která je s postulátem (v) ekvivalentní. Další tvrzení závislá na tomto postulátu jsou:

I.32 Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku, viz obr. 4.3.

[Dokázáno přímo z I.29:  $CE \parallel AB \implies \alpha' = \alpha$  a  $\beta' = \beta$ ; odtud plyne, že  $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$  a  $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ .]



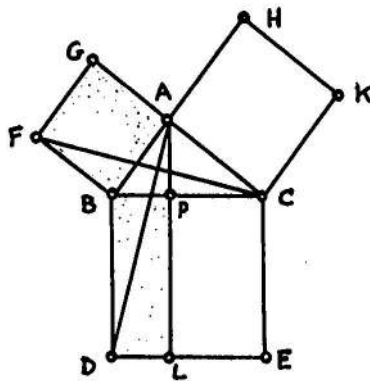
Obrázek 4.3: [A] I.32: Vnější úhel v libovolném trojúhelníku je roven součtu protějších vnitřních úhlů a součet všech vnitřních úhlů je roven dvěma pravým.

I.33–45 Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsahích, viz odst. 4.6.

I.47 Pythagorova věta, jakožto dvakrát Eukleidova věta o odvěsně, viz obr. 4.4.

*Důkaz.*  $FBAG$  je čtverec a úhel  $BAC$  je pravý, tudíž body  $G, A, C$  leží na jedné přímce, a ta je rovnoběžná s  $FB$  (I.27). Odtud obsah  $FBA =$  obsah  $FBC$  (I.37) = obsah  $ABD$  (I.4) = obsah  $PBD$  (I.37). Proto má čtverec  $FBAG$  stejný obsah jako obdélník  $PBDL$ .

Stejným způsobem se zdůvodní, že čtverec  $KCAH$  má stejný obsah jako obdélník  $PCEL$ . Dohromady tedy platí, že čtverec nad  $BC$  má stejný obsah jako součet čtverců nad  $BA$  a  $AC$ .  $\square$



Obrázek 4.4: [A] I.47: V pravouhlém trojúhelníku  $BAC$  ozn.  $P$  patu výšky z vrcholu  $A$ . Potom platí  $BP \cdot BC = BA^2$  a  $CP \cdot CB = CA^2$ , tudíž  $BC^2 = BA^2 + AC^2$ .

Kromě těchto ukázek z I. knihy závisí na postulátu o rovnoběžkách většina geometrických tvrzení z ostatních knih Základů. . .

## 4.5 Cvičení

- (1) Pomocí ideálních eukleidovských nástrojů sestrojte: kolmici k dané přímce daným bodem, rovnoběžku k dané přímce daným bodem apod.
- (2) Pomocí omezených eukleidovských nástrojů (krátké pravítko, malé nebo dokonce zaseknuté kroužátko) sestrojte: spojnici dvou bodů, rovnostranný trojúhelník, znovu (1) apod.
- (3) Dokažte, že si umíte představit sférický trojúhelník, ve kterém neplatí I.16.

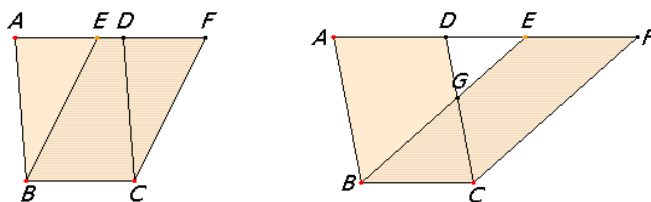
## 4.6 Kvadratura mnohoúhelníku

*Kvadraturovat* nějaký plošný útvar znamená sestrojít čtverec, který má stejný obsah (příčemž sestrojít jako obvykle znamená sestrojít eukleidovsky). Posloupnost tvrzení v [E] (počínaje I.34 a vrcholice II.14) řeší tento problém pro libovolné mnohoúhelníky. Pojem obsahu není v Základech nijak vymezen, avšak nakládá se s ním jako s každou jinou veličinou podle vyslovených axiómů (viz Common notions na str. 165). Zejména platí, že shodné útvary mají stejný obsah.

### Konstrukce

I.35–38 Rovnoběžníky, resp. trojúhelníky, se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah.

[Úvodní tvrzení z této série je na obr. 4.5: zdůvodnění je založeno na shodnosti trojúhelníků  $ABE$  a  $DCF$ .]



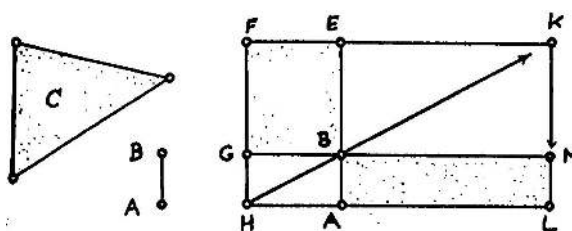
Obrázek 4.5: [E,<sub>J</sub>] I.35: *Rovnoběžníky se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah.*

I.42 Konstrukce rovnoběžníku, jenž má stejný obsah jako daný trojúhelník.

[Pomocí prodloužené střední příčky, viz např. část obr. 4.9. . . ]

I.43–45 Konstrukce rovnoběžníku, jenž má stejný obsah jako daný mnohoúhelník.

*Podrobnosti.* Klíčový krok je v I.44, viz obr. 4.6: Podle I.42 se sestrojí rovnoběžník  $FEBG$ , jehož obsah je stejný jako obsah daného trojúhelníku; rovnoběžník  $FEAH$  se doplní tak, aby  $AB$  byla daná úsečka; spojí se  $HB$ , odtud  $K$ , dále  $M$  a  $L$  jako na obrázku. Každý rovnoběžník je úhlopříčkou rozdělen na dva stejné trojúhelníky (I.34), proto má doplňkový rovnoběžník  $ABML$  stejný obsah jako  $FEBG$  (I.43).



Obrázek 4.6: [A] I.44: Konstrukce rovnoběžníku, který má dānu jednu stranu a stejný obsah jako daný trojúhelník.

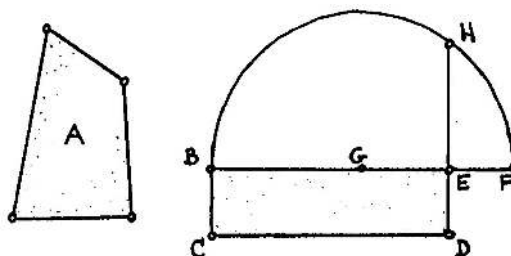
Ostatní je zřejmé: Obecný mnohoúhelník lze vždy rozdělit na trojúhelníky; tyto trojúhelníky lze podle I.44 přeměnit na rovnoběžníky, které se shodují v jedné straně (a vnitřních úhlech); z těchto rovnoběžníků lze složit jeden rovnoběžník, a ten má stejný obsah jako daný mnohoúhelník.  $\square$

#### II.14 Konstrukce čtverce, jenž má stejný obsah jako daný mnohoúhelník.

*Podrobnosti.* Shrnutí předchozího + vlastní kvadratura: Podle I.45 se sestojí pravoúhelník  $BCDE$ , který má stejný obsah jako daný mnohoúhelník; doplní se  $F$  tak, aby  $EF = ED$ , dále  $G =$  střed  $BF$ , kružnice  $GF$  a bod  $H$  na této kružnici a na kolmici k  $BE$ . Potom, podle II.5 (viz obr. 4.10) a I.47, platí

$$BE \cdot EF + EG^2 = GF^2 = GH^2 = EG^2 + EH^2,$$

tzn.  $BE \cdot EF = EH^2$ , tudíž  $EH$  je stranou hledaného čtverce.  $\square$



Obrázek 4.7: [A] II.14: Konstrukce strany čtverce, který má stejný obsah jako daný mnohoúhelník.

Všimněte si, že se znalostí Thaletovy věty (která je však formulovaná až v III.31) lze úsečku  $EH$  interpretovat jako výšku v pravoúhlém trojúhelníku  $BHF$ . V důkazu II.14 se tedy vlastně zdůvodňuje tzv. Eukleidova věta o výšce.<sup>5</sup> Ke kvadratuře pravoúhelníku lze však stejně dobře použít Eukleidovu větu o odvěsně (viz I.47), která při rýsování vždycky zabírá o něco méně místa.

<sup>5</sup>Jiné zdůvodnění Eukleidovy věty o výšce založené na podobnosti trojúhelníků plyne z VI.8; konstrukce je samozřejmě tatáž, viz VI.13.

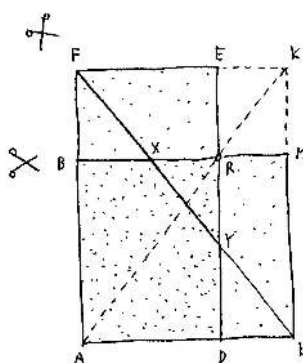


### Stříhání

Spousta předchozích argumentů byla založena na shodnostech částí, z nichž se skládají dané útvary se stejným obsahem (viz např. I.35, I.42). To znamená, že stejnoplochosť lze v těchto případech názorně demonstrovat tak, že se jeden útvar rozstříhá a ze vzniklých částí se složí ten druhý.

Ve výše diskutované kvadratuře mnohoúhelníku nemusí být na první pohled zřejmé, jak by se měly stříhat stejnoploché pravoúhelníky tak, aby z jednoho šel složit druhý. To si nyní vysvětlíme nad obr. 4.8:

**Věta.** *Dva pravoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*



Obrázek 4.8: Stříhání stejnoplochých pravoúhelníků.

*Důkaz.* Implikace zprava doleva je triviální, dokazujeme pouze opačné tvrzení:

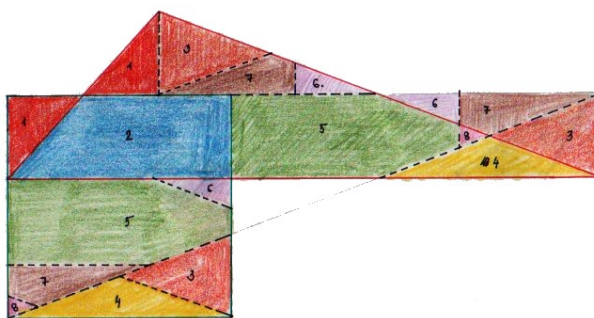
Pravoúhelníky  $ADEF$  a  $ALMB$  položíme přes sebe a doplníme  $K$  jakožto průsečík  $FE$  a  $LM$ . Podle I.43 víme, že  $ADEF$  a  $ALMB$  mají stejný obsah, právě když průsečík  $R = BM \cap DE$  leží na úhlopříčce  $AK$  doplněného pravoúhelníku. Tato podmínka je splněna, právě když trojúhelníky  $FBX$  a  $YDL$  jsou shodné, což je ekvivalentní s tím, že jsou shodné trojúhelníky  $FEY$  a  $XML$ . ◀

Pokud úhlopříčka  $FL$  protíná společnou část  $ADRB$  jako na obrázku, pak lze pravoúhelník  $ADEF$  rozstříhat podle úseček  $FY$  a  $BX$ , trojúhelník  $FBX$  přesunout na  $YDL$ , trojúhelník  $FEY$  přesunout na  $XML$ , čímž dostaneme pravoúhelník  $ALMB$ . Pokud úhlopříčka  $FL$  neprotíná společnou část  $ADRB$ , pak je možné nápad se stříháním a přesouváním zopakovat několikrát nebo vymyslet nějaké alternativní řešení, viz cvičení. □

Odtud vidíme, že libovolný mnohoúhelník je možné nejen kvadraturovat, ale dokonce rozstříhat tak, aby ze vzniklých částí bylo možné složit čtverec. Tato pozorování vedou k následujícímu obecnějšímu závěru, viz např. [Ha, podkap. 24]:

**Věta** (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova). *Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*

Kvadratura obecného trojúhelníku společně se stříháním, jež je odvozeno z předchozího rozboru, je naznačena na obr. 4.9.



Obrázek 4.9: [K. Nedvěďová, 2009] Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním.

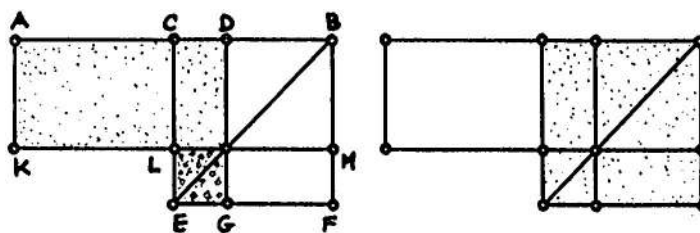
#### 4.7 Cvičení

- (1) Pravoúhelníky  $KFBM$  a  $KEDF$  na obr. 4.8 mají stejný obsah. Dokažte, že umíte rozstříhat jeden tak, aby ze vzniklých částí šel složit druhý.
- ⇒ (2) Dokažte, že umíte kvadraturovat obecný mnohoúhelník.
- (3) Uvědomte si, že kvadraturu specifického mnohoúhelníku lze často provést specifickým a zpravidla efektivnějším způsobem. . .
- (4) Uvědomte si, že kvadraturovat jiné útvary než mnohoúhelníky může být docela problém (viz 19.1).
- (5) Sestrojte svůj vlastní důkaz Pythagorovy věty pomocí rozstříhání dvou menších čtverců.

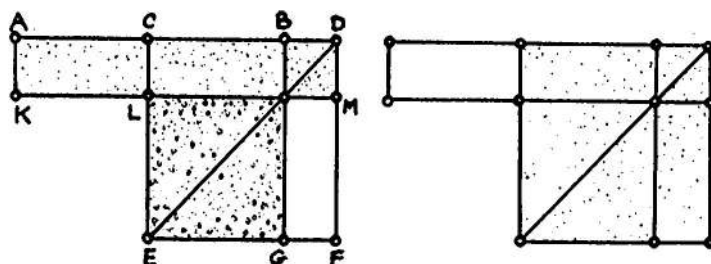
#### 4.8 Geometrická algebra

Tvrzení, která se řadí do této skupiny, nějak souvisí (nebo mohou souviset) s algebrou a v Základech jsou koncentrovány zejména ve II. knize. Patří sem také např. tvrzení I.44 (viz obr. 4.6), které lze chápat jako geometrické řešení lineární rovnice  $S = ax$ , kde  $S$  je obsah daného trojúhelníku a  $a$ , resp.  $x$  je velikost dané, resp. hledané strany pravoúhelníku se stejným obsahem.

Úvodních několik tvrzení ze II. knihy lze považovat za známé algebraické rovnosti v geometrickém převleku; na následujících obrázcích jsou dvě taková tvrzení na ukázkou.



Obrázek 4.10: [A] II.5: Pokud je  $C$  středem úsečky  $AB$  a  $D$  je libovolný bod mezi  $C$  a  $B$ , potom platí  $AD \cdot BD + CD^2 = CB^2$ .



Obrázek 4.11: [A] II.6: Pokud je  $C$  středem úsečky  $AB$  a  $D$  je libovolný bod na téže přímce vpravo od  $B$ , potom platí  $AD \cdot BD + CB^2 = CD^2$ .

### Poznámky

Jedna z možných algebraických interpretací uvedených tvrzení je následující. Při značení  $|AB| =: b$  a  $|DB| =: x$  lze tvrzení II.5 psát jako

$$(b-x)x + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2.$$

Při stejném značení lze tvrzení II.6 psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. doplnění do čtverce, jež je ve větách II.5–6 představeno maximálně názorným způsobem. Tyto úpravy jsou také prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice, k čemuž se ještě vrátíme v odst. 4.18. Speciálním případem je konstrukce zlatého řezu, viz následující odstavec.

## 4.9 Zlatý řez

Základní konstrukce, kterou ještě několikrát využijeme, je konstrukce zlatého řezu. Zlatý řez je specifické (a podle mnohých nejhezčí možné) rozdělení úsečky na dvě části (Def.VI.3):

Úsečka je rozdělena ve *zlatém řezu*, pokud je poměr celé úsečky k větší části řezu stejný jako poměr větší části řezu k menší.

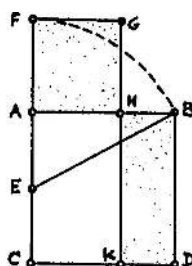
Jinými slovy: bod  $H$  na úsečce  $AB$  leží ve zlatém řezu, pokud platí

$$BA : AH = AH : HB \quad \text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA. \quad (4.1)$$

### Konstrukce

Klasická konstrukce zlatého řezu je představena na obr. 4.12:

**Věta (II.11).** *Body  $A, C, E, F$  leží na kolmici k  $AB$ , přičemž  $AC = AB$ ,  $E$  = střed  $AC$  a  $EF = EB$ ; bod  $H$  je sestroyen tak, že  $AH = AF$ . Potom bod  $H$  je ve zlatém řezu úsečky  $AB$ .*



Obrázek 4.12: [A] II.11: Konstrukce zlatého řezu úsečky  $AB$ .

*Důkaz.* Zdůvodnění uvedené konstrukce plyne z II.6 a z Pythagorovy věty:

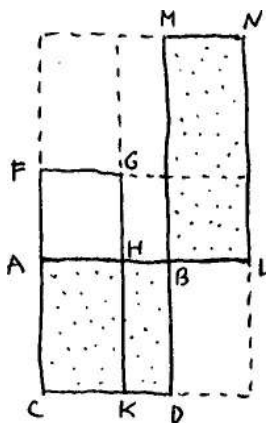
$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2,$$

tj.  $CF \cdot FA = AB^2$ , což znamená, že obdélník  $CFGK$  a čtverec  $ABDC$  mají stejný obsah. Tyto pravoúhelníky však mají společnou část  $CAHK$ , takže pravoúhelníky zvýrazněné na obrázku mají také stejný obsah. Tzn.  $AH^2 = AB \cdot BH$  neboli  $AH : BH = AB : AH$ .  $\square$

### Poznámky

Konstrukce II.11 v Základech ve skutečnosti nepojednává o zlatém řezu — o tom je řeč poprvé až v VI.30.<sup>6</sup> Zlatému řezu se dále věnují tvrzení XIII.1–6 v souvislosti s pětiúhelníkem a následnými konstrukcemi pravidelných mnohostěnů, viz odst. 4.14 a 4.21. Uvádíme jedno typické a užitečné tvrzení, viz obr. 4.13:

**Věta.** Pro čtyři body  $A, H, B, L$  na jedné přímce takové, že  $AH = BL$ , platí: úsečka  $AH$  je větší částí zlatého řezu úsečky  $AB$  právě tehdy, když úsečka  $BL$  je menší částí zlatého řezu úsečky  $AL$ .



Obrázek 4.13: Pokud  $AH = BL$ , potom  $H$  je ve zlatém řezu  $AB \iff B$  je ve zlatém řezu  $AL$ .

<sup>6</sup>Klasická terminologie je však jiná: místo o zlatém řezu se mluví o poměru krajním a středním.

*Důkaz.* Podle II.11 víme, že  $AH$  je větší částí zlatého řezu úsečky  $AB$ , právě když obdélník  $CFGK$  má stejný obsah jako čtverec  $ABDC$ . Podle téhož tvrzení je  $BL$  menší částí zlatého řezu  $AL$ , právě když  $BMNL$  má stejný obsah jako  $ABDC$ , přičemž  $NL = AL$ . Z předpokladu věty plyne, že obdélníky  $CFGK$  a  $BMNL$  jsou shodné, tudíž uvedené výroky jsou skutečně ekvivalentní.  $\square$

### Počítání

Na závěr ještě naznačíme, jak je možné konstrukci II.11 zdůvodnit početně. Smysl tohoto počínání bude ozejmen v odst. 4.18 — konkrétní vyjádření sestrojované veličiny vždy nabízí jistý návod k její konstrukci.

*Početní zdůvodnění II.11.* Označíme danou veličinu  $|AB| =: b$ , hledanou veličinu  $|AH| =: x$ . Postupně vyjádříme všechny veličiny sestrojované na obr. 4.12:

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}b, \quad |EB| = \frac{\sqrt{5}}{2}b, \quad |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b.$$

Definice zlatého řezu v našem značení zní:


$$b : x = x : (b - x),$$

což je ekvivalentní s  $b(b - x) = x^2$  neboli

$$x^2 + bx - b^2 = 0. \quad (4.2)$$

Stačí tedy ověřit, že před chvílí sestrojovaná veličina  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$  je kořenem této kvadratické rovnice — což skutečně je.  $\square$

### 4.10 Cvičení

- (1) Připomeňte si klasickou konstrukci zlatého řezu a vymyslete nějakou svoji vlastní konstrukci (návod: sestrojte postupně  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{5} - 1$ ,  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ).
- (2) Rovnice (4.2) má dva kořeny; vypočítejte také druhý kořen a zkuste jej nějak geometricky interpretovat.
- (3) Pro danou úsečku  $DF$  sestrojte bod  $A$  tak, aby  $F$  byl zlatým řezem úsečky  $DA$ . 
- (4) Dokažte, že platí (XIII.4): *Úsečka  $AH$  je větší částí zlatého řezu úsečky  $AB$  právě tehdy, když*

$$AB^2 + BH^2 = 3AH^2.$$

### 4.11 Kosinová věta

Asi nejnámějším zobecněním Pythagorovy věty je tzv. kosinová věta. V Základech samozřejmě není o funkci kosinus ani zmínka, nicméně geometrická část kosinové věty je zde celá, viz obr. 4.14:

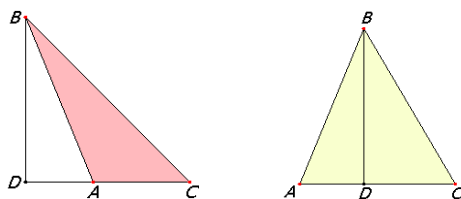
**Věta** (II.12–13). *V obecném trojúhelníku  $ABC$  označme  $D$  patu výšky z vrcholu  $B$ .*

(a) *Je-li vnitřní úhel u vrcholu  $A$  tupý, potom platí  $BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC$ .*

(b) Je-li vnitřní úhel u vrcholu  $A$  ostrý, potom platí  $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2DA \cdot AC$ .

*Důkaz.* Dokážeme, že platí (a), druhý případ lze zdůvodnit analogicky. V následujícím výpočtu postupně používáme Pythagorovu větu pro trojúhelník  $BDC$ , úpravu čtverce  $(DA + AC)^2 = DA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC$  (jejíž geometrickou interpretaci lze najít v II.4) a znovu Pythagorovu větu pro trojúhelník  $BDA$ :

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + DC^2 = BD^2 + (DA + AC)^2 = \\ &= (BD^2 + DA^2) + AC^2 + 2DA \cdot AC = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC. \quad \square \end{aligned}$$



Obrázek 4.14: [E<sub>J</sub>] II.12–13: V obecném trojúhelníku  $BAC$  ozn.  $D$  patu výšky z vrcholu  $B$ . Potom platí  $BC^2 = BA^2 + AC^2 \pm 2DA \cdot AC$  podle toho, zda je vnitřní úhel u vrcholu  $A$  tupý nebo ostrý.

### Poznámky

Při obvyklém značení  $a := |BC|$ ,  $b := |AC|$ ,  $c := |AB|$  a  $\alpha := \sphericalangle BAC$  platí, že velikost úsečky  $DA$  je rovna absolutní hodnotě  $c \cdot \cos \alpha$ . Přitom znaménko tohoto čísla je kladné, právě když  $\alpha < 90^\circ$ . Odtud plyne, že obě části předchozí věty můžeme psát současně jako

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (4.3)$$

Všimněte si, že dosazením specifických hodnot za  $\alpha$  dostáváme dříve dokázaná tvrzení, která byla použita v důkazu věty:

- $\alpha = 90^\circ$ :  $a^2 = b^2 + c^2 + 0$  (Pythagorova věta),
- $\alpha = 180^\circ$ :  $a^2 = (b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$  (II.4),
- $\alpha = 0^\circ$ :  $a^2 = (b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc$  (II.7).

## 4.12 O kružnicích

### Úvod

Obvyklá definice kružnice je následující (Def.I.15):

*Kružnice* je rovinný útvar tvořený koncovými body všech úseček, které jsou navzájem shodné a jejichž opačné koncové body splývají (ve *středu* kružnice).

Na úvod zmiňujeme několik tvrzení (a jednu konstrukci) ze III. knihy Základů, jež se týkají dotyku.<sup>7</sup> Jejich zdůvodnění je veskrze elementární s odkazy na známé nerovnosti v trojúhelníku, větu SUS apod. Tyto postřehy budeme užívat zejména v podkap. 5.

III.11–12 *Spojnice středů dotýkajících se kružnic prochází dotykovým bodem.*

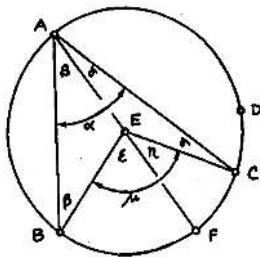
III.16,18,19 *Přímka jdoucí bodem na kružnici je tečnou, právě když je kolmá k průměru procházejícím tímto bodem.*

III.17 Konstrukce tečny z bodu ke kružnici (bez Thaletovy kružnice).

Kvůli souvislostem připomínáme několik dalších dobře známých tvrzení. Tato skupina poznatků míří k obzvlášť užitečnému pojmu mocnosti bodu ke kružnici, o němž se rozovídáme v samostatném odstavci.

III.20–21 Věty o středových a obvodových úhlech, viz obr. 4.15.

[Trojúhelník  $ABE$  je rovnoramenný, proto jsou úhly u základny stejné, ozn.  $\beta$  (I.5); pro vnější úhel u vrcholu  $E$  podle I.32 platí  $\varepsilon = 2\beta$ . Ze stejných důvodů platí také  $\eta = 2\gamma$ . Odtud plyne  $\mu = 2\alpha$  a podobně by se zdůvodnily i ostatní varianty jako např.  $A = D$ .]



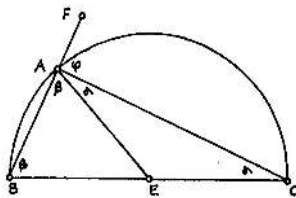
Obrázek 4.15: [A] III.20–21: *Středový úhel k dané úseči je dvakrát větší než obvodový ( $\mu = 2\alpha$ ); proto obvodové úhly na téže úseči jsou všechny stejné.*

III.22 Věta o tětivovém čtyřúhelníku.

[Plyne přímo z III.20 a I.32.]

III.31 Thaletova věta, viz obr. 4.16.

[Možno chápat jako spec. případ III.20 nebo dokázat přímo z I.32.]

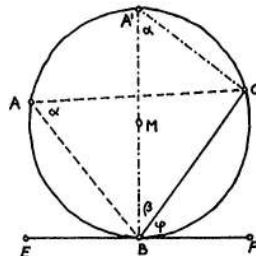


Obrázek 4.16: [A] III.31: *Obvodový úhel nad průměrem kružnice je pravý ( $\alpha + \beta = R$ ).*

<sup>7</sup>Dvě kružnice, resp. přímka a kružnice se *dotýkají*, když mají společný právě jeden bod.

III.32 Věta o úsekových úhlech, viz obr. 4.17.

[Podle III.21 je úhel u  $A$  stejný jako úhel u  $A'$ , ozn.  $\alpha$ . Podle III.31 je úhel u  $C$  pravý. Podle I.32 je  $\alpha + \beta = R$  a podle III.18 je  $\varphi + \beta = R$ ; odtud plyne, že  $\alpha = \varphi$ .]



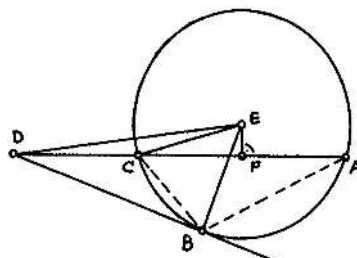
Obrázek 4.17: [A] III.32: Úsekový úhel je stejný jako odpovídající úhel obvodový ( $\varphi = \alpha$ ).

### Mocnost bodu ke kružnici

Mocnost bodu ke kružnici je velice užitečný invariant, ke kterému dospějeme na konci následující posloupnosti úvah.

**Věta (III.35–36).** Pro sečnu kružnice jdoucí bodem  $D$  ozn.  $A$  a  $C$  odpovídající průsečíky. Potom platí, že součin  $DC \cdot DA$  **nezávisí** na zvolené sečně. V případě, že  $D$  leží vně kružnice a  $B$  značí dotykový bod tečny jdoucí bodem  $D$ , platí

$$DC \cdot DA = DB^2. \quad (4.4)$$



Obrázek 4.18: [A] III.36: Pro libovolnou sečnu jdoucí bodem  $D$  platí:  $DC \cdot DA = DB^2 = \text{konst.}$

*Důkaz.* V případě, že bod  $D$  leží vně kružnice jako na obr. 4.18, lze rovnost (4.4) dokázat nekolikerym užitím Pythagorovy věty (pro trojúhelníky  $DBE$ ,  $DFE$ ,  $CFE$ ) a pomocí II.6 (pro čtyřveřici bodů  $D, C, F, A$ ):

$$\begin{aligned} DB^2 &= DE^2 - EB^2 = DE^2 - EC^2 = (DF^2 + FE^2) - (EF^2 + FC^2) = \\ &= DF^2 - FC^2 = (DF + FC) \cdot (DF - FC) = DA \cdot DC. \end{aligned}$$

To zejména znamená, že součin  $DC \cdot DA$  je konstantní.



V případě, že bod  $D$  leží uvnitř kružnice samozřejmě reálná tečna neexistuje, takže je nutné uvažovat dvě různé sečny procházející tímto bodem. Několikerým užitím Pythagorovy věty a věty II.5 lze podobně jako výše zdůvodnit, že součin  $DC \cdot DA$  je i v tomto případě konstantní...<sup>8</sup>  $\square$

Součin  $DC \cdot DA$  je tedy zcela určen danou kružnicí a bodem  $D$  (a nikoli zvolenou sečnou). V případě, že  $D$  leží vně kružnice, můžeme rovnost (4.4) pomocí středu  $E$  a poloměru  $r$  kružnice vyjádřit jako

$$|DE|^2 - r^2 \quad (4.5)$$

(podle Pythagorovy věty pro trojúhelník  $DBE$ ). V případě, že  $D$  je uvnitř kružnice, je tento rozdíl sice záporný, ale jeho absolutní hodnota je rovna součinu  $DC \cdot DA$ ...

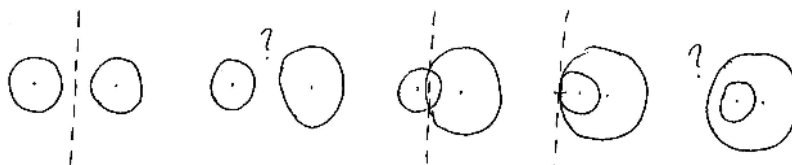
*Mocnost bodu  $D$  ke kružnici se středem  $E$  a poloměrem  $r$  je reálné číslo definované rovností (4.5).*

Mocnost je tedy kladná pro body vně kružnice, záporná pro body uvnitř kružnice a nulová pro body na kružnici.

### Další pojmy

Uvažme dvě kružnice, které se protínají. Pak přímka určená jejich společnými body má tu vlastnost, že každý bod na ní ležící má stejnou mocnost k oběma kružnicím. V případě, že se dvě kružnice dotýkají, má jejich společná tečna (jdoucí společným bodem) zrovna takovou vlastnost. Obecně:

*Množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím, se nazývá *chordála*.*

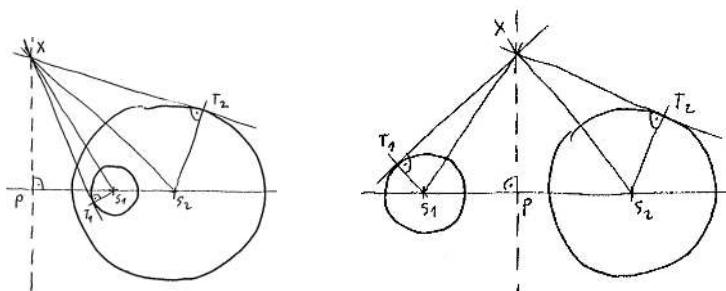


Obrázek 4.19: Chordála dvou kružnic.

Na první pohled nemusí být zřejmé, jak vypadá chordála v případě, že se dané kružnice neprotínají. Pokud kružnice mají společný střed, potom žádný (vlastní) bod nemůže mít stejnou mocnost k oběma kružnicím, tzn. chordála neexistuje. V opačném případě je odpověď v následující větě:

**Věta.** *Chordála libovolných dvou nesoustředných kružnic je přímka, která je kolmá na spojnici jejich středů.*

<sup>8</sup>Alternativně (a snad i přehledněji) lze tuto větu zdůvodnit pomocí podobnosti trojúhelníků: Trojúhelníky  $DCB$  a  $DBA$  mají úhel u vrcholu  $D$  společný a podle III.32 je úhel  $CAB$  shodný s úhlem  $DBC$ . Tyto trojúhelníky jsou tedy podobné (viz odst. 4.16). Odtud mj. vyplývá, že  $DC : DB = DB : DA$  neboli  $DC \cdot DA = DB^2$ .



Obrázek 4.20: Chordála je přímka kolmá na spojnici středů.

*Důkaz.* Při zdůvodnění používáme definici chordály a Pythagorovu větu, viz obr. 4.20:

Uvažme libovolný bod  $X$  na chordále; patu kolmice z bodu  $X$  na spojnici středů označíme  $P$ . Protože  $X$  má stejnou mocnost k oběma kružnicím, platí

$$\begin{aligned} |XS_1|^2 - r_1^2 &= |XS_2|^2 - r_2^2, \\ (|XP|^2 + |PS_1|^2) - r_1^2 &= (|XP|^2 + |PS_2|^2) - r_2^2, \\ |PS_1|^2 - r_1^2 &= |PS_2|^2 - r_2^2. \end{aligned}$$


Tzn., že bod  $P$  taky leží na chordále. Protože chordála má se spojnicí středů společný právě jeden bod, je to zrovna  $P$ . Pata kolmice z každého bodu na chordále tedy bude splývat s  $P$ , což znamená, že chordála je právě kolmice ke spojnici středů jdoucí tímto bodem.  $\square$

Ještě jeden pojem související s mocností bodu ke kružnici:

Množina bodů, která má stejnou mocnost ke třem daným kružnicím se nazývá *potenční střed tří kružnic*.

V generickém případě je potenční střed určen jednoznačně, ve speciálních případech však vůbec nemusí existovat (příp. je nevlastní) nebo naopak nemusí být určen jednoznačně. . .

### 4.13 Cvičení

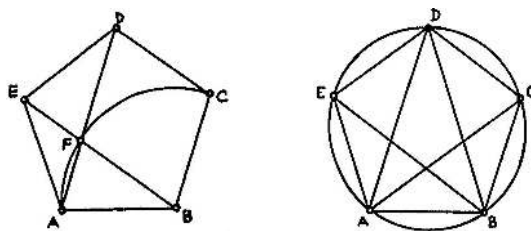
- (1) Sestrojte (eukleidovsky!) tečnu k dané kružnici z daného bodu; svoji konstrukci zdůvodněte a porovnejte s konstrukcí III.17.
- (2) Dokažte některé výše zmiňované a nedokazované tvrzení, např. III.22.
- (3) Sestrojte chordálu dvou kružnic, které se neprotínají.
- (4) Udejte příklad tří kružnic, které mají více potenčních středů.
-  (5) Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body a dotýká se dané přímky.

### 4.14 Pravidelný pětiúhelník

*Pravidelný mnohoúhelník* je takový mnohoúhelník, který má všechny strany a všechny vnitřní úhly shodné. Pravidelný (rovnoramenný) trojúhelník je konstruován v I.1, pravidelný čtyřúhelník (čtverec) je konstruován v I.46, další pravidelné mnohoúhelníky najdeme v IV. knize a dodatky k pravidelnému pětiúhelníku ještě ve XIII. knize. V tomto odstavci důkladně rozebereme pravidelný pětiúhelník.

#### Postřehy

Předpokládejme nějaký hotový pentagram, který trochu prozkoumáme. Tento má jak strany, tak



Obrázek 4.21: [A] Analýza pravidelného pětiúhelníku.

vnitřní úhly shodné, má pět os symetrií atp. Odtud podle obr. 4.21 vyvozujeme několik postřehů:

- (1)  $AD \parallel BC$  a  $BE \parallel CD$ , takže  $BCDF$  je rovnoběžník.
- (2) Obvodové úhly  $BAC$ ,  $CAD$ ,  $DAE$  atd. jsou všechny shodné, takže trojúhelník  $ABD$  má tu vlastnost, že je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobky úhlu u vrcholu  $D$ .<sup>9</sup>
- (3) Trojúhelníky  $ADE$  a  $EAF$  jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel, takže jsou podobné.<sup>10</sup>

#### Důsledky

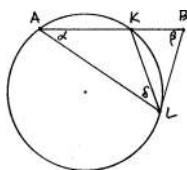
Předpokládejme, že máme danu stranu  $AB$  a chceme sestrojít ostatní vrcholy.

- (1') Z (1) plyne  $FD = BC = CD = BF$ . Pokud si ještě všimneme, že  $D$  leží na ose úsečky  $AB$ , pak se nabízí rychlá — nikoli však eukleidovská — konstrukce bodu  $D$  a odtud celého pětiúhelníku, viz obr. 19.6 na str. 137.
- (2') Z (2) plyne, že pokud se naučíme sestrojít nějaký zlatý trojúhelník, pak již snadno sestrojíme zbylé vrcholy pětiúhelníku. Toto je právě cesta, kterou najdeme v IV.10 a kterou zde pro svoji nezpochybnitelnou působivost představíme. Současně si tak připomeneme několik významných tvrzení z prvních knih Základů hezky pohromadě:

**Věta (IV.10).** *Nechť úsečka  $AK$  je delší částí zlatého řezu úsečky  $AB$  a bod  $L$  je takový, že  $AL = AB$  a  $BL = AK$ . Potom trojúhelník  $ABL$  je **zlatý**, tj. rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobky úhlu zbývajícího ( $\beta = 2\alpha$ ).*

<sup>9</sup>Trojúhelníku s těmito vlastnostmi se říká *zlatý trojúhelník*.

<sup>10</sup>Viz odst. 4.16.



Obrázek 4.22: [Ha] IV.10: Konstrukce zlatého trojúhelníku.

*Důkaz.* V následujícím používáme značení jako na obr. 4.22:

- Z konstrukce trojúhelníku  $AKL$  plyne, že  $AB : BL = BL : BK$  neboli  $BA \cdot BK = BL^2$  (II.11).
- Doplníme-li pro lepší představu kružnici  $AKL$ , pak předchozí veličinu můžeme interpretovat jako mocnost bodu  $B$  ke kružnici; zejména  $BL$  je její tečnou (III.36–37).
- Úsekový úhel  $BLK$  je shodný s obvodovým úhlem  $LAB$  (III.32), tudíž úhel  $ALB$  je roven  $\alpha + \delta$ .
- Přitom trojúhelník  $ABL$  je rovnoramenný, takže (I.5)

$$\beta = \alpha + \delta.$$

- Úhel  $LKB$  je vnějším úhlem v trojúhelníku  $AKL$ , proto je také roven  $\alpha + \delta$  (I.32).
- Odtud plyne, že trojúhelník  $BLK$  je rovnoramenný (I.6), tudíž  $KL = BL = AK$ .
- Proto také trojúhelník  $AKL$  je rovnoramenný, tzn. (znovu I.5)

$$\alpha = \delta.$$

- Celkem tedy dostáváme  $\beta = 2\alpha$ , což jsme měli ukázat.  $\square$

Z uvedeného zejména vyplývá následující poznatek, který si jednou pro vždy vryjeme do paměti:

**Důsledek.** *Úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku se navzájem dělí v poměrech zlatého řezu, jejichž delší části jsou shodné se stranami pětiúhelníku.*

(3') Z podobnosti trojúhelníků v (3) lze předchozí tvrzení vyvodit následovně:

*Jiný důkaz důsledku.* Odpovídající si strany v podobných trojúhelnících  $ADE$  a  $EAF$  jsou úměrné, tedy např.  $AD : DE = EA : AF$ . Současně však platí  $DE = EA = DF$ , tudíž

$$AD : DF = DF : FA.$$

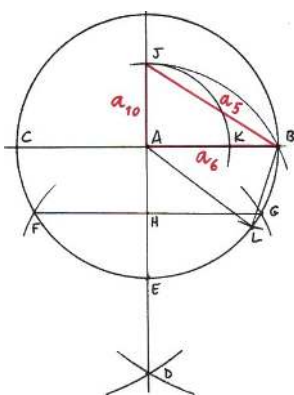
To znamená, že bod  $F$  leží ve zlatém řezu úsečky  $AD$ .  $\square$

### Poznámky

Pomocí zlatého řezu, resp. zlatého trojúhelníku jsme se naučili sestrojít několik specifických úhlů, které se zrovna hodí ke konstrukci pravidelného pětiúhelníku. Z vlastností zlatého trojúhelníku a z věty o součtu vnitřních úhlů obecného trojúhelníku (I.32) plyne, že  $\alpha + 2\beta = 5\alpha = 180^\circ$ , tzn.  $\alpha = 36^\circ$ . Všechny možné úhly, které můžeme v pravidelném pětiúhelníku pozorovat, jsou celočíselnými násobky právě tohoto úhlu.

Sestrojení správného úhlu je klíčové k tomu, abychom sestrojili pravidelný pětiúhelník ať už je zadán jakkoli — stranou, úhlopříčkou, kružnicí opsanou apod. (viz cvičení).

Na obr. 4.23 je připomenuta konstrukce zlatého řezu  $K$  úsečky  $AB$  včetně trojúhelníku  $ABL$ , o kterém byla řeč před chvílí. Velice užitečný poznatek je zformulován v následující větě: první část věty nabízí jistou zkratku při konstruování pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice, na druhou část se budeme opakovaně odkazovat např. při rozboru pravidelného dvacetistěnu (viz odst. 4.21).



Obrázek 4.23: [Ha] Ke konstrukci pravidelného pětiúhelníku.

**Věta.** Úsečky  $AB$ ,  $AJ$ , resp.  $BJ$  na obr. 4.23 jsou shodné se stranami pravidelného šestiúhelníku, desetiúhelníku, resp. pětiúhelníku vepsaného do naznačené kružnice.

Zejména platí, že strana pravidelného pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou strana pravidelného šestiúhelníku, resp. desetiúhelníku vepsaného do téže kružnice.

*Důkaz.* Druhou část tvrzení lze najít v XIII.10 s ryze geometrickým zdůvodněním. V našem provedení tato část přímo plyne z konstrukce, takže dokážeme jenom část první, a to počteně. Délku strany pravidelného  $n$ -úhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem  $r = |AB|$  označíme  $a_n$ . Chceme ukázat, že  $a_6 = |AB|$ ,  $a_{10} = |AJ|$  a  $a_5 = |BJ|$ :

- Rovnost  $a_6 = |AB|$  je zřejmá (pravidelný šestiúhelník je složen ze šesti rovnostranných trojúhelníků).
- Středový úhel odpovídající straně vepsaného desetiúhelníku je  $36^\circ$ , což je právě úhel u vrcholu  $A$  ve zlatém trojúhelníku  $ABL$ . Platí tedy  $a_{10} = |BL|$ . Z konstrukce však víme, že  $|BL| = |AK| = |AJ|$ , platí tedy  $a_{10} = |AJ|$ .

Úsečka  $AK$  je delší částí zlatého řezu úsečky  $AB$ , její velikost umíme (na základě počítání v odst. 4.9) vyjádřit takto:

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

- (c) Středový úhel odpovídající straně vepsaného pětiúhelníku je  $72^\circ$ . Odtud pomocí kosinové věty můžeme vyjádřit

$$a_5 = r\sqrt{2 - 2\cos 72^\circ}.$$

Úhel  $72^\circ$  je také vnitřním úhlem u vrcholu  $B$  ve zlatém trojúhelníku  $ABL$ , jehož všechny strany známe. Pomocí kosinové věty v tomto trojúhelníku umíme vyjádřit

$$\cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$


Dosazením do předchozího vyjádření a po drobné úpravě dostáváme

$$a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Z Pythagorovy věty v trojúhelníku  $ABJ$  (a z předchozího vyjádření  $|AJ| = a_{10}$ ) vyjádříme velikost přepony  $BJ$  a zjišťujeme, že skutečně platí  $a_5 = |BJ|$ .  $\square$

Uvedené počítání opět není samoučelné — chceme čtenáře připravit na fenomén sestrojitelnosti geometrických veličin, ke kterému se vracíme v odst. 4.18. Teprve s těmito postřehy je možné dokázat, že **ne všechny** pravidelné mnohoúhelníky jsou sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem, viz větu 19.1 na str. 136.

#### 4.15 Cvičení

- (1) Sestrojte pravidelný pětiúhelník, je-li dána jeho strana, příp. úhlopříčka, kružnice opsaná, či vepsaná.
- (2) Uvědomte si, že každou z předchozích konstrukcí umíte zrealizovat několika různými způsoby.
- (3) Dokažte tvrzení XIII.10 bez počítání.
-  (4) Sestrojte pravidelný patnáctiúhelník a pokuste se o jiný pravidelný mnohoúhelník.

#### 4.16 Teorie podobnosti

Několikrát jsme v předchozím výkladu naznačili, jak elegantně využít podobnosti jistých trojúhelníků.<sup>11</sup> Protože podobné obraty jsou velice hojné a užitečné, připomeneme si zde několik základních věcí.

##### Základní definice

V Základech je podobnostem věnována VI. kniha, jež začíná touto základní definicí (Def.VI.1):

<sup>11</sup>Viz např. poznámku k důkazu věty III.35–36 na str. 24 nebo rozbor pravidelného pětiúhelníku v odst. 4.14.

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné.

Této definici samozřejmě předchází vymezení *úměrnosti*, tedy rovnosti poměrů veličin. Tomuto tématu se zevrubně věnuje celá (pozoruhodná, i když dnes poměrně těžko srozumitelná) V. kniha. Odtud citujeme jednu ze základních definicí (Def. V.5):

Veličiny  $a, b$  jsou *ve stejném poměru* jako veličiny  $c, d$ ,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla  $m, n$  platí

$$na \stackrel{\geq}{\equiv} mb \iff nc \stackrel{\geq}{\equiv} md.$$

Čísla se samozřejmě myslí čísla celá, veličiny jsou pro moderního čtenáře čísla reálná. Předchozí definici lze tedy interpretovat takto:

Reálná čísla  $r (= \frac{a}{b})$  a  $s (= \frac{c}{d})$  jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo  $q (= \frac{m}{n})$  platí

$$r \stackrel{\geq}{\equiv} q \iff s \stackrel{\geq}{\equiv} q.$$

Nejpozději nyní by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů...<sup>12</sup>

### Základní věty

První a snad i nejčastěji citované tvrzení je VI.1. Dále uvádíme charakterizaci úměrnosti úseček na ramenech úhlu (VI.2) a odtud plynoucí ekvivalenci mezi určujícími vztahy v definici podobných trojúhelníků (VI.4–5). Mezi základní tvrzení řadíme ještě VI.19–20 vyjadřující poměr obsahů podobných útvarů pomocí koeficientu podobnosti a odtud plynoucí zobecnění Pythagorovy věty (VI.31)...

VI.1 *Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základů.*

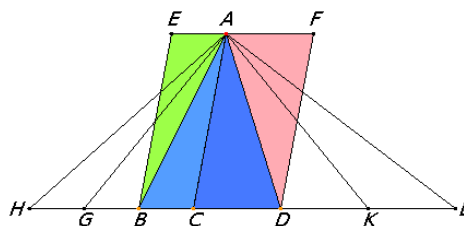
[Tvrzení přímo vyplývá z věty o rovnosti obsahů trojúhelníků (I.38) a z výše uvedené definice rovnosti poměrů.] ◀

VI.2 *Přímka je rovnoběžná s jednou stranou trojúhelníku právě tehdy, když protíná zbylé dvě strany úměrně.*

*Důkaz.* Podle věty VI.1 (se značením jako na obr. 4.25) víme, že

$$\begin{aligned} SD' : SD &= \text{obsah } SD'E : \text{obsah } SDE, \\ SE' : SE &= \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED. \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Reálné číslo  $r$  jakožto Dedekindův řez je určeno množinou všech racionálních čísel, které jsou  $\leq r$  (příp.  $\geq r$ ). Rovnost reálných čísel je tak definována jako rovnost odpovídajících množin čísel racionálních.

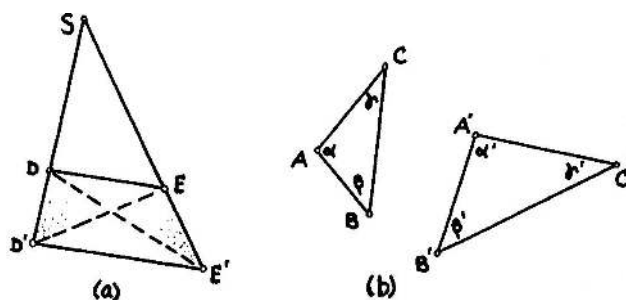


Obrázek 4.24: [E,J] VI.1: obsah  $ACB$  : obsah  $ACD = CB : CD$ .

Přitom jmenovatelé na pravé straně jsou titíž a trojúhelníky  $SD'E$  a  $SE'D$  mají společný průnik  $SDE$ . Tyto trojúhelníky tedy mají stejný obsah, právě když mají stejný obsah trojúhelníky  $DED'$  a  $DEE'$ . Trojúhelníky  $DED'$  a  $DEE'$  však mají společnou stranu, tudíž (podle I.38–39) mají stejný obsah, právě když mají stejnou výšku. Celkem tak dostáváme, že  $SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$ .  $\square$

VI.4–5 *Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly, právě když strany u shodných úhlů jsou úměrné.*

[ Implikace zleva doprava je důsledkem VI.2. Pro opačné tvrzení uvažme pomocný trojúhelník  $ABD$ , který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem  $A'B'C'$ . Pomocí právě dokazaného tvrzení se snadno ukáže, že trojúhelníky  $ABD$  a  $ABC$  jsou shodné. . . ]



Obrázek 4.25: [A] (a) VI.2:  $SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$ .

(b) VI.4–5:  $\alpha = \alpha'$  a  $\beta = \beta'$  a  $\gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c'$  a  $c : a = c' : a'$  a  $a : b = a' : b'$ .

Ekvivalence VI.4–5 se sugestivněji zapisuje jako

$$\alpha = \alpha' \text{ a } \beta = \beta' \text{ a } \gamma = \gamma' \iff a' : a = b' : b = c' : c.$$

Pro podobné trojúhelníky je tedy poměr  $a' : a = b' : b = c' : c$  konstantní. Tento poměr, jakožto (kladné) reálné číslo, se zve *koefficient podobnosti*.

VI.19–20 *Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr druhých mocnin odpovídajících stran.*<sup>13</sup>

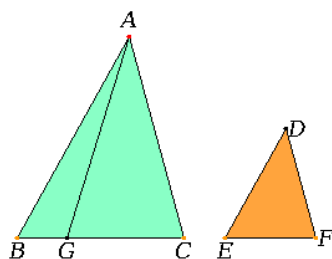
<sup>13</sup>Jinak řečeno: Je-li koefficient podobnosti podobných mnohoúhelníků roven  $k$ , potom poměr jejich obsahů je roven  $k^2$ . Pokud je náhodou koefficient roven 1, potom jsou trojúhelníky shodné, zejména mají stejný obsah.



*Důkaz.* Pomocný bod  $G$  na obr. 4.26 je takový, že  $EF : BG = BC : EF$ . Podle předpokladu je  $AB : DE = BC : EF$  (= koeficient podobnosti, který označíme  $k$ ). To znamená, že  $AB : DE = EF : BG$ , odkud lze velmi podobným způsobem jako v důkaze věty VI.2 vyvodit, že  $\text{obsah } ABG = \text{obsah } DEF$ . Pomocí této rovnosti, věty VI.1 a jedné další úpravy tak dostáváme:

$$\begin{aligned} \text{obsah } ABC : \text{obsah } DEF &= \text{obsah } ABC : \text{obsah } ABG = \\ &= BC : BG = (BC : EF) \cdot (EF : BG) = k^2. \end{aligned}$$

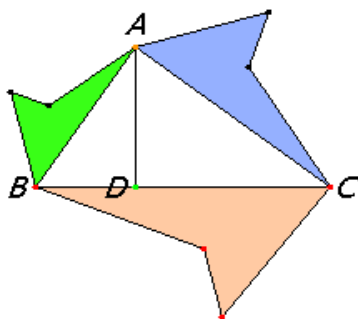
Rozšíření věty na podobné mnohoúhelníky se udělá standardně pomocí triangulace...  $\square$



Obrázek 4.26: [E<sub>J</sub>] VI.19: Pro podobné trojúhelníky  $ABC$  a  $DEF$  platí, že  $\text{obsah } ABC : \text{obsah } DEF = AB^2 : DE^2 = \dots$

VI.31 Zobecnění Pythagorovy věty, viz obr. 4.27.

[Plyne z Pythagorovy věty a VI.20.]



Obrázek 4.27: [E<sub>J</sub>] VI.31: Pokud jsou mnohoúhelníky nad stranami pravouhlého trojúhelníku podobné, potom obsah mnohoúhelníku nad přeponou je roven součtu obsahů těch nad odvěsnami.

### Poznámky

Důsledkem věty VI.1 (nikoli naopak!) je všeobecně známý vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot v,$$

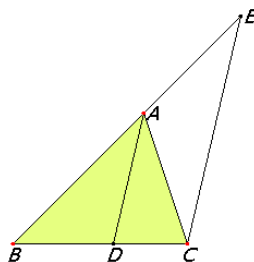
kde  $S$  = obsah trojúhelníku,  $a$  = velikost jedné strany a  $v$  = velikost výšky na tuto stranu.

Celá teorie podobnosti **je** od začátku do konce **závislá** na postulátu (v) o rovnoběžkách (odst. 4.4). To je patrné z předchozích odkazů na věty o obsahích trojúhelníků (I.38–39), jejichž zdůvodnění se neobejde bez věty o střídavých úhlech (I.29)!

Pomocí podobností trojúhelníků je možné dokázat řadu dříve zmiňovaných tvrzení úspornějším, i když ve své podstatě méně elementárním způsobem. Typickými příklady jsou např. Eukleidovy věty o odvěsně a o výšce (sr. s větou VI.8).

#### 4.17 Cvičení

(1) Dokažte větu VI.3, viz obr. 4.28.



Obrázek 4.28: [E<sub>J</sub>] VI.3:  $AD$  je osou úhlu  $BAC \iff DB : DC = AB : AC$ .

- ⇒ (2) Pomocí podobnosti trojúhelníků dokažte Eukleidovu větu o odvěsně, resp. o výšce.  
 (3) Najděte v textu další tvrzení, k jejichž zdůvodnění je — nebo může být — užito podobnosti.

#### 4.18 Sestrojitelné veličiny

V předchozím textu jsme se několikrát dotkli problému sestrojitelnosti reálných veličin. Konstrukci té či oné veličiny chápeme jako konstrukci reálného čísla, které onu veličinu zastupuje. Vzhledem k tomu, že v eukleidovské geometrii neexistuje žádná kanonická jednotka, musí být tato nějak specifikována předem. Základní úloha, které chceme v tomto odstavci porozumět, zní:

- Rozhodněte, zda je dané reálné číslo sestrojitelné. Pokud ano, tak jej — vzhledem k dané jednotce — sestrojte.

Jako obvykle máme na mysli výhradně konstrukce pomocí eukleidovského pravítka a kružítka.

Reálná čísla reprezentujeme úsečkami, jejichž velikosti jsou vždy nezáporné. Pokud tedy potřebujeme operovat se zápornými veličinami, musíme u odpovídajícím úseček jejich zápornou hodnotu nějak označit...

#### Opakování

Algebraické operace, které umíme s pravítkem a kružítkem reprodukovat, jsou následující:

- **Sčítání** a **odčítání** reálných čísel je z konstrukčního hlediska triviální — odpovídá přikládání a odebrání úseček na přímce (viz např. diskuzi nad obr. 4.10 a 4.11).
- Konstrukci **součinu** dvou reálných čísel umíme zdůvodnit nejméně dvojím způsobem — na obr. 4.6 označme  $|AB| = 1$ ,  $|HA| = a$ ,  $|LK| = b$  a  $|HL| = x$ :

- (a) za předpokladu, že na obrázku jsou samé pravoúhelníky, můžeme důsledek věty I.43 formulovat jako

$$a \cdot b = x \cdot 1 \quad \text{neboli} \quad x = a \cdot b.$$

- (b) bez ohledu na to, zda jsou na obrázku pravoúhelníky nebo pouhé rovnoběžníky, z podobnosti trojúhelníků  $HAB$  a  $HKL$  podle věty VI.4 plyne

$$a : 1 = x : b \quad \text{neboli} \quad x = a \cdot b.$$

**Podíl** dvou reálných čísel lze sestrojiti obdobně, akorát by se v konstrukcích prohodil význam některých veličin, např.  $b$  a  $x$ . Je zřejmé, že v obou případech můžeme počet čar ve vlastní konstrukci podstatně eliminovat.

- Eukleidova věta o odvěsně, resp. o výšce (ve specifických případech také věta Pythagorova) poskytuje návod ke konstrukci **druhé odmocniny** z libovolného reálného čísla — viz např. obr. 4.7: pokud je  $|BE| = 1$ ,  $|EF| = a$  a  $|EH| = x$ , potom

$$1 \cdot a = x^2 \quad \text{neboli} \quad x = \sqrt{a}.$$

### Závěr

Z uvedeného opakování plyne, že jsou-li  $a$  a  $b$  sestrojitelná reálná čísla, pak také

$$a + b, a - b, a \cdot b, a : b, \sqrt{a}$$

jsou sestrojitelná čísla. Opakováním těchto operací můžeme sestrojovat další a další čísla — ve skutečnosti platí, že takto lze vyčerpát všechny eukleidovsly sestrojitelné veličiny:

**Věta.** *Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem právě tehdy, když jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu 1 a operací  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$ ,  $\sqrt{\quad}$ , příp. závorek.*

*Idea důkazu.* Jeden směr této ekvivalence máme rozmyšlený, zdůvodnění opačného směru je veskrze algebraické a vypadá zhruba takto:<sup>14</sup>

Začneme s úsečkou představující jednotku a pomocí pravítka a kružítko sestrojujeme další body, resp. úsečky. Jakýkoli eukleidovsly sestrojitelný bod v rovině vzniká z již sestrojených bodů jako průnik dvou přímek, průnik přímky s kružnicí nebo průnik dvou kružnic. Algebraická interpretace každé takové konstrukce vede k řešení soustavy dvou rovnic stupně nejvýše dva ve dvou proměnných. Eliminací jedné proměnné dostaneme kvadratickou rovnici, jejíž koeficienty jsou sestrojitelná čísla! Kořeny libovolné kvadratické rovnice však lze vyjádřit pomocí jejích koeficientů a výše zmiňovaných algebraických operací, viz (4.6). Odtud plyne, že souřadnicové vyjádření každého nového bodu, a tedy i velikosti všech sestrojených úseček, jsou uvedeného tvaru. . . □

### Poznámky

Vzhledem k dané jednotce lze pomocí operací  $+$  a  $-$  sestrojiti libovolné celé číslo, pomocí operací  $\cdot$  a  $:$  lze sestrojiti libovolné racionální číslo. Spolu s operací  $\sqrt{\quad}$  lze sestrojiti mnoho iracionálních čísel, nikoli však všechna iracionální, natož pak transcendentní čísla. Ať děláme, co děláme, drtivá většina reálných čísel eukleidovsly sestrojiti **nelze!** Nejznámější a nejzajímavější důsledky této skutečnosti komentujeme v dodatku 19.1 na str. 134.

<sup>14</sup>Přesnější formulace lze najít např. v [Ha, Mar<sub>2</sub>] nebo [L].

Výše uvedenou charakterizaci sestrojitelných veličin samozřejmě v Základech nenajdeme. Související úlohou, která v Základech vyřešená je, je určení kořenů obecné kvadratické rovnice (viz VI.28–29). Algebraické odvození začíná doplněním do čtverce:


$$\begin{aligned}x^2 + bx + c &= 0, \\x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c, \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.\end{aligned}$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vyjádření

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (4.6)$$

Pokud by vedoucí koeficient nebyl 1, můžeme jím hned na začátku celou rovnici dělit a potom jen předchozí úpravy zreprodukovat. . .

#### 4.19 Cvičení

- (1) Vzhledem k dané jednotce sestrojte  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ,  $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$  apod.
-  (2) Sestrojte kořeny obecné kvadratické rovnice.
- (3) Zkuste svoje řešení předchozí úlohy nějak optimalizovat — viz např. rovnici (4.2) a její řešení na obr. 4.12.

#### 4.20 Trocha stereometrie, objemy těles a obsah kruhu

Stereometrie začíná v Základech XI. knihou, v jejímž úvodu jsou definice základních prostorových útvarů, jejich vztahů a vzájemných poloh. Naši pozornosti by neměly uniknout definice *rovnoběžnosti* a *kolmosti* přímek a rovin, příp. jejich pozdější charakterizace. Zde je několik ukázek, na které se budeme příležitostně odkazovat (první dvě definice známe již z I. knihy):

- Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud leží v téže rovině a nemají žádný společný bod.
- Pokud jsou vedlejší úhly vymezené dvěma protínajícími se přímkami shodné, pak každý z těchto úhlů se nazývá *pravý* a přímky se nazývají *kolmé*.
- Neprotínající se přímky jsou *kolmé*, pokud rovnoběžka k jedné přímce protínající přímku druhou je k ní kolmá.
- Přímka je *kolmá* k rovině, pokud je kolmá ke všem přímkám, které v ní leží.
- Dvě roviny jsou *kolmé*, pokud přímky, které leží v jedné z těchto rovin a jsou kolmé k průsečnici rovin, jsou také kolmé ke druhé rovině (ekvivalentně: pokud jedna z rovin obsahuje přímku, která je kolmá ke druhé rovině).
- Roviny jsou *rovnoběžné*, pokud se neprotínají.
- Apod.

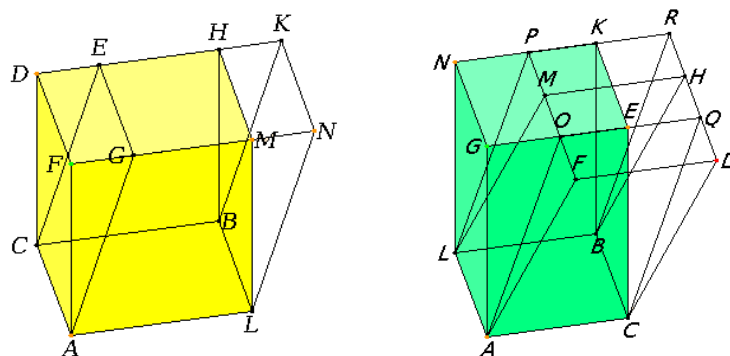
Kromě toho, jsou zde standardní definice základních těles, které není nutné opakovat. Ve zbytku tohoto odstavce se stručně zmíníme o jejich objemech. . .

### Objemy jednoduše

Podstatná část XI. knihy se věnuje **rovnoběžnostěnům** a jejich objemům. Celá teorie je velmi podobná tomu, co známe z I., resp. VI. knihy pro rovnoběžníky.<sup>15</sup>

XI.29–30 *Rovnoběžnostěny se stejnou základnou a stejnou výškou mají stejný objem.*

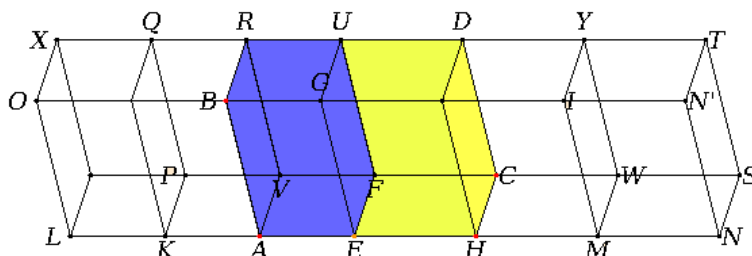
[Zdůvodnění pomocí přesouvání shodných částí (sr. s větou I.35 na str. 15).]



Obrázek 4.29: [E<sub>J</sub>] XI.29: objem  $AH$  = objem  $AK$ . XI.30: objem  $AK$  = objem  $AR$  = objem  $AH$ .

XI.32 *Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základů.*

[Důkaz je naprosto analogický tomu, co známe z VI.1 (viz str. 31)...]



Obrázek 4.30: [E<sub>J</sub>] XI.32: objem  $AU$  : objem  $ED$  = obsah  $AF$  : obsah  $EC$

XI.33 *Poměr objemů podobných rovnoběžnostěnů je stejný jako poměr třetích mocnin odpovídajících stran.*

[Plyne z předchozího a z věty VI.1 (sr. s VI.19–20 na str. 32).]

<sup>15</sup>V následujícím zkracujeme takto: např.  $AH$  značí podle kontextu rovnoběžník nebo rovnoběžnostěn s úhlopříčkou  $AH$ .

**Poznámky.** Z důkazu věty XI.30 vyplývá následující poznatek (sr. s větou 4.6 na str. 17):

- Dva rovnoběžnostěny mají stejný objem právě tehdy, když jeden lze rozdělit na části, z nichž lze složit ten druhý.

Jako důsledek věty XI.32 dostáváme známý vzoreček pro výpočet objemu rovnoběžnostěny (obecněji hranolu):

$$V = S \cdot v,$$

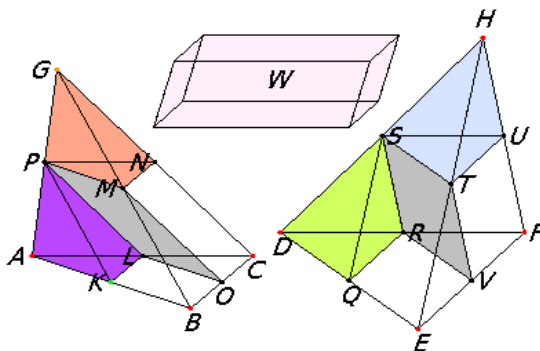
kde  $S$  = obsah podstavy a  $v$  = velikost odpovídající výšky. . .

### Objemy pomocí Eudoxovy metody

Může to vypadat překvapivě, ale diskuze je mnohem komplikovanější, už když se začnou studovat **jehlany**. Základní tvrzení, které se týká objemů jehlanů, je obsaženo v XII.5–6. Jedná se o trojrozměrnou verzi té části věty VI.1, která pojednává o trojúhelnících. Tato věta je však dokázána pomocí Eudoxovy exhaustivní metody, což je starověká předchůdkyně infinitezimálních úvah, jak je známe z matematické analýzy.

XII.5–6 *Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základů.*

[Důkaz je založen na dělení jehlanu na dva trojboké hranoly se stejným objemem a dva shodné jehlany jako na obr. 4.31. . . ]



Obrázek 4.31: [E<sub>J</sub>] XII.5: Pro jehlany se stejnou výškou platí, že objem  $ABCG$  : objem  $DEFH$  = obsah  $ABC$  : obsah  $DEF$ .

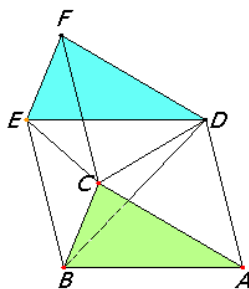
XII.7 *Objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou.*

[Důsledek XII.5.]

XII.8 *Poměr objemů podobných jehlanů (mnohostěnnů) je stejný jako poměr třetích mocnin odpovídajících stran.*

[Trojrozměrná verze VI.19–20 (str. 32); plyne z předchozího a z věty XI.33.]

Odtud jsou opět pomocí Eudoxovy metody odvozena obdobná tvrzení pro kužely a válce, která přeskakujeme (viz XII.10–16). O koulích se zmíníme za chvíli. . .



Obrázek 4.32: [E<sub>J</sub>] XII.7: objem  $ABCD = \text{objem } BCDE = \text{objem } CDEF = \frac{1}{3} \text{objem } ABCDEF$ .

**Poznámky.** Nad důkazem věty XII.5 se objevuje přirozená otázka, zda toto tvrzení nelze zdůvodnit elementárněji pomocí stříhání a skládání jako výše. Z této otázky se postupně stal velice zajímavý problém, který byl úplně vyřešen až v roce 1900 M. Dehnem:<sup>16</sup>

**Věta (Dehnova).** *Pro dva mnohostěny se stejným objemem platí, že jeden lze rozdělit na části, z nichž lze složit ten druhý, právě když tyto mnohostěny mají stejný tzv. Dehnův invariant.*

To zejména znamená, že trojrozměrná analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty (str. 17) obecně **neplatí!**

Důsledkem XII.5–6 je, že jehly se stejnou základnou a stejnou výškou mají stejný objem. Z XII.7 poté vyplývá, že objem obecného jehlanu je třetinový vzhledem k objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot v,$$

kde  $V = \text{objem jehlanu}$ ,  $S = \text{obsah podstavy}$  a  $v = \text{velikost odpovídající výšky}$ . Obdobné vztahy platí také pro kužely a válce.

## O kruhu a kouli

XII. kniha začíná, resp. končí studiem obsahu kruhu, resp. objemu koule:

XII.2 *Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr druhých mocnin jejich průměrů.*

XII.18 *Poměr objemů koulí je stejný jako poměr třetích mocnin jejich průměrů.*

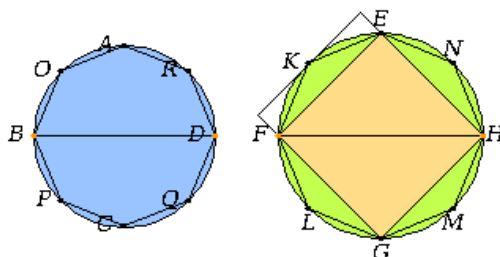
Obě tato tvrzení jsou taktéž dokázána Eudoxovou metodou:

Kruhy (resp. koule) jsou vyčerpávány mnohoúhelníky (mnohostěny), u nichž příslušné porce známe. Protože každé dva kruhy (koule) jsou podobné a tyto se vyčerpávají analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky (mnohostěny) také podobné. Základním tvrzením v celé anabázi je proto věta VI.20, kterou jsme citovali na str. 32 (resp. její trojrozměrná verze XII.8, kterou jsme citovali před chvílí)...

**Poznámky.** Při obvyklém značení můžeme obsah tvrzení XII.2 psát jako

$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2 \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \text{konst.} \quad (4.7)$$

<sup>16</sup>Podrobnosti lze najít např. v [Ha, podkap. 27].



Obrázek 4.33: [E<sub>J</sub>] XII.2: *Obsah kruhu BD : obsah kruhu FH = BD<sup>2</sup> : FH<sup>2</sup>.*

a tvrzení XII.18 jako

$$V_1 : V_2 = r_1^3 : r_2^3 \quad \text{neboli} \quad V_1 : r_1^3 = V_2 : r_2^3 = \text{konst.}$$

Obě tato tvrzení podstatným způsobem doplnil Archimédés:

**Věta** (Archimédova).

- *Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s poloměrem, druhá s obvodem kruhu.*
- *Objem koule je roven dvěma třetinám objemu opsaného válce.*

První část věty říká, že  $S = \frac{1}{2}r \cdot o$ , kde  $r$  = poloměr kružnice a  $o$  = její obvod. To spolu s rovností (4.7) dává

$$S = \frac{1}{2}r \cdot o = \text{konst} \cdot r^2.$$

To znamená, že stejná konstanta vystupuje ve vyjádření jak obsahu, tak obvodu kruhu v závislosti na jeho poloměru. Tradičně se tato konstanta značí  $\pi$ , tudíž

$$S = \pi \cdot r^2 \quad \text{a} \quad o = 2\pi \cdot r.$$

Z druhé části věty plyne, že tatáž konstanta  $\pi$  figuruje také (možná překvapivě) ve vyjádření objemu koule v závislosti na jeho poloměru:

$$V = \frac{2}{3}(S \cdot 2r) = \frac{2}{3}(\pi r^2 \cdot 2r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

#### 4.21 Platónská tělesa

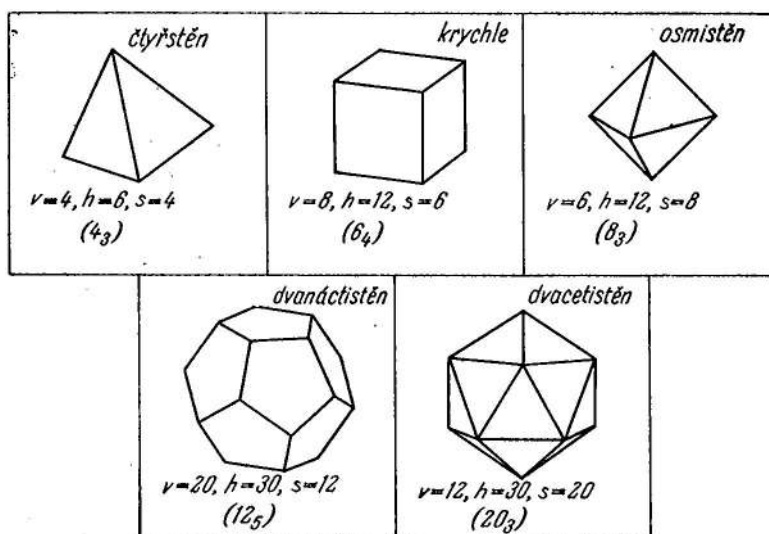
Celé Základy vrcholí popisem konstrukcí pravidelných konvexních mnohostěnů, jejich klasifikací a diskuzí poměrů jejich stran vzhledem k poloměru opsané sféry (XIII.13–18).

*Pravidelný konvexní mnohostěn* je konvexní mnohostěn, který má stejný počet stěn kolem každého vrcholu a jehož stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky.

Pravidelné konvexní mnohostěny mají řadu dalších vlastností, které v definici uvedeny nejsou, ale které z ní plynou — mají všechny stěnové úhly shodné, lze je vepsat do koule atd., viz



[Ha, podkap. 44]. Pravidelné konvexní mnohostěny jsou známy také jako *Platónská tělesa*,<sup>17</sup> viz obr. 4.34.




Obrázek 4.34: [Ko] Pravidelné konvexní mnohostěny.

Rozbor čtyřstěnu, krychle a osmistěnu je velmi snadný, pročež je ponechán jako cvičení (viz XIII.13–15). Ve zbytku tohoto odstavce si rozebereme konstrukci pravidelného dvacetistěnu (XIII.16) a dvanáctistěnu (XIII.17). Opakovaně se budeme odkazovat na pomocná tvrzení XIII.4 (viz cvičení 4.10(4)) a XIII.10, které jsme parafrázovali jako část věty 4.14 na str. 29:

XIII.10 *Ze stran pravidelného pětiúhelníku, šestiúhelníku a desetiúhelníku, jenž jsou vepsány do téže kružnice, lze vytvořit pravoúhlý trojúhelník, jehož přeponou je strana pětiúhelníku.*

Tento seznam Platónských těles je kompletní:

XIII.18 *Existuje právě pět výše uvedených druhů pravidelných konvexních mnohostěnu.*

*Důkaz.* Aby šel z rozvinuté sítě složit konvexní mnohostěn, musí být součet úhlů kolem každého vrcholu ostře menší než plný úhel. Pravidelné konvexní mnohostěny jsou složeny z pravidelných mnohoúhelníků, jejichž vnitřní úhly umíme snadno vypočítat. Odtud vidíme, že Platónská tělesa mohou být složena jedině z trojúhelníků, čtverců nebo pětiúhelníků. Rozborem jednotlivých možností vyčerpáme právě uvedená tělesa. . . □ 

### Pravidelný dvacetistěn

Pravidelný dvacetistěn můžeme sestavit tak, že k bubínkovému základu přidáme dvě čepičky, viz následující obrázky. Bubínkový základ je složen z 10 trojúhelníků, jejichž vrcholy tvoří dva pootočené pravidelné pětiúhelníky, každá z čepiček sestává z 5 trojúhelníků. Aby bylo jasné, jak tyto části správně sestavit, musíme znát jejich výšky, resp. poměry těchto výšek vzhledem k nějaké určující veličině.

<sup>17</sup>Poloprávidelné konvexní mnohostěny jsou známy jako Archimédovská tělesa, pravidelné nekonvexní mnohostěny jako Keplerova tělesa, viz přílohy.

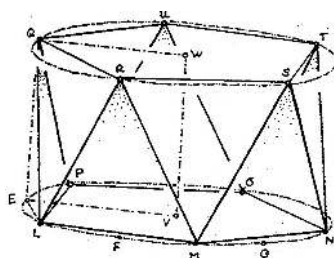
Začneme s kružnicí se středem  $V$ , na níž sestrojíme body  $L, F, M, G, N, \dots$  jakožto vrcholy pravidelného desetiúhelníku — vrcholy  $L, M, N, O, P$  jsou vrcholy dolního pětiúhelníku, vrcholy  $E, F, G, \dots$  představují kolmé průměty horního pětiúhelníku  $QRSTU$ . K sestrojení dvacetistěny potřebujeme zjistit výšku bubínku  $EQ = VW$  a výšku čepičky  $WZ$ . Tvrdíme, že platí

$$EQ = VE \quad (= \text{poloměr kružnice}),$$

$$WZ = LE \quad (= \text{delší část zlatého řezu úsečky } VE).$$

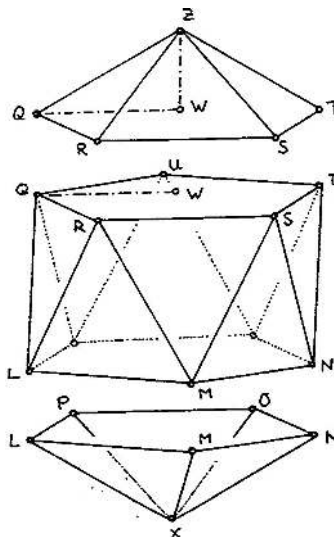
Zdůvodnění je následující:

- (1) Všechny vyznačené trojúhelníky jsou podle předpokladu rovnostranné, zejména  $QL =$  strana pravidelného pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice. Navíc  $LE =$  strana pravidelného desetiúhelníku vepsaného do téže kružnice a trojúhelník  $LEQ$  je pravoúhlý. Z tvrzení XIII.10 plyne, že  $EQ =$  strana pravidelného šestiúhelníku vepsaného do stejné kružnice, tj. právě její poloměr.



Obrázek 4.35: [A] Pravidelný dvacetistěn poprvé:  $EVWQ$  je čtverec.

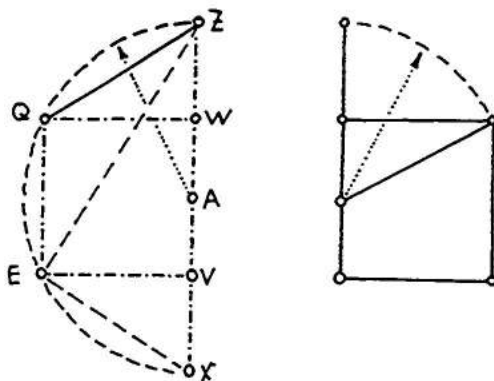
- (2) Trojúhelník  $QWZ$  je pravoúhlý,  $QZ =$  strana pravidelného pětiúhelníku a  $QW =$  strana pravidelného šestiúhelníku vepsaného do stejné kružnice. Znovu podle XIII.10 zjišťujeme, že  $WZ =$  strana vepsaného desetiúhelníku, a tu již máme sestrojenou.



Obrázek 4.36: [A] Pravidelný dvacetistěn podruhé:  $WZ =$  zlatý řez úsečky  $WQ$ .

(3) Pro kontrolu ukážeme, že takto sestrojený dvacetistěn je vepsán do koule:

Na obr. 4.23 na str. 29 je naznačeno, jak jsou sestrojeny strany pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku vepsaného do stejné kružnice. Tato konstrukce byla odvozena z konstrukce zlatého řezu podle II.11. Porovnáním s řezem dvacetistěnu vidíme, že body  $Z, Q, E, X$  leží na kružnici. Rotací této kružnice kolem osy  $ZX$  dostaneme sféru procházející všemi vrcholy dvacetistěnu.



Obrázek 4.37: [A] Pravidelný dvacetistěn potřetí: řez dvacetistěnem a řez zlatý.

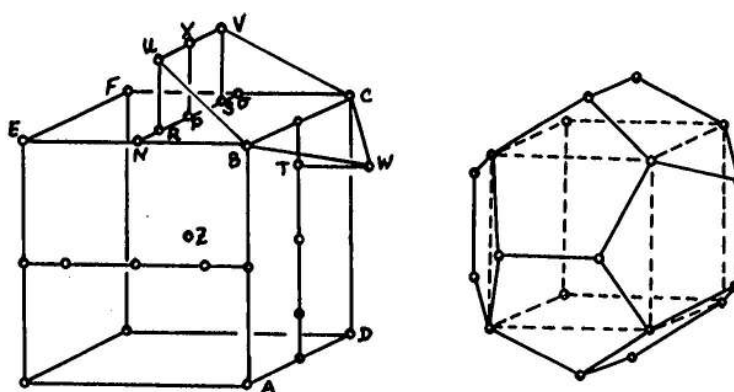
### Pravidelný dvanáctistěn

Pravidelný dvanáctistěn může být sestrojen tak, že se nad krychlí vhodně postaví pětiúhelníkové střechy, viz obr. 4.38. Strana krychle je úhlopříčkou pravidelného pětiúhelníku, který tvoří stěny dvanáctistěnu. To znamená, že stranu dvanáctistěnu snadno sestrojíme jako delší část zlatého řezu strany krychle. Jediné, co potřebujeme ještě znát ke konstrukci dvanáctistěnu, je výška hřebene střechy nad stěnou krychle. V následujícím ukážeme, že tato výška je právě polovinou strany dvanáctistěnu.

Začneme s krychlí, jejíž stěnu  $BCFE$  rozpůlíme úsečkou  $NO$ . Bod  $P$  je středem  $NO$  a bod  $R$  je sestrojen jako zlatý řez úsečky  $PN$ . Hřeben  $UV$  je kolmo nad úsečkou  $RS$ . Tvrdíme, že pokud sestrojíme  $U$  a  $V$  tak, aby

$$SV = RU = RP \quad (= \text{delší část zlatého řezu úsečky } PN),$$

a že pokud zopakujeme stejnou konstrukci nad každou stěnou krychle, dostaneme pravidelný dvanáctistěn.



Obrázek 4.38: [A] Pravidelný dvanáctistěn:  $RU = RP =$  zlatý řez  $PN$ .

Zdůvodnění je následující:

- (1) Ukážeme, že body  $UBCWW$  leží v jedné rovině:

Protože úsečky  $UV$  a  $BC$  jsou rovnoběžné, stačí, když ukážeme, že střed  $X$  úsečky  $UV$ , střed  $H$  úsečky  $BC$  a bod  $W$  leží na jedné přímce. Z tohoto důvodu nyní zaostříme naši pozornost na trojúhelníky  $HPX$  a  $WTH$ . Z konstrukce plyne, že oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a platí

$$PH : PX = PN : PR = PR : RN = TW : TH$$

(první a třetí rovnost odkazuje na rovnost úseček, druhá rovnost je z definice zlatého řezu). To znamená, že tyto trojúhelníky jsou podobné. Protože strany  $PX$  a  $TH$  jsou rovnoběžné, jsou také ostatní dvojice odpovídajících si stran rovnoběžné, a protože strany  $XH$  a  $HW$  mají společný bod, leží body  $X, H, W$  na jedné přímce.

- (2) Ukážeme, že pětiúhelník  $UBCWW$  je pravidelný:

Nejprve ukážeme, že platí rovnost  $BU = UV$ . Z konstrukce víme, že  $RP = RU$  je delší částí zlatého řezu úsečky  $PN = BN$ . V následující posloupnosti úprav se postupně odkazujeme na Pythagorovu větu v trojúhelníku  $BRU$ , Pythagorovu větu v trojúhelníku  $BNR$ , rovnost  $BN = PN$ , větu XIII.4 a rovnost  $RU = RP$ :

$$\begin{aligned} BU^2 &= BR^2 + RU^2 = BN^2 + NR^2 + RU^2 = \\ &= (PN^2 + NR^2) + RU^2 = 3PR^2 + RU^2 = 4PR^2. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že  $BU = 2PR = UV$ . Stejným způsobem se zdůvodní, že ostatní strany pětiúhelníku jsou stejné.

Podobnými úpravami jako před chvílí lze zdůvodnit, že  $BV = BC$ . Odtud podle věty SSS plyne, že trojúhelníky  $BUV$  a  $BWC$  jsou shodné, tudíž vnitřní úhly u vrcholů  $U$  a  $W$  jsou shodné. Stejným způsobem lze zdůvodnit, že ostatní vnitřní úhly pětiúhelníku jsou stejné — pětiúhelník je tedy pravidelný.

- (3) Pro kontrolu, že sestrojený dvanáctistěn je vepsán do koule, stačí ukázat, že vzdálenost středu krychle je stejná od všech vrcholů dvanáctistěnu. Opětovným užitím Pythagorovy věty a věty XIII.4 lze skutečně ukázat, že

$$ZB^2 = ZU^2 = 3BN^2. \quad (4.8)$$

## 4.22 Cvičení

- (1) Dokažte, že platí (4.8).
- (2) Odvoďte vztah mezi stranou pravidelného dvacetistěnu a poloměrem opsané sféry.
- (3) Řešte tutéž úlohu pro ostatní Platónská tělesa a porovnejte s vyjádřením v XIII.18.
- (4) Popište možné konstrukce ostatních Platónských těles.



## 5 Úloha Apollóniova a úlohy příbuzné

Úkolem obecné Apollóniovy úlohy je sestrojít kružnici, která se dotýká tří daných kružnic. Sestrojit jako obvykle znamená sestrojít eukleidovským pravítkem a kružítkem. To znamená, že se pídíme hlavně po dotykových bodech, teprve poté kreslíme výslednou kružnici. Jako limitní případy uvažujeme místo daných kružnic také body a přímky v různých kombinacích. V závislosti na vzájemných polohách tří daných objektů, může mít úloha různé počty řešení — v nejobecnějším případě osm.

Původní Apollóniovo (kolem 250 př.K.) řešení se nezachovalo, několik poznámek je známo díky Pappovi z Alexandrie (kolem 400). Následující výklad částečně sleduje rekonstrukci podle F. Viëta (kolem 1600), kde se zejména užívá dilatace k redukci složitosti obecnějších případů. V tomto duchu se pracujeme od nejjednodušších úloh tohoto typu až k (téměř) obecné Apollóniově úloze. Kromě dilatace budeme ještě odkazovat na stejnolehlost, různé souměrnosti a mocnost bodu ke kružnici. V odst. 7.6 se naučíme něco o kruhové inverzi, která nabízí alternativní a často velmi elegantní konstrukce. Tento přístup je spojován se jménem J. Petersena (1879). Metod řešení Apollóniovy úlohy existuje vskutku mnoho, o některých dalších se zmiňujeme ještě v dodatku 20.

### 5.1 Pomocné konstrukce a postřehy

U dotykových — tedy i Apollóniových — úloh je velmi často výhodné uvažovat místo obyčejného dotyku dotyk orientovaný. Tím se zpravidla zpřehlední řešení úlohy, přičemž všechna (neorientovaná) řešení lze vždy vyčerpát kombinováním všech možných orientací daných objektů. V takových případech budeme místo o kružnicích a přímkách mluvit o cyklech a paprscích:

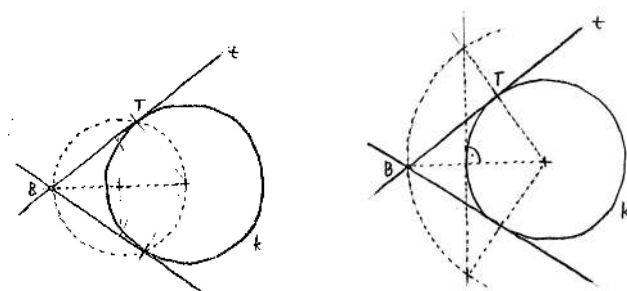
*Cyklus* = orientovaná kružnice, *paprsek* = orientovaná přímka.

Základní pomocné úlohy, které v souvislosti s Apollóniovými úlohami budeme potřebovat, se týkají konstrukcí tečen ke kružnicím (příp. paprsků k cyklům).

#### Tečna z bodu ke kružnici

V závislosti na vzájemné poloze bodu a kružnice může mít úloha 0, 1, resp. 2 řešení, a to právě když daný bod leží uvnitř, na, resp. vně kružnice. Jediným netriviálním případem je ten posledně jmenovaný, jehož konstrukční řešení jsme zmiňovali již ve cvičení 4.13. Tuto úlohu umíme řešit dvojitým způsobem, viz obr. 5.39:

- (a) pomocí Thaletovy kružnice (III.31),
- (b) pomocí jisté souměrnosti (III.17).



Obrázek 5.39: Tečna z bodu  $B$  ke kružnici  $k$ : (a) pomocí Thaletovy kružnice; (b) pomocí souměrnosti.

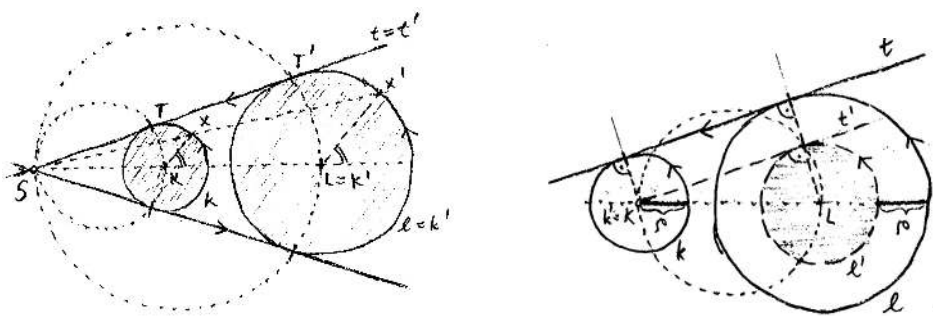
### Společné tečny dvou kružnic

Konstrukci společných tečen ke dvěma daným kružnicím lze redukovat na předchozí konstrukci, a to několikerým způsobem:

- (a) pomocí stejnolehlosti,
- (b) pomocí dilatace.

Obě tyto transformace budou hrát významnou roli při řešení Apollóniových úloh. Každé z nich se sice věnujeme až v odstavcích 7.4 a 7.1, ale už nyní je budeme volně používat. V souvislosti se stejnolehlostí odkazujeme pouze na fakt, že každé dvě kružnice jsou stejnolehlé (dvojným způsobem) a že obrazem každé přímky je přímka s ní rovnoběžná (nebo splývající). U dilatací musíme důsledně uvažovat orientované kružnice neboli cykly. Dilatací cyklu o nějakou hodnotu  $\rho$  vznikne cyklus, který je s daným cyklem soustředný a jehož poloměr je o  $\rho$  větší, příp. menší v závislosti na znaménku  $\rho$  a orientaci.

V závislosti na vzájemné poloze kružnic může mít úloha od 0 do 4 řešení. Pokud hledáme tečné paprsky ke dvěma cyklům, má úloha nejvýše 2 řešení; řešení jedné takové úlohy je na obr. 5.40.



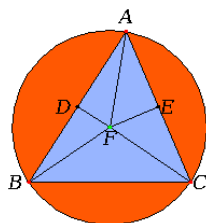
Obrázek 5.40: Společné orientované tečny ke dvěma cyklům  $k, l$ : (a) pomocí stejnolehlosti; (b) pomocí dilatace.

## 5.2 Nejjednodušší případy

V prvních čtyřech úlohách jsou v zadání pouze body (B) nebo přímky (P).

**BBB**

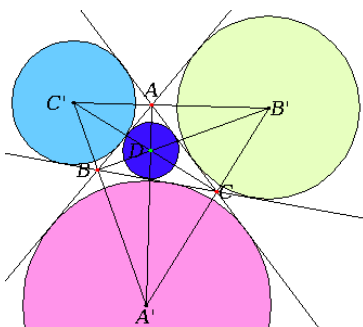
Kružnice procházející třemi danými body (v obecné poloze) je právě kružnice opsaná trojúhelníku, viz obr. 5.41. Sestrojit střed hledané kružnice znamená sestrojiti 2–3 **osy úseček**. Pro různé nekolineární body má úloha jediné řešení.



Obrázek 5.41: [E<sub>J</sub>] IV.5: Kružnice opsaná trojúhelníku.

**PPP**

Jedna z kružnic, která se dotýká tří daných přímek (v obecné poloze), je kružnice vepsaná trojúhelníku, viz obr. 5.42. Sestrojit řešení znamená sestrojiti několik **os úhlů**. Úloha má nejvýše 4 řešení.



Obrázek 5.42: [E<sub>J</sub>] IV.4: Kružnice vepsaná mezi tři přímky.

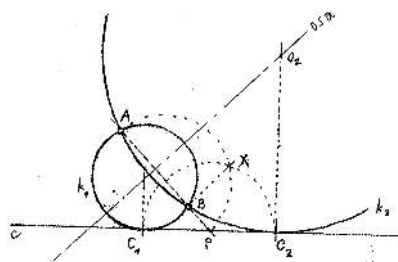
**BBP**

Tato úloha má nejvýše 2 řešení. Obecný případ jsme řešili jako cvičení 4.13(6) pomocí postřehů založených na **mocnosti** bodu ke kružnici:

Každý bod na přímce  $AB$  má stejnou mocnost ke všem kružnicím procházejícím body  $A, B$ . Řešení  $k$  se navíc dotýká přímky  $c$ , pro bod  $P = AB \cap c$  tedy platí

$$PA \cdot PB = PC^2.$$

Stačí sestrojiti velikost úsečky  $PC$ , kterou nanese na přímku  $c$ .



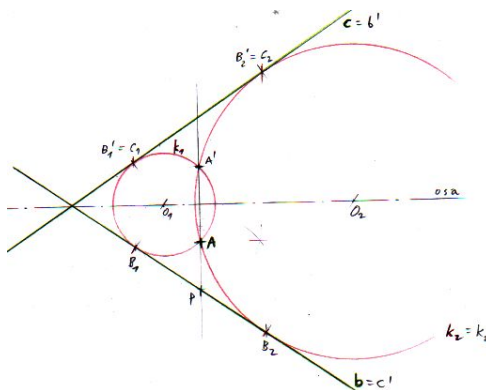
Obrázek 5.43: Řešení BBP  $(A, B, c)$  pomocí mocnosti:

- (1)  $P$  je průsečík přímek  $AB$  a  $c$ ,
- (2)  $C$  je sestrojen na přímce  $c$  tak, aby platilo  $|PC| = \sqrt{|PA| \cdot |PB|}$ ,
- (3) kružnice  $k$  je určena body  $A, B, C$ .

### BPP

Tady nás napadají hned dva elementární způsoby řešení. Úloha má nejvýše 2 řešení.

- (a) Každé řešení je samo k sobě **symetrické** podle naznačené osy úhlu. K danému bodu  $A$  stačí sestrojít symetrický bod  $A'$ , zapomenout na jednu přímku a řešit úlohu BBP, kterou již umíme.

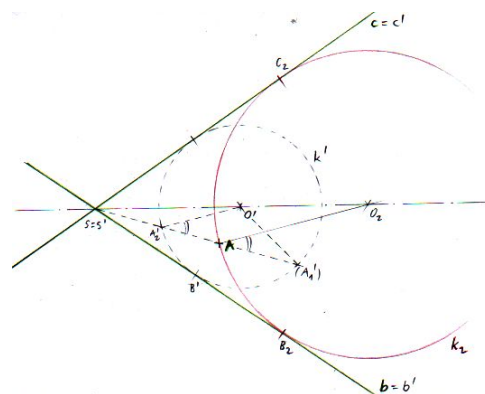


Obrázek 5.44: Řešení BBP  $(A, b, c)$  pomocí osové souměrnosti:

- (1)  $A'$  je symetrický k  $A$  podle osy,
- (2)  $k$  je kružnice, která prochází body  $A, A'$  a dotýká se  $b$  (úloha BBP),
- (3) pozn.: body dotyku  $k$  s přímkami  $b$  a  $c$  jsou symetrické podle osy.

- (b) Dvě kružnice řešení jsou **stejnolehlé** se středem stejnolehlosti v průsečíku daných přímek. Obecněji,  $k$  je stejnolehlá (s tímž středem) s libovolnou kružnicí  $k'$ , která se dotýká  $b$  a  $c$  (a leží ve správném kvadrantu). Středů těchto dvou kružnic a dotykové body s přímkami  $b$  a  $c$  si odpovídají v oné stejnolehlosti, odpovídající si přímky jsou tudíž rovnoběžné. . .





Obrázek 5.45: Řešení BPP  $(A, b, c)$  pomocí stejnolehlosti:

- (1)  $k'$  je libovolná kružnice, která se dotýká  $b$  a  $c$ ,
- (2)  $A'$  je průsečík polopřímky  $SA$  s kružnicí  $k'$ ,
- (3) střed  $O$  a dotykové body  $B$  a  $C$  jsou vymezeny pomocí rovnoběžek.

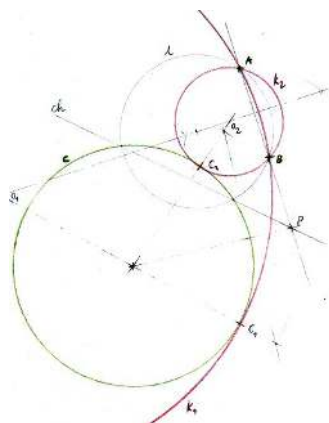
### 5.3 Mírná zobecnění

Uvádíme první dvě úlohy, u kterých se v zadání objevuje kružnice (K).

#### BBK

Tato úloha má nejvýše 2 řešení, která můžeme najít podobně jako u BBP:

Každý bod na přímce  $AB$  má stejnou **mocnost** ke všem kružnicím procházejícím body  $A, B$ . Řešení  $k$  se navíc dotýká kružnice  $c$ , na přímce  $AB$  tedy existuje bod  $(P)$ , který má tutéž mocnost také ke kružnici  $c$ . Zejména tedy společná tečna ke kružnicím  $c$  a  $k$  ve společném dotykovém bodě prochází bodem  $P$ . Stačí tedy sestrojít bod  $P$  (pomocí libovolné pomocné kružnice procházející body  $A, B$ ) a odtud tečnu ke kružnici  $c$  . .



Obrázek 5.46: Řešení BBK  $(A, b, c)$  pomocí mocnosti:

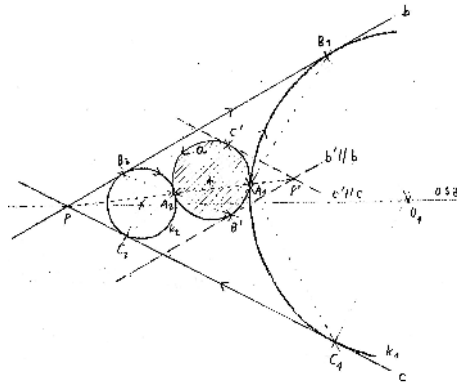
- (1)  $l$  je libovolná kružnice procházející  $A, B$ ,
- (2)  $ch$  je chordála kružnic  $l$  a  $c$ ,
- (3)  $P$  je průsečíkem chordály a přímky  $AB$ ,
- (4)  $C$  je dotykový bod tečny z bodu  $P$  ke kružnici  $c$ ,
- (5) kružnice  $k$  je určena body  $A, B, C$ .

## PPK

Tento typ úlohy má nejvýše 8 řešení. S dosavadními dovednostmi ji umíme řešit alespoň dvěma způsoby.

(a) Zobecnění řešení BPP(b):

Každé dvě kružnice jsou **stejnolehlé**. Nyní se díváme na danou kružnici  $a$  a kružnici řešení  $k$  — jejich dotykový bod je jedním ze středů stejnohlosti. Při této stejnohlosti se přímky  $b$  a  $c$  zobrazí do rovnoběžek  $b' \parallel b$  a  $c' \parallel c$ , které se dotýkají kružnice  $a$ . Průsečík těchto přímek  $P' = b' \cap c'$  je obrazem průsečíku  $P = b \cap c$ , přímka  $PP'$  tudíž prochází středem stejnohlosti. . .

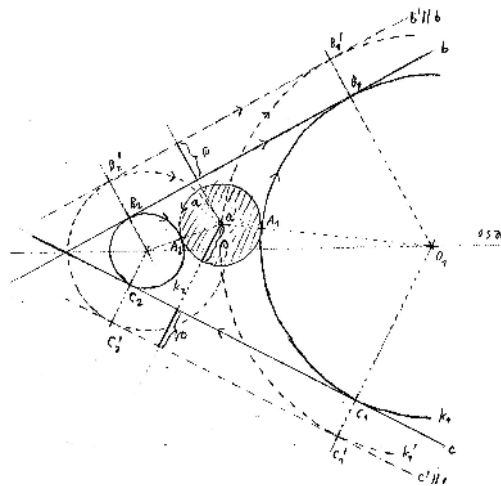


Obrázek 5.47: Řešení PPK  $(b, c, a)$  pomocí stejnolehlosti:

- (1)  $b'$  a  $c'$  jsou přímky rovnoběžné s  $b$  a  $c$  dotýkají se kružnice  $a$ ,
- (2)  $P'$  je průsečíkem  $b'$  a  $c'$ ,
- (3) (střed stejnolehlosti)  $A = A'$  je průsečíkem přímky  $PP'$  s kružnicí  $a$ ,
- (4) střed  $O$  a dotykové body  $B$  a  $C$  jsou vymezeny pomocí rovnoběžek, resp. středu stejnolehlosti.

(b) Pomocí vhodné **dilatace** lze tento typ úlohy redukovat na výše diskutovaný případ BPP:

Pro zvolené orientace dilatujeme tak, aby kružnice  $a$  degenerovala do bodu. Přímky  $b$  a  $c$  se při této dilataci posunou o poloměr kružnice  $a$  (na správnou stranu v závislosti na orientaci). Tím je problém redukován na případ BPP, který již umíme. . .



Obrázek 5.48: Řešení PPK  $(b, c, a)$  pomocí dilatace:

- (1)  $b'$  a  $c'$  jsou přímky rovnoběžné s  $b$  a  $c$ , které jsou posunuté o poloměr kružnice  $a$ ,
- (2)  $k'$  je kružnice, která prochází bodem  $a' = A'$  a dotýká se přímek  $b', c'$  (úloha BPP),
- (3) dotykové body kružnice  $k$  leží na spojnicích se středem  $O$ .

## 5.4 Další zobecnění a výhled

Pomocí nápadů, které jsme zmiňovali v této podkapitole, lze řešit řadu dalších případů, viz cvičení. Navíc ve specifických případech bývá řešení podstatně jednodušší. Mezi takové případy patří např. zadání, v němž se některé z daných objektů dotýkají, příp. je v zadání bod, který leží na některém ze zbylých objektů.<sup>18</sup> Jiným specifickým případem může být situace, kdy dvě z daných kružnic mají stejný poloměr — při shodné orientaci můžeme obě kružnice současně dilatovat do bodu a dořešení takové úlohy je vždy snadné viz např. obr. 6.54 na str. 56.

Obecnou Apollóniovu úlohu můžeme vždy pomocí dilatace redukovat na případ, kdy aspoň jedna z daných kružnic je nahrazena bodem. Pomocí kruhové inverze lze dále problém transformovat tak, že hledáme nanejvýš společné tečny ke dvěma kružnicím, viz dodatek 20.1 na str. 138. Kruhová inverze může být velmi užitečná a současně elegantní i jinak, viz např. obr. 9.28 na str. 89.

Kromě kruhové inverze však existují elementárnější (což nemusí nutně znamenat konstrukčně jednodušší) řešení. Jednou takovou ukázkou toto téma prozatím uzavřeme.

### BKK

Tento typ úlohy má nejvýše 4 řešení. Ukážeme, jak lze tento případ redukovat na jednodušší případ BBK.

Uvažujme bod  $A$ , kružnice  $b, c$  a jedno řešení  $k$  s dotykovými body  $B$  a  $C$  jako na obr. 5.49. Bod  $S$  je (vnějším) středem **stejnolehlosti** kružnic  $b$  a  $c$ . Bod  $R$ , resp.  $B'$  je další průsečík přímky  $BC$  s kružnicí  $b$ , resp.  $c$ . Velmi snadno lze zdůvodnit, že přímky  $RO_b$  a  $CO_c$ , resp.  $BO_b$  a  $B'O_c$  jsou rovnoběžné, tudíž dvojice bodů  $R, C$ , resp.  $B, B'$  si odpovídají vzhledem k oné stejnohlosti. Zejména tedy přímka  $BC$  prochází bodem  $S$ . Další dvě dvojice odpovídajících si bodů jsou označeny  $P, P'$  a  $Q, Q'$ . Z uvedeného vyplývá, že

$$SC : SR = SB' : SB = SP' : SP = SQ' : SQ \quad (= \text{koeficient stejnohlosti}).$$

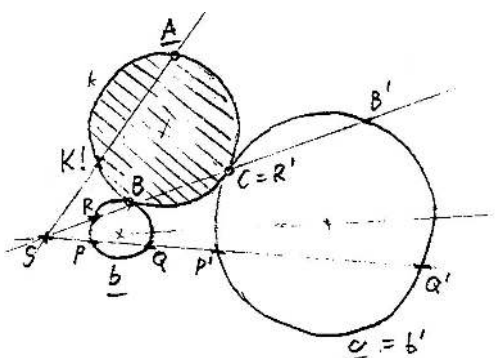
Odtud lze vyvodit různé důsledky, např.  $SB \cdot SC = SP \cdot SQ'$ .

Tento součin je však právě **mocnost** bodu  $S$  ke kružnici  $k$ , což je totéž jako  $SK \cdot SA$ , kde  $K$  je průsečík přímky  $SC$  s kružnicí  $k$ . Celkem tedy vidíme, že platí

$$SK \cdot SA = SP \cdot SQ'.$$

Stačí tedy sestrojít velikost úsečky  $SK$ , kterou nanese na přímku  $SA$  — hledanou kružnici  $k$  pak můžeme sestrojít jako kružnici, která prochází body  $A, K$  a dotýká se  $b$  (příp.  $c$ ).

<sup>18</sup>Úlohy tohoto typu se občas nazývají *Pappovy úlohy*.



Obrázek 5.49: Řešení BKK  $(A, b, c)$  pomocí stejnolehlosti a mocnosti:

- (1)  $S$  je střed stejnolehlosti kružnic  $b, c$ ,
- (2)  $P, Q, P', Q'$  jsou průsečíky těchto kružnic s libovolnou přímkou jdoucí bodem  $S$ ,
- (3)  $K$  je sestrojen na přímce  $SC$  tak, aby platilo  $|SK| = |SP| \cdot |SQ'| : |SA|$ ,
- (4)  $k$  je kružnice, která prochází body  $A, K$  a dotýká se  $b$  (úloha BBK),
- (5) pozn.: dotykové body  $B$  a  $C$  jsou kolinéární s  $S$ .

## 5.5 Cvičení

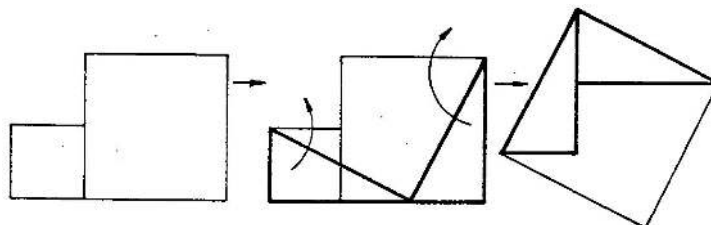
- (1) Řešte případ BPK v takové poloze, že daný bod leží na dané přímce.
- (2) Řešte případ KKK za předpokladu, že dvě z daných kružnic mají stejný průměr.
- (3) Řešte podobné úlohy v podobně specifických případech.
- (4) Řešte obecnou Apollóniovu úlohu se třemi kružnicemi.



## 6 Typické úlohy

### 6.1 Kvadratura mnohoúhelníku

V odst. 4.6 jsme se naučili, jak pro obecný mnohoúhelník sestrojít čtverec se stejným obsahem. Představili jsme jeden z možných způsobů podle [E]. Navíc jsme si uvědomili, že tato stejnopločnost lze vždy realizovat nejnázornějším možným způsobem, a to rozstříháním a přeskládáním daného útvaru. Pro každé konkrétní zadání je vždy vhodné zamýšlet se nad alternativami. Zejména pro specifické mnohoúhelníky lze vymyslet specifická řešení, viz např. následující obrázek:



Obrázek 6.50: [Ku<sub>3</sub>] Kvadratura dvou čtverců.

Protože se zde sestroyuje čtverec, který má stejný obsah jako dva dané čtverce, lze tuto konstrukci interpretovat jako důkaz Pythagorovy věty (sr. s I.47 na str. 14). Pokud byste kvadraturu takového mnohoúhelníku provedli nějakým jiným způsobem, vytvoříte svůj vlastní důkaz této základní geometrické věty...

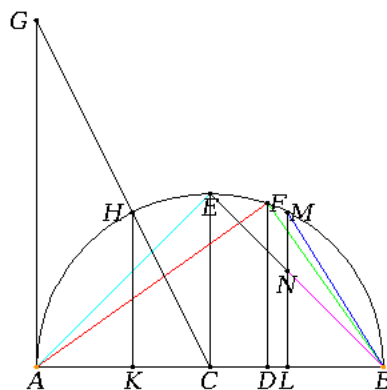
## 6.2 Sestrojitelné veličiny

V odst. 4.18 jsme charakterizovali eukleidovsky sestrojitelné veličiny a uvědomili jsme si vztah mezi jejich početním vyjádřením a konstrukcí. Současně jsme si na příkladu uvědomili, že doslovná konstrukce odvozená ze zápisu obvykle nebývá ta optimální. Jinou ukázkou tohoto fenoménu lze najít v následujícím příkladu (viz cvičení 4.22):

Pokud  $s$  značí velikost strany pravidelného konvexního mnohostranu a  $d$  průměr jemu opsané sféry, potom

- pro čtyřstěn platí  $d^2 : s^2 = 3 : 2$ ,
- pro osmistěn platí  $d^2 : s^2 = 2$ ,
- pro krychli platí  $d^2 : s^2 = 3$ ,
- pro dvanáctstěn platí  $d^2 : s^2 = (3 - \sqrt{5}) : 6$ ,
- pro dvacetstěn platí  $d^2 : s^2 = 2\sqrt{5} : (\sqrt{5} - 1)$ .

Pro dané  $d$  je odpovídající  $s$  jednoznačně určeno a z uvedených vyjádření bychom měli tuto veličinu umět sestrotit. Vymyslete nějakou svoji konstrukci, poté najděte sestrotěnou veličinu na následujícím obrázku (kde  $d = |AB|$ ,  $C$  je v polovině,  $K, L$  jsou ve čtvrtinách a  $D$  je ve třetině úsečky  $AB$ ).

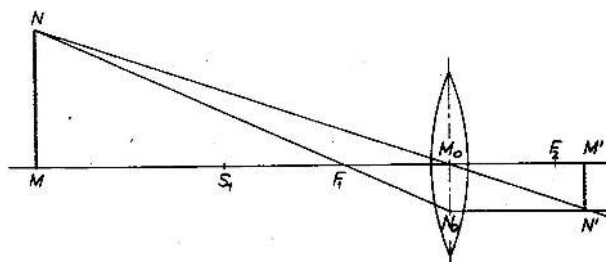


Obrázek 6.51:  $[E_J]$  Strany pravidelných mnohostran vepsaných do sféry...

## 6.3 Podobnosti

Základní věty teorie podobnosti jsme představili v odst. 4.16. Aplikací těchto tvrzení je celá řada, oblíbené jsou např. úlohy s měřením vzdáleností, resp. velikostí rozličných (často nedostupných)

objektů. Na následujícím obrázku je zadání jedné takové úlohy:




Obrázek 6.52: [G9] Obraz předmětu se nachází 14 cm od čočky a je vysoký 3,2 cm, čočka má ohniskovou vzdálenost 10 cm. Určete skutečnou výšku předmětu a jeho vzdálenost od čočky.

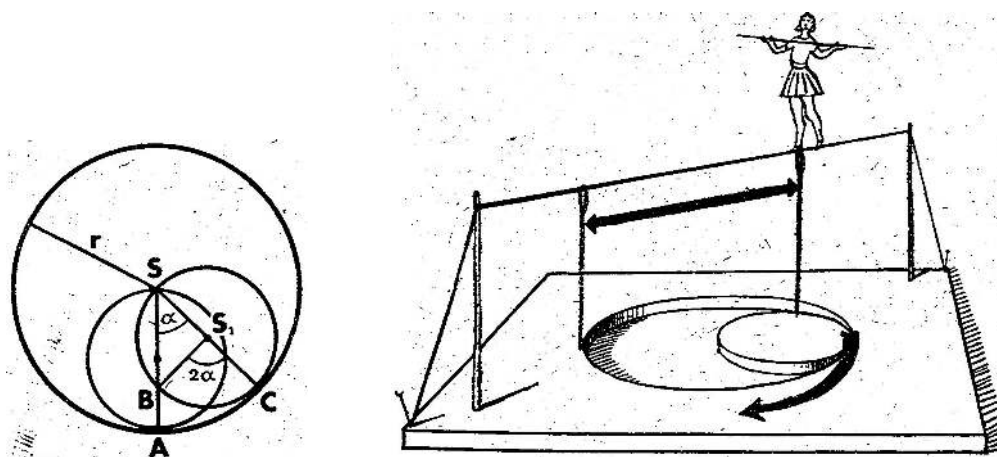
V následujících úlohách se na podobnost útvarů odkazujeme ještě při řešení problémů na obr. 6.54 a 6.56.

## 6.4 O kružnicích

### Středové a obvodové úhly

Když se kružnice kutálí po přímce nebo jiné kružnici, opisuje každý její bod křivku — v obecném případě cykloidu. Ve specifických případech se může stát, že tato křivka je podstatně jednodušší.

Pokud např. uvažujeme kružnici, která se odvaluje uvnitř kružnice s dvojnásobným poloměrem, potom lze s odkazem na větu o středových a obvodových úhlech (viz odst. 4.12) jednoduše zdůvodnit, že každý její bod se pohybuje po úsečce, která je průměrem velké kružnice. Na následujícím obrázku je náčrtek k důkazu a současně jedna z mnoha praktických aplikací tohoto tvrzení. 

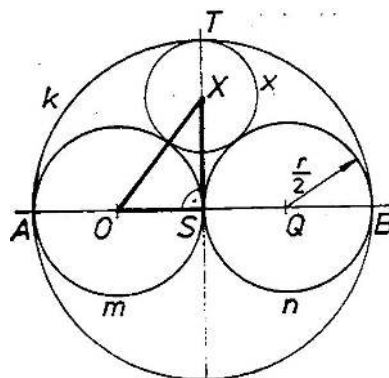


Obrázek 6.53: [Pe] Kotoulení kružnice uvnitř kružnice s dvojnásobným poloměrem.

### Specifická úloha Apollóniova

V podkap. 5 jsme se seznámili s několika metodami řešení několika úloh Apollóniova typu. Obecnou úlohu se třemi kružnicemi zatím řešit neumíme, ale specifické zadání na obr. 6.54 zajisté

ano.



Obrázek 6.54: [Ku<sub>3</sub>] Kružnice  $k, m, n$  se navzájem dotýkají, přičemž středy všech tří kružnic jsou kolineární a kružnice  $m, n$  mají stejný průměr. Sestrojte kružnici, která se těchto tří kružnic dotýká.

Tuto úlohu umíme řešit několika různými způsoby, a to pomocí

- (a) pojmu mocnosti bodu ke kružnici,
- (b) vhodné stejnolehlosti,
- (c) dilatace.

Kromě toho lze použít

- (d) jistou souměrnost (trik),
- příp. můžeme polohu středu hledané kružnice
- (e) vypočítat a následně tento bod sestrojít.

Po přečtení odst. 7.6 můžeme ještě doplnit řešení pomocí

- (f) kruhové inverze.

⇒ Doplňte nějaké další řešení a rozhodněte, který z uvedených postupů lze aplikovat v obecnějším případě, kdy kružnice  $m, n$  mají různé průměry. (Viz též podobnou úlohu na obr. 6.56.)

### Dvě úlohy Archimédovy

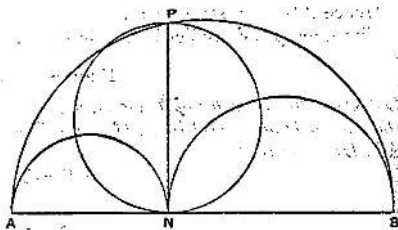
Následující úloha se vrací k obsahu plochy omezené kružnicemi:

Úsečka  $AB$  je průměrem velké kružnice, bod  $N$  je libovolný bod na  $AB$ , bod  $P$  leží na půlkružnici tak, že  $PN \perp AB$ , a úsečky  $AN, NB$  jsou průměry dvou menších kružnic. Dokažte, že — nezávisle na poloze bodu  $N$  — je obsah oblasti omezené třemi půlkružnicemi stejný jako


⇒ obsah kruhu s průměrem  $PN$ .<sup>19</sup>

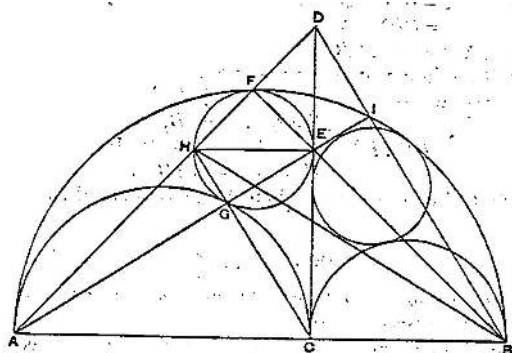
<sup>19</sup>Nápověda: věta o obsahu kruhu a Eukleidova věta o výšce.





Obrázek 6.55: [HTD] Obsah oblasti omezené půlkružnicemi  $AB$ ,  $AN$  a  $NB$  je stejný jako obsah kruhu  $PN$ .

Na následujícím obrázku jsou opět tři navzájem se dotýkající půlkružnice  $AB$ ,  $AC$ ,  $CB$ , kolmice z jejich společného bodu  $C$  a dvě další kružnice, z nichž každá se dotýká dvou půlkružnic a kolmice  $CD$ . Sestrojit tyto dvě kružnice nejspíš ještě neumíme, avšak pomocí základní teorie podobnosti lze dokázat, že obě tyto kružnice jsou shodné — a to nezávisle na poloze bodu  $C$ .<sup>20</sup> 



Obrázek 6.56: [HTD] Kružnice dotýkající se kolmice  $CD$  a půlkružnic  $AB$ ,  $AC$ , je shodná s kružnicí dotýkající se kolmice  $CD$  a půlkružnic  $AB$ ,  $CB$ .

<sup>20</sup>Nápověda:  $HE \parallel AB$ ,  $CH \parallel BD$  a dvakrát věta VI.2  $\implies AC \cdot CB = AB \cdot HE$ .



V této kapitole se věnujeme užitečným geometrickým zobrazením. Některá známe z dřívějších, několik dalších příkladů doplníme, hlavně však popíšeme jejich obecné vlastnosti a zařadíme do širšího kontextu. Hlavní páteř tvoří shodná—podobná—afinní—projektivní zobrazení, jimž bychom měli rozumět nejlépe. Kromě toho se zmíníme o kruhové inverzi (jakožto základním konformním zobrazení) a dilataci (jakožto zástupci čeledi kontaktních zobrazení).

Ve výkladu zpravidla začínáme se zobrazeními eukleidovské roviny do sebe, některé věty a definice jsou však formulovány obecně. V těchto formulacích mluvíme o eukleidovských prostorech, čímž myslíme přímkou ( $\dim = 1$ ), rovinu ( $\dim = 2$ ) a prostor ( $\dim = 3$ ).<sup>1</sup> Nejpozději před definicí projektivních zobrazení budeme donuceni eukleidovský prostor rozšířit o body v nekonečnu — to je tzv. projektivní rozšíření eukleidovského prostoru.<sup>2</sup>

Postřehy a závěry z podkapitoly 7 ještě shrneme a zorganizujeme v podkapitole 8. Zejména si dáváme záležet, abychom v každé skupině zobrazení rozuměli tzv. základním zobrazením.

## 7 Panoptikum geometrických zobrazení

V předchozím výkladu jsme narazili na několik geometrických zobrazení v podkap. 5. Všechny zmiňované příklady jsou připomenuty a doplněny v prvních čtyřech odstavcích. Na konci odst. 7.6 se proto můžeme znova ohlédnout za obecnou Apollóniovou úlohou a zamyslet se nad alternativními řešeními.

Zbylé dva odstavce budou naopak zásadní v kapitole IV, tzn. při studiu zobrazovacích metod trojrozměrného prostoru do roviny.

### 7.1 Dilatace a kontaktní zobrazení

O dilataci jsme několikrát mluvili v podkap. 5, kde jsme však uvažovali výhradně dilatace cyklů a paprsků, tj. orientovaných kružnic a přímek. V tomto odstavci chceme porozumět dilataci jako

<sup>1</sup>Triviálním případem je také bod ( $\dim = 0$ ), který zpravidla z našich úvah vylučujeme.

<sup>2</sup>Kruhová inverze má jako definiční obor eukleidovskou rovinu bez jednoho bodu, u dilatace je všechno úplně jinak...

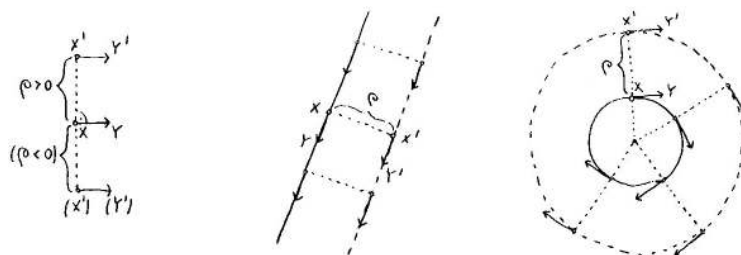
takové.

Na rozdíl od všech ostatních zobrazení v tomto textu — **dilatace není bodové zobrazení!** To znamená, že nemá smysl mluvit o obrazu bodu  $X$ , protože ten může být při jedné a téže dilataci zobrazen do různých bodů, a to v závislosti na tom, na kterém cyklu, resp. paprsku tento bod chápeme. Pokud je však  $X$  bodem dotyku dvou cyklů, resp. cyklu a paprsku, potom se při dilataci tento dotyk zachovává.<sup>3</sup> Dilatace tedy není zobrazení na množině bodů, je to však zobrazení na množině tzv. orientovaných dotykových (kontaktních, příp. tečných) elementů: orientovaný dotykový element je určen bodem a směrem (ekvivalentně jej můžeme reprezentovat polopřímkou, vektorem vázaným v bodě apod.).

Obecněji, každé zobrazení definované na množině orientovaných dotykových elementů se nazývá **kontaktní zobrazení**. Každé bodové zobrazení je kontaktní (přesněji: určuje jednoznačně kontaktní zobrazení), avšak opačné tvrzení neplatí. Právě dilatace je význačným a v tomto kurzu jediným představitelem této skupiny geometrických zobrazení.

*Dilatace je kontaktní zobrazení určené reálným číslem  $\rho \neq 0$  tak, že obraz orientovaného kontaktního elementu zastoupeného vektorem  $\overrightarrow{XY}$  je reprezentován vektorem  $\overrightarrow{X'Y'}$ , který je posunut o vzdálenost  $\rho$  kolmo k  $\overrightarrow{XY}$ , a to na správnou stranu v závislosti na orientaci:*

*Konvence je taková, aby směrový vektor  $\overrightarrow{XY}$  a vektor posunutí  $\overrightarrow{XX'}$  (v tomto pořadí) tvořily kladnou bázi, když  $\rho$  je kladné, a zápornou bázi, když  $\rho$  je záporné.*



Obrázek 7.1: Vlevo je naznačen obraz dotykového elementu  $(XY)$  v závislosti na znaménku  $\rho$ . Další dva obrázky ilustrují obraz paprsku, resp. cyklu jakožto obálky jejich dotykových elementů pro  $\rho > 0$ .

### Poznámky

Pokud říkáme, že „dilatujeme křivku“ o nějakou hodnotu  $\rho$ , rozhodně musí být tato křivka nějak **orientovaná!** Přesněji „dilatace orientované křivky“ probíhá tak, že si v každém jejím bodě představíme odpovídající tečný paprsek, ten posuneme o danou vzdálenost  $\rho$  ve správném směru a výsledná křivka je obálkou těchto posunutých paprsků.

Pozor, klidně se může stát, že spojitá křivka dilatuje na křivku nespojitou! To se může stát např. v bodech vratu, viz obr. 7.2. Jako užitečné cvičení doporučujeme dilatovat několik dalších písmen malé psací abecedy (orientovaných podle toho, jak byla napsána), a to jak v kladném, tak záporném smyslu. . .



<sup>3</sup>Pokud je  $X$  bodem dotyku dvou kružnic s opačnými orientacemi, potom se při dilataci tento dotyk nezachovává!



Obrázek 7.2: Dilatace spojitě křivky orientované podle toho, jak byla nakreslena (pro  $\rho < 0$ ).

## 7.2 Osová souměrnost a shodná zobrazení

Dva trojúhelníky jsou shodné, když mají po dvou shodné strany a vnitřní úhly. Charakterizace shodnosti trojúhelníků poskytují věty SUS, SSS apod.

Dva shodné obecné trojúhelníky jednoznačně určují shodné zobrazení roviny do sebe takové, že jeden trojúhelník je obrazem toho druhého.<sup>4</sup> To znamená, že pro libovolný další bod v rovině jsme schopni sestavit jeho obraz, a to dokonce několikerým způsobem, viz cvičení. Při těchto konstrukcích si uvědomujeme vlastnosti obecných shodných zobrazení, které připomínáme v závěru tohoto odstavce.

### Shodnosti v rovině

Shodností v rovině je pouze několik málo druhů, z nichž většinu známe od nejútlejšího věku — měly by to být shodnosti (a)–(d) z níže uvedeného seznamu. U každé z těchto shodností přesně víme, jak je definována, co jsou její určující prvky a jak sestavit obraz obecného bodu. Základní shodností v rovině je *osová souměrnost*, a to z následujícího důvodu:

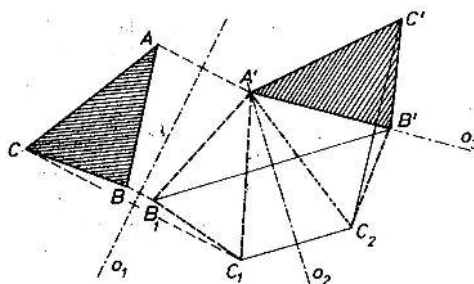
**Věta** (o skládání osových souměrností). *Každou shodnost v rovině lze realizovat jako složení nejvýše tří osových souměrností.*

*Důkaz.* Zdůvodnění věty v nejobecnějším možném případě je naznačeno na obr. 7.3 — shodnost je určena obrazem  $A'B'C'$  obecného trojúhelníku  $ABC$ :

- Označme  $o_1$  osu úsečky  $AA'$  a sestrojme osově souměrný obraz  $A_1B_1C_1$  trojúhelníku  $ABC$  podle této osy; z volby  $o_1$  plyne, že  $A_1B_1C_1 = A'B_1C_1$ .
- Označme  $o_2$  osu úsečky  $B_1B'$  a sestrojme osově souměrný obraz  $A_2B_2C_2$  trojúhelníku  $A'B_1C_1$  podle této osy; ze shodností  $AB = A_1B_1 = A'B'$  plyne, že  $o_2$  prochází bodem  $A' = A_1$ , tudíž  $A_2B_2C_2 = A'B'C_2$ .
- Označme  $o_3$  osu úsečky  $C_2C'$  a sestrojme osově souměrný obraz  $A_3B_3C_3$  trojúhelníku  $A'B'C_2$  podle této osy; z předchozího a ze shodností všech trojúhelníků plyne, že  $o_3 = A'B'$ , tudíž  $A_3B_3C_3 = A'B'C'$ .  $\square$

Pokud by v zadání nebo v kterémkoli kroku předchozí konstrukce splývalo více bodů nejednou se zadanými obrazy, konstrukce by byla kratší a výsledná shodnost specifitější. Takto jsme schopni klasifikovat všechny druhy shodností, které v rovině můžeme potkat:

<sup>4</sup> Uvědomte si, že např. dva shodné rovnostranné trojúhelníky neurčují shodné zobrazení jednoznačně, a to díky symetriím trojúhelníka jako takového.



Obrázek 7.3: [Sek] Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností.

- (a) *identita* = složení dvou osových souměrností takových, že  $o_1 = o_2$ ,
- (b) *posunutí* = složení dvou osových souměrností takových, že  $o_1 \parallel o_2$ ,
- (c) *otáčení* = složení dvou osových souměrností takových, že  $o_1$  a  $o_2$  jsou různoběžné,
- (c') *středová souměrnost* = složení dvou osových souměrností takových, že  $o_1$  a  $o_2$  jsou kolmé,
- (d) *osová souměrnost* = osová souměrnost,
- (e) *posunutá souměrnost* = složení tří obecných osových souměrností jako výše.

Středová souměrnost je otáčení o přímý úhel, proto ji podřazujeme obecnému otáčení. První tři transformace jsou *přímé* (zachovávají orientaci), poslední dvě *nepřímé* (mění orientaci). Pojmenování posledního (generického) druhu je odvozeno z toho, že každou posunutou souměrnost lze realizovat jako složení osové souměrnosti a posunutí. Na obr. 7.3 tento rozklad nemusí být na první pohled patrný, na obr. 7.4 však určitě ano!



Obrázek 7.4: [Mar] Posunutá souměrnost.

### Shodnosti obecně

Zobrazení mezi eukleidovskými prostory je *shodné*, když zachovává vzdálenosti bodů, tj. pro libovolné body  $A, B$  a jejich obrazy  $A', B'$  platí:

$$|A'B'| = |AB|. \quad (7.1)$$

Shodná zobrazení mají samozřejmě další vlastnosti, které v definici neuvádíme — uvědomte si, že z definice vyplývá, že shodná zobrazení (mezi prostory dimenze aspoň dva)


- zobrazují přímky na přímky,<sup>5</sup>
- zachovávají odchylky přímek,
- zachovávají obsahy, resp. objemy.

Přímo z definice také plyne, že každé shodné zobrazení je **prosté**. Každá shodná transformace, tedy shodné zobrazení eukleidovského prostoru do sebe, je proto nutně bijektivní. Bijektivní shodné zobrazení se stručně nazývá *shodnost*.

Na přímce máme pouze dvě shodnosti: posunutí (přímá) a středovou souměrnost (nepřímá). Klasifikace shodností v prostoru je o něco bohatější než v rovině, většinu druhů však zase zná každý. Na rozdíl od transformací v rovině je středová souměrnost v prostoru nepřímá a osová souměrnost (otáčení kolem přímky o příčný úhel) je přímá. Základní shodností v prostoru je *souměrnost podle roviny* (zrcadlení). Zájemci mohou přemýšlet nad zobecněním věty na str. 61. . .

Shodností se s úspěchem užívá při řešení mnoha konstrukčních úloh, viz např. příklad na obr. 5.44.

### 7.3 Cvičení

- (1) Připomeňte si definice všech výše jmenovaných shodností, zejména popište jejich určující prvky.
- (2) Pro dva dané shodné trojúhelníky rozhodněte, zda jsou osově souměrné (zformulujte nějaké přirozené kritérium). 
- (3) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
  - pojmenujte odpovídající shodnost a popište její určující prvky,
  - vyjádřete tuto shodnost jako složení osových souměrností,
  - alespoň dvojím způsobem sestrojte obraz libovolného dalšího bodu.

### 7.4 Stejnolehlost a podobná zobrazení

Dva trojúhelníky jsou podobné, když mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné. Úvod do teorie podobnosti spolu s charakterizací podobných trojúhelníků máme v odst. 4.16.

Dva podobné (obecné) trojúhelníky jednoznačně určují podobné zobrazení roviny do sebe takové, že jeden trojúhelník je obrazem toho druhého. To znamená, že pro libovolný další bod v rovině jsme schopni sestrojít jeho obraz, a to dokonce několikerým způsobem, viz cvičení. Při těchto konstrukcích si uvědomujeme vlastnosti obecných podobných zobrazení, které připomínáme v závěru tohoto odstavce.

#### Stejnolehlost (škálování, homotetie)

Stejnolehlost je základní podobnost, která je obecně definována takto:

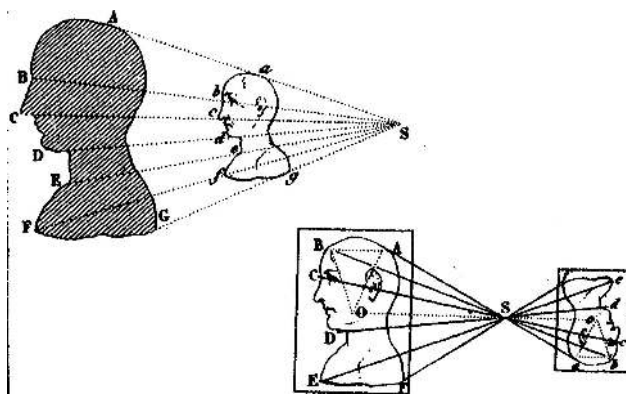
<sup>5</sup>Nápověda: charakterizujte body na přímce  $AB$  pomocí vzdáleností od  $A$  a od  $B$ .

*Stejnolehlost* je transformace eukleidovského prostoru (libovolné dimenze), která je určena středem  $S$  a koeficientem  $k \in \mathbb{R}$ , a to tak, že obraz  $X'$  libovolného bodu  $X$  leží na přímce  $SX$  a platí:

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX} \quad \text{neboli} \quad X' = S + k \cdot \overrightarrow{SX}. \quad (7.2)$$

Speciální, resp. degenerované případy — které zpravidla za stejnolehlosti nevydáváme — odpovídají hodnotám  $k = 1, -1$ , resp.  $0$  a jsou to identita, středová souměrnost, resp. nulové zobrazení (všechno se zobrazuje do jediného bodu).

Nezávisle na znaménku koeficientu  $k$  je stejnolehlost v rovině vždy přímým zobrazením. V trojrozměrném prostoru (a taky na přímce) je tomu jinak — v takovém případě je stejnolehlost přímá, právě když  $k > 0$ .



Obrázek 7.5: [Be] Stejnolehlost v rovině je vždy přímá.

Střed stejnolehlosti je jejím jediným samodružným (pevným) bodem a všechny přímky procházející tímto bodem se zobrazují samy do sebe. S odkazem na větu VI.2 (str. 31) si uvědomujeme, že libovolná přímka se zobrazuje na přímku, která je s ní rovnoběžná. Odtud zejména vyplývá možný návod ke konstrukci obrazu obecného bodu vzhledem k dané stejnolehlosti.

Tuto vlastnost (každá přímka se zobrazuje na přímku s ní rovnoběžnou) má pouze několik dalších transformací, jmenovitě identita a posunutí. Odtud plyne, že skládáním stejnolehlostí nelze obdržet nic jiného než identitu, posunutí nebo obecnou stejnolehlost. Upřesnění je v následující větě, jejíž zdůvodnění plyne opět hlavně z věty VI.2:

**Věta** (o skládání stejnolehlostí). *Složení dvou stejnolehlostí se středy  $S_1, S_2$  a koeficienty  $k_1, k_2$  je:*

- (a) *identita, právě když  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 = S_2$ ,*
- (b) *posunutí, právě když  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 \neq S_2$ ,*
- (c) *obecná stejnolehlost, právě když  $k_1 k_2 \neq 1$ .*

*Navíc platí, že v případě (b) je vektor posunutí násobkem vektoru  $\overrightarrow{S_1 S_2}$  a v případě (c) leží střed výsledné stejnolehlosti na přímce  $S_1 S_2$  (pokud  $S_1 \neq S_2$ ).*



### Stejnolehlý obraz kružnice a Mongeova věta

V souvislosti s výše diskutovanými úlohami o kružnicích doplňujeme následující jednoduché tvrzení:

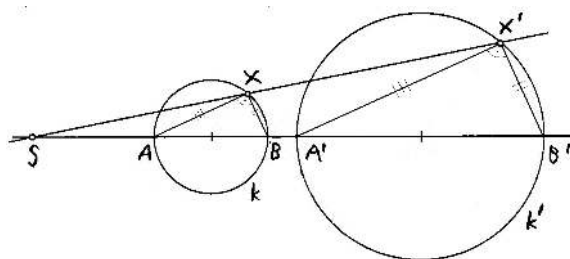
**Věta.** *Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice.*

*Navíc, každé dvě neshodné kružnice v rovině jsou stejnohlé, a to dvojím způsobem.*

*Důkaz.* Zdůvodnění plyne z vlastností stejnohlosti, Thaletovy věty, resp. věty opačné, viz obr. 7.6:

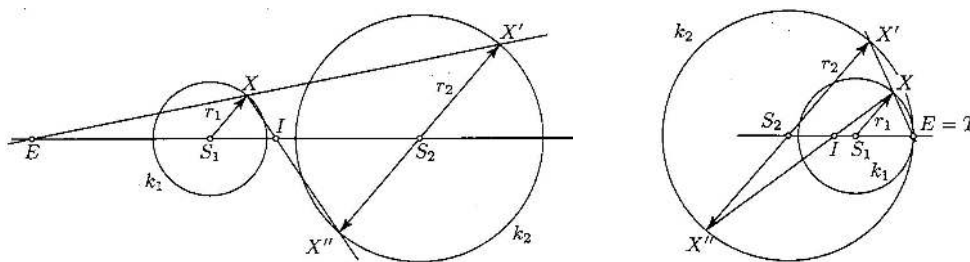
Pro libovolný bod  $X \in k$  podle Thaletovy věty platí, že úhel  $AXB$  je pravý. Pro obrazy bodů  $A, X, B$  vzhledem k libovolné stejnohlosti platí, že  $A'X' \parallel AX$  a  $B'X' \parallel BX$ , tudíž úhel  $A'X'B'$  je také pravý. To znamená, že bod  $X'$  leží na kružnici s průměrem  $A'B'$ .

Konstrukce středů stejnohlostí dvou daných kružnic pomocí rovnoběžných průměrů je na obr. 7.7 (viz též obr. 5.40). To, že si v těchto stejnohlostech odpovídají také všechny ostatní body kružnic, plyne z právě dokázaného tvrzení.  $\square$



Obrázek 7.6: Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice.

Pro dvě dané neshodné kružnice se koeficienty odpovídajících stejnohlostí liší pouze znaménkem (absolutní hodnota je rovna poměru poloměrů daných kružnic). Střed, který odpovídá stejnohlosti s kladným znaménkem, nazýváme *vnější*, ten druhý nazýváme *vnitřní*. Tyto dva středy splývají, právě když dané kružnice jsou soustředné. Pokud se kružnice dotýkají zvenku, resp. zevnitř, potom vnější, resp. vnitřní střed stejnohlosti splývá s bodem dotyku. Dvě shodné kružnice mají pouze vnitřní střed stejnohlosti (příp. můžeme říct, že ten vnější je v nekonečnu).



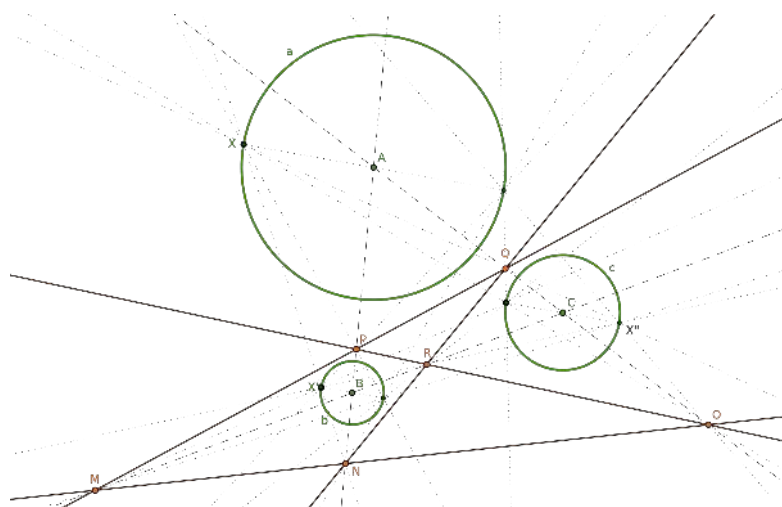
Obrázek 7.7: [Ku] Každé dvě kružnice jsou stejnohlé, a to dvojím způsobem.

Bezprostředním důsledkem předchozích dvou tvrzení je následující věta:

**Věta (Mongeova).** *Pro tři kružnice v rovině platí, že vnější středy stejnolehlostí jsou kolineární, stejně tak každé dva vnitřní středy stejnolehlostí a jeden vnější jsou kolineární.*

*Důkaz.* Uvažme obecnou situaci jako na obr. 7.8 (ve speciálních případech mohou některé středy stejnolehlostí splývat nebo se objevit v nekonečnu). Ukážeme, že trojice středů  $N, R, Q$  leží na přímce; ostatní tři případy jsou analogické:

Bod  $N$  je vnějším středem stejnolehlosti kružnic  $a, b$ , bod  $R$  je vnitřním středem stejnolehlosti kružnic  $b, c$  a bod  $Q$  je vnitřním středem stejnolehlosti kružnic  $a, c$ . Složením prvních dvou stejnolehlostí dostáváme stejnolehlost, která zobrazuje kružnici  $a$  na kružnici  $c$ , a to tak, že bodu  $X \in a$  odpovídá bod  $X'' \in c$ . To znamená, že středem této stejnolehlosti je právě bod  $Q$ . Z třetí části věty o skládání stejnolehlostí plyne, že bod  $Q$  leží na přímce  $NR$ .  $\square$



Obrázek 7.8: Mongeova věta: Šest středů stejnolehlostí tří kružnic tvoří vrcholy tzv. úplného čtyřrohu.

Stejnolehlost byla několikrát použita při řešení několika speciálních Apollóniových úloh v podkap. 5. Mongeova věta tvoří jednu ze tří komponent, z nichž se skládá zdůvodnění Gergonnova řešení obecné Apollóniové úlohy, viz dodatek 20.2.

### Obecná podobnost

Zobrazení mezi eukleidovskými prostory je *podobné*, když pro libovolné body  $A, B$  a jejich obrazy  $A', B'$  platí:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|, \quad (7.3)$$

kde  $k$  je kladná reálná konstanta, tzv. koeficient podobnosti.

Podobná zobrazení s koeficientem  $k = 1$  jsou shodná. Podobná zobrazení mají další — odvozené — vlastnosti, které v definici nemusíme uvádět. Z definice plyne, že podobná zobrazení (mezi prostory dimenze aspoň dva)

- zobrazují přímky na přímky,

- zachovávají odchylky přímek,
- obsahy, resp. objemy s mění  $k^2$ -, resp.  $k^3$ -krát.

Zdůvodnění je obsaženo v (nebo plyne z) odst. 4.16. Z definice také přímo plyne, že každé podobné zobrazení je **prosté**. Každá podobná transformace, tedy podobné zobrazení eukleidovského prostoru do sebe, je proto nutně bijektivní. Bijektivní podobné zobrazení se stručně zove *podobnost*. ◀

Pokud obecnou podobnost s koeficientem  $k$  složíme s nějakou stejnolehlostí s koeficientem  $\frac{1}{k}$ , pak výsledné zobrazení je shodnost. Odtud můžeme vydedukovat následující tvrzení:

**Věta.** *Každou podobnost lze realizovat jako složení shodnosti a stejnolehlosti (a to mnoha různými způsoby).*

Spolu s větou na str. 61 můžeme předchozí tvrzení formulovat také tak, že každou podobnost v rovině lze realizovat jako složení stejnolehlosti a nejvýše tří osových souměrností. . .

## 7.5 Cvičení

- (1) Doplňte podrobnosti ve větě o skládání stejnolehlostí; dokažte, že vektor posunutí v případě (b) je  $\mathbf{v} = (1 - k_2)\overrightarrow{S_1S_2'}$  a střed stejnolehlosti v případě (c) je  $S = S_1 + \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{S_1S_2'}$ .
- (2) Pro dva dané podobné trojúhelníky rozhodněte, zda jsou stejnohlé (zformulujte nějaké přirozené kritérium). ◀
- (3) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
  - vyjádřete odpovídající podobnost jako složení stejnolehlosti a shodnosti,
  - alespoň dvojím způsobem sestrojte obraz libovolného dalšího bodu,
  - pokuste se určit samodružný bod této podobnosti.
- (4) Sestrojte přímku spojující daný bod s průsečíkem dvou různoběžných přímek, který je mimo rýsovací plochu.

## 7.6 Kruhová inverze a konformní zobrazení

V této podkapitole představíme základní konformní zobrazení v rovině — kruhovou inverzi.

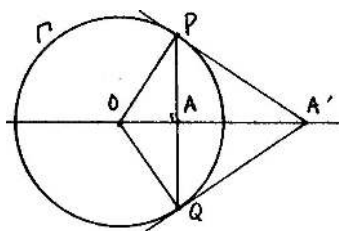
### Definice a zřejmé vlastnosti

*Kruhová inverze* je transformace eukleidovské roviny bez jednoho bodu  $O$ , která je určena kružnicí se středem  $O$  a poloměrem  $r$ , a to tak, že obraz  $X'$  libovolného bodu  $X \neq O$  leží na polopřímce  $OX$  a platí:


$$|OX| \cdot |OX'| = r^2.$$

Určující kružnici budeme zpravidla nazývat *řídící* a značit  $\Gamma$ . Přímo z definice a Eukleidovy věty o odvěsně plyne možný návod ke konstrukci obrazu daného bodu, viz obr. 7.9:

$PA'$  je tečna ke kružnici  $\Gamma$ , trojúhelník  $OPA'$  je tedy pravoúhlý;  $A$  je pata výšky z vrcholu  $P$ ; podle Eukleidovy věty o odvěsně tedy platí  $OA \cdot OA' = OP^2 = r^2$ . Odtud je konstrukce zřejmá bez ohledu na to, zda bod  $A$  je uvnitř nebo vně řídící kružnice. . .



Obrázek 7.9: [Ha] Obraz bodu při kruhové inverzi určené kružnicí  $\Gamma$ .

 Z definice dále plynou následující zřejmá tvrzení:

**Věta.** (a) Kruhová inverze je involutivní transformace, tzn. složení dvou kruhových inverzí s toutéž řídicí kružnicí je identita.

(b) Všechny body na řídicí kružnici jsou samodružné, tzn. zobrazují se samy na sebe.

(c) Všechno, co je vně řídicí kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.

(d) Každá přímka procházející středem inverze se zobrazuje sama do sebe; přitom jediné samodružné body jsou průsečíky s řídicí kružnicí a  $\lim_{X \rightarrow \infty} X' = O$ .

Z posledně jmenované vlastnosti je patrné, proč v definici vylučujeme případ  $X = O$ : Všechny body v **nekonečnu** se zobrazují do středu  $O$  a naopak, obrazem středu  $O$  by mohl být libovolný bod v nekonečnu. I kdybychom eukleidovskou rovinu o tyto body rozšířili (což tak jako tak za chvíli uděláme), obraz středu  $O$  by nebyl určen jednoznačně. Právě tuto vlastnost budeme v dalším s oblibou využívat!

### Další vlastnosti

Kruhová inverze má mnoho dalších nesamozřejmých, ale velmi užitečných vlastností, které si nyní postupně představíme.

**Věta.** Při kruhové inverzi s řídicí kružnicí  $\Gamma$  a středem  $O$  platí:

(e) Přímka neprocházející středem  $O$  se zobrazuje na kružnici procházející středem  $O$ , a naopak.

(f) Kružnice kolmá ke  $\Gamma$  se zobrazuje sama do sebe. Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke  $\Gamma$ .

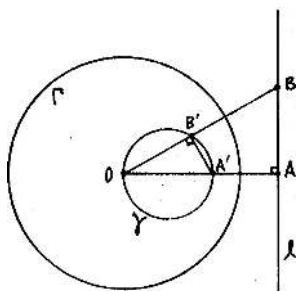
(g) Obecná kružnice neprocházející středem  $O$  se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející  $O$ .

*Důkazy.* (e) Na obr. 7.10 uvažujeme přímku  $l$ , patu  $A$  kolmice ze středu  $O$  na přímku  $l$ , obraz  $A'$  bodu  $A$  vzhledem ke kruhové inverzi určené kružnicí  $\Gamma$  a kružnicí  $\gamma$  s průměrem  $OA'$ . Ukážeme, že kružnice  $\gamma$  je obrazem přímky  $l$ , a naopak.

Pro libovolný bod  $B \in l$  ozn.  $B'$  průsečík  $OB \cap \gamma$ . Podle Thaletovy věty je úhel  $OB'A'$  pravý. Trojúhelníky  $OAB$  a  $OA'B'$  jsou oba pravoúhlé a mají společný úhel u vrcholu  $O$ . To znamená, že se shodují ve všech vnitřních úhlech a jsou tudíž podobné. Odtud plyne, že

$$OB' : OA = OA' : OB \quad \text{neboli} \quad OB' \cdot OB = OA' \cdot OA.$$

Body  $A, A'$  si však odpovídají vzhledem ke kruhové inverzi  $\Gamma$ , tudíž  $OB' \cdot OB = OA' \cdot OA = r^2$ . Odtud plyne, že libovolný bod na přímce  $l$  se zobrazuje do bodu na kružnici  $\gamma$ , a naopak.



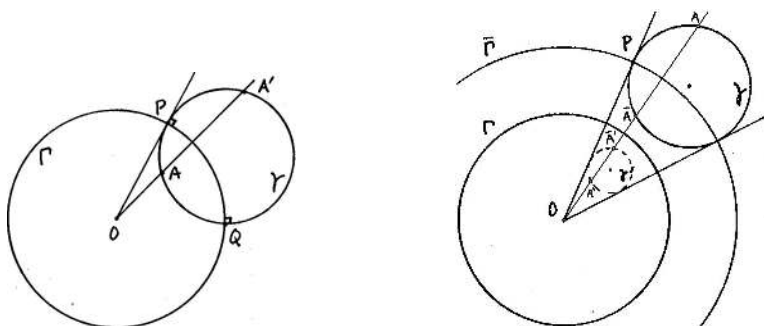
Obrázek 7.10: [Ha] Obrazem přímky při kruhové inverzi je kružnice procházející středem, a naopak.

(f) Předpokládejme, že kružnice  $\gamma$  protíná řídicí kružnici  $\Gamma$  kolmo, tzn., že tečny ve společném bodě  $P$  jsou kolmé, viz obr. 7.11 vlevo. Odtud plyne, že poloměr  $OP$  je tečnou ke kružnici  $\gamma$ . Pro libovolnou sečnu jdoucí bodem  $O$  ozn.  $A, A'$  průsečíky s kružnicí  $\gamma$ . Podle věty III.36 (str. 24) víme, že

$$OA \cdot OA' = OP^2 = r^2,$$

což znamená, že body  $A, A'$  si odpovídají vzhledem ke kruhové inverzi  $\Gamma$ .

Opačné tvrzení vyplývá z předchozího a z věty III.37, což je věta opačná k III.36. . .



Obrázek 7.11: [Ha] Obrazem kružnice neprocházející středem je opět kružnice; kružnice se zobrazuje sama do sebe právě tehdy, když protíná řídicí kružnici kolmo.

(g) Místo toho, abychom toto tvrzení dokazovali přímo (což je sice možné, ale poněkud pracné), použijeme následujícího triku, viz obr. 7.11 vpravo:

Uvažme kružnici  $\bar{\Gamma}$ , která je soustředná s  $\Gamma$  a protíná kružnici  $\gamma$  kolmo. Ukážeme, že složení kruhových inverzí  $\bar{\Gamma}$  a  $\Gamma$  je stejnoolehlost. Obrazem kružnice  $\gamma$  vzhledem k této stejnoolehlosti je opět kružnice, kterou označíme  $\gamma'$ . Vzhledem k tomu, že při kruhové inverzi  $\bar{\Gamma}$  se kružnice  $\gamma$  zobrazí sama do sebe (f), musí být obrazem kružnice  $\gamma$  vzhledem ke kruhové inverzi  $\Gamma$  právě kružnice  $\gamma'$ .

Pro libovolný bod  $A \in \gamma$  označíme  $\bar{A} \in \gamma$  jeho obraz v kruhové inverzi  $\bar{\Gamma}$  a obraz  $\bar{A}$  v kruhové inverzi  $\Gamma$  označíme  $\bar{A}'$ . Z definice kruhové inverze plyne, že

$$OA \cdot O\bar{A} = \bar{r}^2 \quad \text{a} \quad O\bar{A} \cdot O\bar{A}' = r^2$$

(kde  $r$ , resp.  $\bar{r}$  značí poloměr kružnice  $\Gamma$ , resp.  $\bar{\Gamma}$ ). Úpravou těchto dvou rovnic dostáváme

$$O\bar{A}' = k \cdot OA,$$

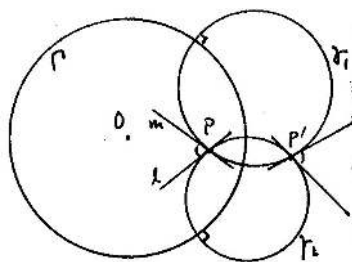
kde  $k = \frac{r^2}{\bar{r}^2}$  (konstanta!). Odtud plyne, že body  $A$  a  $\bar{A}'$  si odpovídají jako vzor a obraz vzhledem ke stejnolehlosti se středem  $O$  a koeficientem  $k$ .  $\square$

**Pozor**, uvažujeme-li kružnici neprocházející středem kruhové inverze a její obraz, potom středy těchto kružnic si neodpovídají jakožto vzor a obraz v kruhové inverzi! Toho si lze všimnout např. u libovolné kružnice, která protíná řídicí kružnici kolmo. Obecněji, kruhová inverze rozhodně nezachovává vzdálenosti bodů, ani jejich poměry.

Kruhová inverze však zachovává odchylky jakýchkoli protínajících se křivek (nemůžeme říct odchylky přímek, protože přímky se většinou zobrazují na kružnice):

**Věta.** (h) *Kruhová inverze je konformní zobrazení, tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.*

*Důkaz.* Odkazujeme na obr. 7.12: Odchylku jakýchkoli dvou křivek v jejich společném bodě  $P$  reprezentujeme pomocí jejich tečen  $m$  a  $l$ . Tutéž odchylku však můžeme stejně dobře reprezentovat pomocí dvojice kružnic, které prochází bodem  $P$  a mají přímky  $m$  a  $l$  jako tečny. Takových dvojic je samozřejmě nekonečně mnoho — my si vybíráme právě kružnice  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ , které jsou kolmé k řídicí kružnici  $\Gamma$ ! Tyto kružnice se zobrazují samy do sebe (f), obrazem bodu  $P$  je druhý společný bod  $P'$  kružnic a odchylka  $m$  a  $l$  se transformuje na odchylku kružnic v bodě  $P'$ .<sup>6</sup> Nicméně tato odchylka je též jako v bodě  $P$ , což jsme chtěli dokázat.  $\square$



Obrázek 7.12: [Ha] Kruhová inverze je konformní zobrazení.

### Poznámky

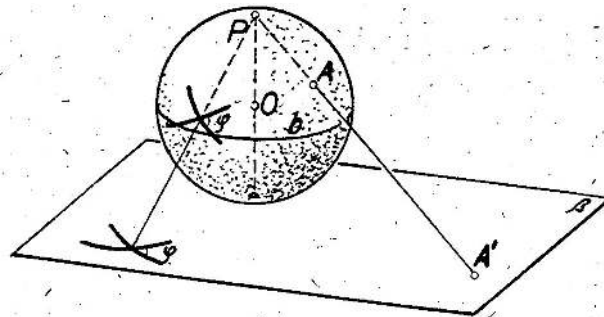
Na závěr si ještě uvědomte, že kruhová inverze je nepřímá transformace a že mezním případem kruhové inverze (pro  $r \rightarrow \infty$ ) je osová souměrnost.

Kruhovou inverzi zmiňujeme zejména v souvislosti s Apollóniovými úlohami — díky výše odvozeným vlastnostem kruhové inverze můžeme složitost těchto úloh celkem zajímavě redukovat, viz následující cvičení a dodatek 20.1.

Všechny konformní transformace v rovině lze vyčerpat skládáním podobných zobrazení a kruhových inverzí.


<sup>6</sup>Pozor, tečny na obr. 7.12 v bodě  $P'$  jsou nakresleny kvůli vyznačení odchylky, nikoli jako obrazy tečen  $m$  a  $l$  vzhledem ke  $\Gamma$ .

Na závěr uvádíme jeden další dobře známý příklad konformního zobrazení — *stereografickou projekci*, viz obr. 7.13. Kruhovou inverzi v rovině lze definovat pomocí stereografické projekce a naopak — zájemci mohou přemýšlet jak?<sup>7</sup>



Obrázek 7.13: [Kut] Stereografická projekce je konformní bijektivní zobrazení ze sféry bez jednoho bodu ( $P$ ) do roviny (která je kolmá k průměru  $PO$ ).

## 7.7 Cvičení

- (1) Vyjádřete stejnolehlost s daným středem a koeficientem jako složení kruhových inverzí.
- (2) Pomocí kruhové inverze řešte znovu všechny úlohy zmiňované v podkap. 5.
- (3) Dokažte, že pomocí dilatace a kruhové inverze umíte vyřešit obecnou Apollóniovu úlohu. 

## 7.8 Osová afinita a afinní zobrazení

Než se propracujeme k pojmu obecného afinního zobrazení, uvádíme několik dobře známých příkladů, které mají *něco* společného...

Často skloňovaným slovním spojením v této podkapitole je dělicí poměr trojice bodů na přímce, proto s ním kvůli lepší přehlednosti začneme.

### Dělicí poměr

O poměrech vzdáleností tří bodů na přímce jsme mluvili mnohokrát. Pro pozdější účely se vyplatí tento pojem nějak zafixovat:

*Dělicí poměr* trojice kolineárních bodů  $(A, B, C)$  je reálné číslo  $d$  takové, že platí  $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$ ; značíme a symbolicky zapisujeme takto:

$$d = (ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}. \quad (7.4)$$

<sup>7</sup>Nápověda: uvažte obraz „rovničku“ jakožto řídicí kružnici.

Bez vektorů lze dělicí poměr definovat takto:

$$(ABC) = \begin{cases} -\frac{|AC|}{|BC|}, & \text{pokud } C \text{ leží mezi body } A, B, \\ +\frac{|AC|}{|BC|}, & \text{pokud } C \text{ neleží mezi body } A, B. \end{cases}$$

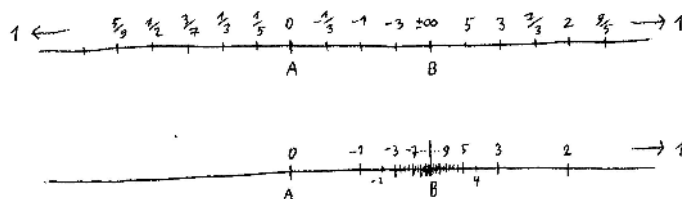
V mezních případech vychází dělicí poměr následovně:

$$\lim_{C \rightarrow A} (ABC) = 0, \quad \lim_{C \rightarrow B} (ABC) = \pm\infty, \quad \lim_{C \rightarrow \infty} (ABC) = 1.$$

Pro dva různé body je poloha třetího bodu na odpovídající přímce jednoznačně určena dělicím poměrem, viz obr. 7.14. Definice samozřejmě závisí na pořadí bodů ve trojici — např. bod  $C$  je

středem úsečky  $AB$  právě tehdy, když

$$(ABC) = (BAC) = -1 \iff (ACB) = (BCA) = 2 \iff (CAB) = (CBA) = \frac{1}{2}.$$



Obrázek 7.14: K dělicímu poměru trojice kolineárních bodů: u několika bodů  $X$  na přímce je vyznačena hodnota  $(ABX)$ .

### Rovnoběžné promítání

Rovnoběžné promítání je zobrazení z prostoru do roviny, mezi dvěma rovinami, z roviny do přímky apod. takové, že všechny promítací paprsky jsou rovnoběžné. Průmět libovolného bodu je určen jako průsečík promítacího paprsku s cílovým objektem. Průmětem přímky může být buď přímka, nebo bod.

Rovnoběžné promítání obecně nezachovává velikosti úseček, avšak zachovává dělicí poměr tří bodů na přímce:

**Věta.** *Pokud se při rovnoběžném promítání zobrazí různé kolineární body na různé body, potom se jejich dělicí poměry zachovávají.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že obrazem přímky není bod. Směr promítání  $s$ , daná přímka  $p$  a její obraz  $p'$  leží v jedné rovině. Pokud by náhodou byly přímky  $p$  a  $p'$  rovnoběžné, potom se zachovávají dokonce vzdálenosti, tudíž i dělicí poměry. Předpokládejme tedy, že  $p$  a  $p'$  jsou různoběžné. Tvrzení věty zdůvodníme nejprve ve speciálním případě, poté obecně, viz obr. 7.15:

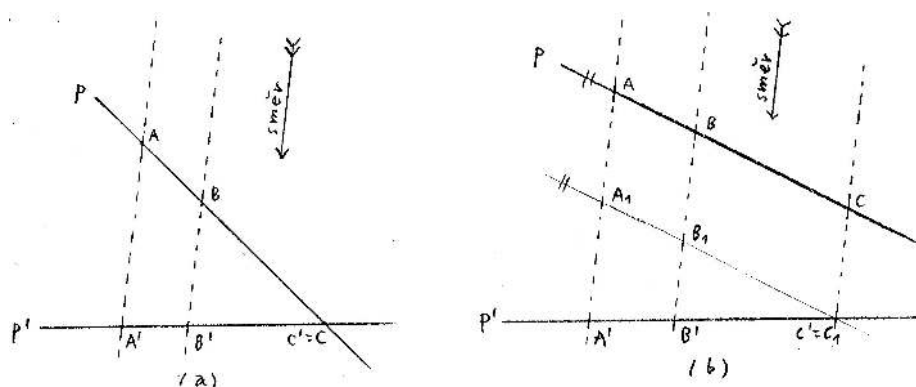
(a) V tomto případě ( $C' = C$ ) je tvrzení obsahem věty VI.2, kterou jsem dokázali na str. 31. Při značení z předchozího pododstavce můžeme leda psát

$$(ABC) = (A'B'C).$$

(b) Uvažujme dvě obecné přímky s rovnoběžnými průměty libovolných tří bodů. Vedeme pomocnou rovnoběžku  $s$  jdoucí bodem  $C'$ : Pro rovnoběžné průměty  $A_1, B_1, C'$  bodů  $A, B, C$  platí, že mají stejné vzdálenosti, tudíž  $(A_1B_1C') = (ABC)$ . Navíc podle (a) platí, že  $(A_1B_1C') = (A'B'C')$ , takže celkem dostáváme

$$(ABC) = (A'B'C'). \quad \square$$

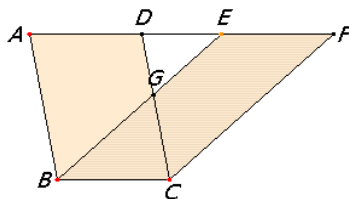




Obrázek 7.15: Dělicí poměr je při rovnoběžném promítání invariantní!

### Elace (naklonění, zkosení)

Rovnoběžník  $BCFE$  na obrázku můžeme chápat jako obraz rovnoběžníku  $BCDA$  při nějaké transformaci eukleidovské roviny — tuto transformaci budeme odborně nazývat *elací*.

Obrázek 7.16:  $[E, j]$  Elace neboli naklonění.

Elace má přímku samodružných bodů (v tomto příkladu  $BC$ ), kterou nazýváme *osou*. Elace je zcela určena osou  $o$  a dvojicí bodů  $A \mapsto A'$  (v tomto příkladu  $A' = E$ ) takovou, že

$$AA' \parallel o.$$

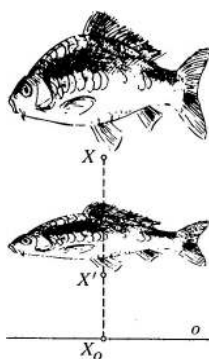
To znamená, že obraz libovolného bodu v rovině je tímto zadáním jednoznačně vymezen a navíc je snadné jej sestavit — pokud prozatím není jasné jak, čtěte dál!

Elace je přímá transformace, není to však shodnost ani podobnost. Elace je navíc zajímavá tím, že (podle věty I.35) zachovává obsahy.

### Osová afinita (škálování v jednom směru)

Elace je mezním případem transformace, které se říká *osová afinita*. Typickým příkladem osové afinity je transformace na obr. 7.17. Tato osová afinita má vodorovnou osu (= přímku samodružných bodů) a v tomto směru se „nic neděje“. Ve svislém směru se všechno zkracuje a podstatné je, že „všude stejně“! Odborněji můžeme říct, že ve svislém směru je pro každou trojici bodů  $X$ ,  $X'$  a  $X_0$ , které si odpovídají jako na obr. 7.17, jejich dělicí poměr konstantní.

Definice obecné osové afinity je následující:



Obrázek 7.17: [Ku] Typická osová afinita: škálování v jednom směru.

*Osová afinita* je transformace eukleidovské roviny, která je určena osou  $o$  a dvojicí bodů  $A \mapsto A'$ , a to následujícím způsobem: body na ose  $o$  jsou samodružné a pro obraz  $X'$  libovolného bodu  $X \notin o$  platí

$$XX' \parallel AA' \quad \text{a} \quad (X'X X_0) = (A'A A_0) = \text{konst.}, \quad (7.5)$$

kde  $X_0$ , resp.  $A_0$ , značí průsečík přímky  $XX'$ , resp.  $AA'$ , s osou  $o$ .

Směru přímky  $AA'$  se říká *směr* osové afinity, konstantě  $(A'A A_0)$  se říká *modul* (nebo taky *charakteristika*). Pořadí bodů v definici modulu není náhodné, ale je voleno tak, aby toto číslo mělo dobrý geometrický význam:

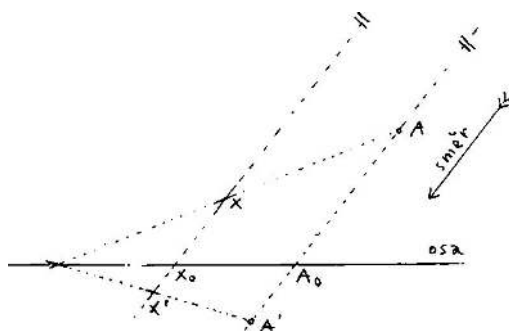
- modul je právě škálovací poměr v daném směru,
- absolutní hodnota modulu nám říká, jak se mění obsahy,
- osová afinita je přímá/nepřímá transformace, právě když modul je kladný/záporný.

Speciálními, resp. mezními případy osové afinity jsou:

- *osová souměrnost*, pokud modul =  $-1$  a směr  $\perp o$ ,
- *šikmá souměrnost*, pokud modul =  $-1$  a směr  $\not\perp o$ ,
- *elace*, pokud směr  $\parallel o$  ( $\implies$  modul =  $1$ ),
- *rovnoběžné promítání* do přímky  $o$ , pokud modul =  $0$ .

Pro kontrolu: V případě elace není bod  $A_0$  vůbec definován, resp. leží v nekonečnu; z definicí však plyne, že modul =  $\lim_{A_0 \rightarrow \infty} (A'A A_0) = 1$ . V případě promítání do přímky je  $A' = A_0$ , což skutečně znamená, že modul =  $(A'A A') = 0$ .

Uvědomte si, že přímo z definice osové afinity (a vět o podobných trojúhelnících) plyne návod ke konstrukci obrazu libovolného bodu  $X$ , viz obr. 7.18. Z definice dále plyne, že osová afinita zachovává dělicí poměr bodů na jakékoli přímce (tedy ne jen na ose nebo ve směru  $AA'$ )!



Obrázek 7.18: Obraz bodu  $X$  v osové afinitě určené osou a dvojicí bodů  $A \mapsto A'$ :

- (1) obraz  $X'$  leží na rovnoběžce s  $AA'$  jdoucí bodem  $X$ ,
- (2) průsečík přímky  $AX$  s osou je samodružný,
- (3) obraz  $X'$  leží na přímce spojující  $A'$  s pomocným bodem (2).

### Obecné afinní zobrazení

Osová afinita a rovnoběžné promítání do přímky jsou základní afinní zobrazení v eukleidovské rovině. Definice obecného afinního zobrazení (mezi prostory libovolné dimenze) je následující:

Zobrazení mezi eukleidovskými prostory je *afinní*, když

- (a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (b) zachovává dělicí poměry bodů (\*),
- (c) zachovává rovnoběžnost přímek (\*).

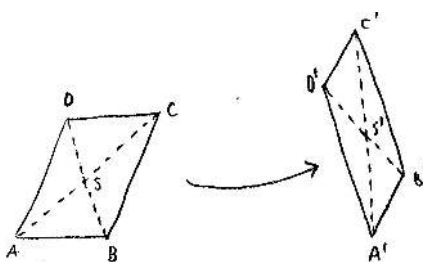
(\*) Kolineární body jsou body, které leží na jedné přímce, tedy také body splývající. Podmínka (b), resp. (c) tedy má smysl pouze v případě, kdy se různé kolineární body zobrazí na různé kolineární body (tedy nikoli do jednoho bodu).

Z (a) a (b) plyne, že prosté afinní zobrazení zobrazuje přímky na přímky, příp. úsečky na úsečky (tedy nikoli na nějaké divné části přímek).

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita*. Výše zmiňované rovnoběžné promítání do přímky není prosté (injektivní), takže to není afinita. Místo prosté/neprosté se často užívají přívlastky *regulární/singulární*.

Definice afinního zobrazení je motivována několika zobrazeními v rovině, avšak je vyslovena obecně, tzn. pro eukleidovské prostory libovolné dimenze: Při zobrazení přímky jsou podmínky (a) a (c) splněny triviálně, takže (prosté) afinní zobrazení je v takovém případě zcela charakterizováno podmínkou (b). Při zobrazení prostoru dimenze alespoň dva si můžeme všimnout, že definující podmínky nejsou úplně nezávislé — za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) ekvivalentní, viz obr. 7.19:

*Zdůvodnění* (b)  $\iff$  (c). Předpokládejme, že platí (a) a (b). Uvažme libovolný rovnoběžník  $ABCD$  a jeho obraz  $A'B'C'D'$ ; průsečík úhlopříček  $S$  se zobrazuje na průsečík úhlopříček  $S'$ . Protože  $ABCD$  je rovnoběžník, je bod  $S$  středem obou úhlopříček. Protože platí (b), je  $S'$  středem obou úhlopříček čtyřúhelníku  $A'B'C'D'$ . To však znamená, že  $A'B'C'D'$  je rovnoběžník, a tedy platí (c).



Obrázek 7.19: Čtyřúhelník je rovnoběžník, právě když průsečík úhlopříček je jejich středem

Důkaz opačné implikace není tak samozřejmý, dá se však snadno zdůvodnit algebraicky (viz příští semestr). Uvědomte si aspoň, že za předpokladu (a) a (c) z předchozího rozvažování plyne, že střed libovolné úsečky se zobrazí na střed obrazu této úsečky, ...  $\square$

Afinní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b) za předpokladu, že se různé body zobrazují do různých bodů. To jinými slovy znamená, že prosté afinní zobrazení přímky (kamkoli) je zcela určeno obrazy dvou různých bodů. Tyto body můžeme chápat jako „počátek“ a „jednotku“; pro obecný bod na přímce pak odpovídající dělicí poměr interpretujeme jako jeho „souřadnici“ vzhledem k této pomocné souřadné soustavě. Obdobně můžeme uvažovat o afinních zobrazeních v rovině, příp. z roviny kamkoli:

- (i) Uvažme tři body v obecné poloze, které chápeme jako počátek a jednotky pomocné souřadné soustavy, a jejich obrazy.
- (ii) Každý bod v rovině je jednoznačně určen dvěma „souřadnicemi“ vzhledem k této soustavě — tyto jsou určeny rovnoběžkami se souřadnými osami.
- (iii) Dvojným přenesením dělicího poměru (b) umíme určit „souřadnice“ obrazu daného bodu.
- (iv) Pokud obraz počátku a právě sestrojené „souřadnice“ jsou v obecné poloze, potom doplněním do rovnoběžníku (c) umíme určit obraz daného bodu.

Odtud vidíme, že prosté afinní zobrazení roviny (kamkoli) je zcela určeno obrazy tří bodů v obecné poloze. Zobecnění těchto úvah pro afinní zobrazení prostoru (kamkoli) je zřejmé. Celkem můžeme tato pozorování shrnout následovně:

**Věta** (o určenosti afinního zobrazení). *Prosté afinní zobrazení prostoru dimenze  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) je jednoznačně určeno obrazy  $n + 1$  bodů v obecné poloze.*

### Poznámky a vyhlídky

Všechny výše zmiňované příklady afinních transformací byly v jistém smyslu **základní**: základní regulární afinní transformací je osová afinita, základní singulární afinní transformací je rovnoběžné promítání do přímky. Společným rysem všech základních transformací v rovině je, že mají přímku samodružných bodů. Zobecnění některých základních tvrzení z odstavců o shodnostech a podobnostech je následující:

**Věta** (o skládání ...). *Každou afinní transformaci v rovině lze realizovat jako složení nejvýše tří základních afinních transformací.*

Toto tvrzení lze zdůvodnit velmi podobným způsobem jako větu 7.2 o skládání osových souměrností. Jediný rozdíl je v tom, že nyní máme daleko více volnosti!

Základní afinní transformace v prostoru jsou transformace, které mají rovinu samodružných bodů. Zájemci mohou přemýšlet nad zobecněním předchozí věty pro afinní transformace v prostoru. . .

V následující kapitole budeme důkladně studovat rovnoběžná promítání prostoru do roviny, tedy základní singulární afinní zobrazení v prostoru. Velice přirozenou a současně důležitou otázkou je:

- Jaké je zobecnění věty o určenosti afinních zobrazení pro **singulární** případy?




V následujícím semestru budeme umět (algebraicky) ukázat, že tato věta platí pro jakákoli afinní zobrazení (a jakékoli dimenze). Z konstrukčního rozboru, který oné větě předcházela, zatím umíme vyvodit jenom to, že předpoklad injektivnosti může být zeslaben, ale ne příliš: Pokud by (pro  $n = 2, 3$ ) v obrazu „osového kříže“ některé dvě osy splývaly, máme problém s doplněním rovnoběžníku v kroku (iv). Závěr proto formulujeme poněkud opatrně takto:

- „*Ne příliš singulární*“ afinní zobrazení jsou určena stejně jako ve větě na str. 76.

K tomuto tématu se znovu vracíme v podkapitole 11 a následujících. Prozatím jenom opakujeme, že v konstrukčním zdůvodnění tohoto tvrzení odkazujeme výhradně na vlastnosti (a)–(c) z definice afinního zobrazení. To znamená, že základními konstrukčními nástroji jsou pouze

- přenášení dělicích poměrů,
- konstrukce rovnoběžek.

## 7.9 Cvičení

- (1) Pro dané tři kolineární body  $A, B, C$  a dva další body  $K, L$  sestrojte bod  $M$  tak, aby byl zachován dělicí poměr:  $(KLM) = (ABC)$ . Uvažujte také jiné permutace bodů ve trojici. 
- (2) Dokažte, že osová afinita je involutivní právě tehdy, když modul  $= -1$ .
- (3) Pro dva dané trojúhelníky rozhodněte, zda je jeden obrazem druhého vzhledem k nějaké osově afinitě (zformulujte nějaké přirozené kritérium). 
- (4) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
  - vyjádřete odpovídající afinitu jako složení osových afinit,
  - sestrojte obraz libovolného dalšího bodu v rovině. 
- (5) Vyjádřete stejnolehlost s daným středem a koeficientem jako složení osových afinit.
- (6) Předpokládejme, že tři dané body jsou obrazy sousedních vrcholů pravidelného  $n$ -úhelníku ( $n = 4, 5, 6, 8, 10, \dots$ ); sestrojte obrazy ostatních vrcholů.
- (7) Sestrojte afinní obraz pravidelného  $n$ -bokého hranolu ( $n = 4, 5, 6, 8, 10, \dots$ ).

## 7.10 Osová kolineace a projektivní zobrazení

Než se propracujeme k pojmu obecného projektivního zobrazení, zobecníme základní afinní zobrazení — od rovnoběžného promítání ke středovému, od osově afinity k osově kolineaci. V této souvislosti si záhy uvědomíme, že je nutné začít brát vážně také body v nekonečnu. Odtud pojem projektivního rozšíření eukleidovské přímky, roviny atd.

Často skloňovaným pojmem v této podkapitole je dvojpoměr čtveřice bodů na přímce, proto s ním rovnou začneme.

### Dvojpoměr

*Dvojpoměr* čtveřice kolineárních bodů  $(A, B, C, D)$  je reálné číslo definované jako poměr dělicích poměrů  $(ABC) : (ABD)$ ; vzhledem k (7.4) píšeme následovně:

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}. \quad (7.6)$$

Vzhledem k tomu, že  $\lim_{D \rightarrow \infty} (ABD) = 1$ , platí  $\lim_{D \rightarrow \infty} (ABCD) = (ABC)$ , což zapisujeme jako

$$(ABCD_\infty) = (ABC).$$

V některých dalších mezních případech vychází dvojpoměr následovně:

$$\lim_{C \rightarrow A} (ABCD) = 0, \quad \lim_{C \rightarrow B} (ABCD) = \pm\infty, \quad \lim_{C \rightarrow D} (ABCD) = 1$$

apod. Pokud je náhodou

$$(ABCD) = -1,$$

říkáme o čtveřici bodů, že je v tzv. *harmonickém poměru*. Takovou čtveřici tvoří např.  $(ABCD_\infty)$ , kde  $C$  je středem úsečky  $AB$ . Obecněji, v harmonickém poměru je mnoho různých čtveřic bodů v úplném čtyřrohu (viz cvičení 7.11(4)).

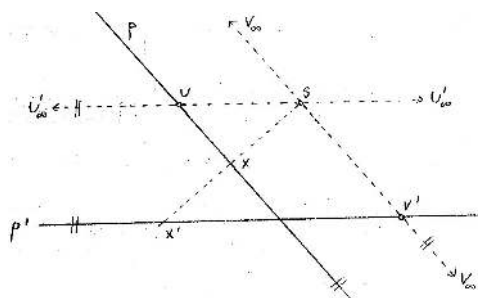
Pro dané tři různé kolineární body je poloha čtvrtého bodu na téže přímce jednoznačně určena dvojpoměrem. Definice dvojpoměru samozřejmě závisí na pořadí bodů ve čtveřici. Podobně jako u dělicího poměru však můžeme pozorovat jisté symetrie — obecně např. platí

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

### Projektivní rozšíření

Několikrát jsme si mohli všimnout, že občas je výhodné pracovat s *nevlastní body*, tj. body v **nekonečnu**. Pokud např. uvažujeme středové promítání mezi dvěma (různoběžnými) přímkami  $p$  a  $p'$ , potom na  $p$  existuje bod  $U$ , který se zobrazuje do nevlastního bodu přímky  $p'$ , a na  $p'$  máme bod  $V'$ , jehož vzor je nevlastní bod přímky  $p$ . Takovým bodům říkáme *úběžníky* a časem zjistíme, jak jsou při konstrukcích užitečné.

Pokud se chceme vyjadřovat přesně, potom nemůžeme říkat, že se při středovém promítání přímka  $p$  zobrazuje na přímku  $p'$ . Správně by bylo: přímka  $p$  bez bodu  $U$  se zobrazuje na přímku  $p'$  bez bodu  $V'$ . Těmto nešikovnostem se lze jednoduše vyhnout tím, že všechny základní objekty rozšíříme o jejich nevlastní body:



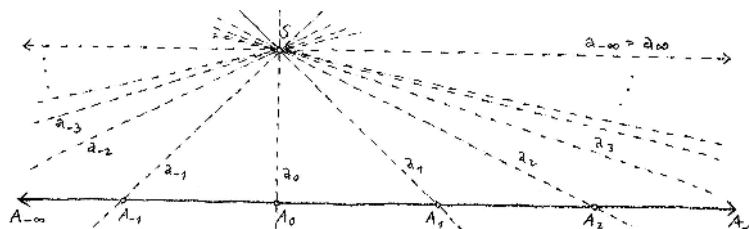
Obrázek 7.20: Středové promítání nezobrazuje eukleidovskou přímku na eukleidovskou přímku, avšak zobrazuje projektivní přímku na projektivní přímku.

*Projektivní rozšíření* přímky, roviny, resp. prostoru je eukleidovská přímka, rovina, resp. prostor rozšířená, resp. -ný o jejich body v nekonečnu.

Body v nekonečnu jmenujeme *nevlastní*, ostatní pak *vlastní*.

Tato definice je dost neformální — kritický čtenář by se měl ptát, co jsou ty body v nekonečnu a kolik jich vlastně je, příp. jak je reprezentovat pomocí vlastních objektů?! Nejprve si uvědomíme, že každá přímka v eukleidovské rovině má jenom jeden nevlastní bod (a nikoli dva).<sup>8</sup> Tento fakt vyplývá z jednoho ze základních postulátů eukleidovské geometrie, totiž z postulátu o rovnoběžkách (viz odst. 4.4):

**Věta.** *Projektivní rozšíření přímky má právě jeden nevlastní bod.*



Obrázek 7.21: Eukleidovská přímka má jen jeden nevlastní bod.

*Důkaz.* Základní „projektivní trik“ je, že se na daný objekt podíváme zvnějšku, v tomto případě z nějakého bodu  $S$ , který na dané přímce  $p$  neleží:

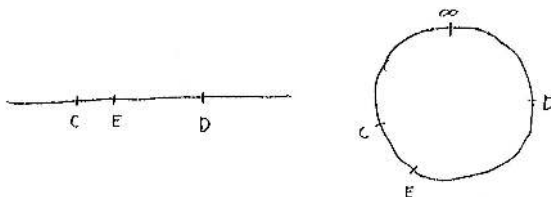
Body na přímce  $A_i \in p$  jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci s promítacími paprsky  $a_i = SA_i$ . Když se bod  $A_i$  vzdaluje do nekonečna, přímka  $a_i$  konverguje k přímce, která leží v rovině určené  $p$  a  $S$  a přímku  $p$  neprotíná, tedy k přímce, která je s  $p$  rovnoběžná. Protože rovnoběžka k dané přímce daným bodem je jediná, má každá přímka v eukleidovské rovině jediný nevlastní bod.  $\square$

Toto pozorování má několik zajímavých důsledků:

<sup>8</sup>Projektivní rozšíření přímky je tedy něco jiného, než rozšířená reálná osa, jak ji známe z analýzy: označení  $\pm\infty$  můžeme interpretovat jedině tak, že se k nevlastnímu bodu blížíme zprava/zleva.

- Projektivní přímka je uzavřená.
- Nemá smysl uvažovat uspořádání bodů na projektivní přímce.
- Projektivní přímka nerozděluje projektivní rovinu na dvě nesouvislé části.
- Každé dvě projektivní přímky v projektivní rovině se protínají.

Rovnoběžnost přímek v rozšířené eukleidovské rovině tedy chápeme jako speciální případ různoběžnosti, kdy průsečíkem je nevlastní bod.



Obrázek 7.22: Na eukleidovské přímce je bod  $E$  mezi body  $C$  a  $D$ . Na projektivní přímce nemá relace „mezi“ valného smyslu.

Jiný základní axióm eukleidovské geometrie říká, že dva body jednoznačně určují přímku.<sup>9</sup> Pokud uvažujeme dva různé nevlastní body, pak jimi určená přímka musí být celá nevlastní,  $\Rightarrow$  jinak bychom byli ve sporu s předchozím tvrzením. Odtud plyne, že:

**Věta.** *Projektivní rozšíření roviny, resp. prostoru má projektivní přímku, resp. rovinu nevlastních bodů.*

Před chvílí jsme mluvili o vzájemných polohách přímek v rozšířené rovině. Obdobná diskuze v projektivním rozšíření prostoru vypadá následovně — dvě projektivní přímky mohou být:

- mimoběžné, pokud nemají společný bod,
- různoběžné, pokud mají společný právě jeden vlastní bod,
- rovnoběžné, pokud mají společný právě jeden nevlastní bod,
- totožné, pokud mají společné aspoň dva body.

$\Rightarrow$  Doplňte si diskuzi vzájemných poloh přímky a roviny, příp. dvou rovin. . .

### Středové promítání

Středové promítání je jedno ze základních projektivních zobrazení, které dokonce dalo celé této skupině zobrazení jméno. Máme na mysli promítání z prostoru do roviny, mezi dvěma rovinami, z roviny do přímky apod. Průmět libovolného bodu je určen jako průsečík promítacího paprsku s cílovým objektem. Průmětem přímky může být buď přímka, nebo bod.

Středové promítání obecně nezachovává vzdálenosti ani dělicí poměry trojic bodů, avšak zachovává dvojpoměry čtveřic bodů na přímce:

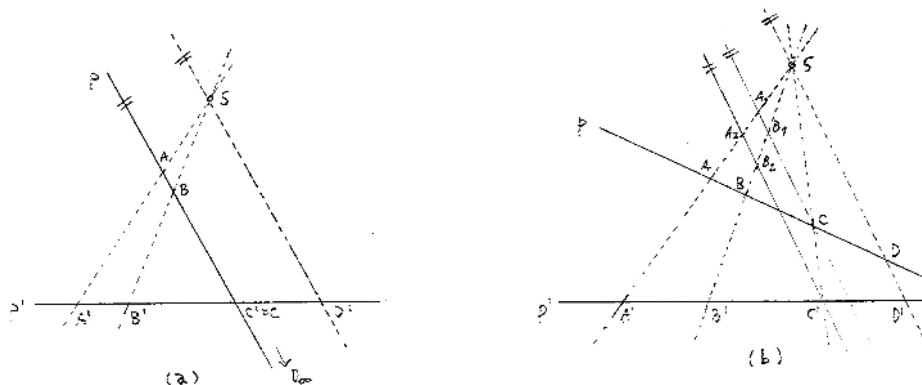
<sup>9</sup>Tento axióm patří v Hilbertově systému do skupiny axiómů incidence, které jsou platné v obecném projektivním prostoru.



**Věta (Pappova).** *Pokud se při středovém promítání zobrazí různé kolineární body na různé body, potom se jejich dvojpoměry zachovávají.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že obrazem přímky není bod. Střed promítání  $S$ , daná přímka  $p$  a její obraz  $p'$  leží v jedné rovině. Pokud by náhodou byly přímky  $p$  a  $p'$  rovnoběžné, potom se zachovávají dokonce dělicí poměry, tudíž i dvojpoměry.

Předpokládejme tedy, že  $p$  a  $p'$  jsou různoběžné. Tvrzení věty zdůvodníme nejprve ve speciálním případě ( $C' = C$  a  $D$  v nekonečnu), poté obecně, viz obr. 7.23. Odkazujeme výhradně na základní tvrzení o podobných trojúhelnících:



Obrázek 7.23: Dvojpoměr je při středovém promítání invariantní!

- (a) Trojúhelníky  $A'AC'$  a  $A'SD'$  jsou podobné a  $C' = C$ , tudíž  $\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{SD'}}$ . Trojúhelníky  $B'BC'$  a  $B'SD'$  jsou taky podobné, tudíž  $\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{SD'}}$ . Odtud dělením obou rovnic dostáváme

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} : \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} : \frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{B'D'}}.$$

Výraz nalevo je právě  $(ABC) = (ABCD_\infty)$ , napravo je  $(A'B'C'D')$ , takže v tomto speciálním případě skutečně platí

$$(ABCD_\infty) = (A'B'C'D').$$

- (b) Uvažujme dvě obecné přímky se středovými průměty libovolné čtveřice bodů. Vedeme pomocné rovnoběžky jdoucí body  $C$  a  $C'$ : Podle (a) platí, že  $(A_1B_1C) = (ABCD)$  a současně  $(A_2B_2C') = (A'B'C'D')$ . Navíc ale z podobnosti pomocných trojúhelníků plyne  $(A_1B_1C) = (A_2B_2C')$ , takže i v tomto obecném případě platí

$$(ABCD) = (A'B'C'D'). \quad \square$$

### Osová kolineace

Díky projektivnímu rozšíření eukleidovské roviny (prostoru) lze všechny výše zmiňované afinní zobrazení chápat jako speciální případy tzv. projektivních zobrazení, k jejichž obecné definici

nezadržitelně směřujeme. Jedním příkladem, jemuž rozumíme už nyní, je rovnoběžné promítání, které chápeme jako středové promítání z nevlastního středu. Podobně lze chápat osovou afinitu jako speciální případ obecnější — a tudíž základnější — transformace, jejíž jméno zní osová kolineace:<sup>10</sup>

*Osová kolineace* je transformace v projektivní rovině určená osou  $o$ , středem  $S$  a dvojicí bodů  $A \mapsto A'$ , a to následujícím způsobem: střed  $S$  a body na ose  $o$  jsou samodružné a pro obraz  $X'$  libovolného dalšího bodu  $X$  platí

$$XX' \cap AA' = S \quad \text{a} \quad (X'X X_0S) = (A'A A_0S) = \text{konst.}, \quad (7.7)$$

kde  $X_0$ , resp.  $A_0$ , značí průsečík přímky  $XX'$ , resp.  $AA'$ , s osou  $o$ .

Konstantě  $(A'A A_0S)$  se říká *modul* (nebo taky *charakteristika*) osové kolineace. Na rozdíl od modulu osové afinity, je interpretace modulu osové kolineace poněkud problematičtější — v projektivní rovině zejména nemá smysl mluvit o orientaci (tzn. nemá smysl rozlišovat přímé/nepřímé transformace).

Zdůrazňujeme, že osová kolineace je dobře definovaná pouze jako transformace v projektivní (tedy nikoli eukleidovské) rovině, tzn. že nevlastní body se mohou zobrazit do vlastních, a naopak. Speciálními, resp. mezními případy osové kolineace jsou:


- *osová afinita*, pokud je střed nevlastní,
- *stejnolehlost*, pokud je osa nevlastní,
- *posunutí*, pokud jsou střed i osa nevlastní,
- *středové promítání* do přímky  $o$ , pokud je osa vlastní a modul = 0.

Pro doplnění: V případě osové afinity je modul =  $(A'A A_0S_\infty) = (A'A A_0)$ . V případě stejnolehlosti je bod  $A_0$  nevlastní a modul =  $(A'A A_0S) = (A'A S)$  = koeficient stejnolehlosti. V případě posunutí je nutně  $S = A_0$  a modul =  $(A'A SS) = 1$ . V případě promítání do přímky je  $A' = A_0$ , což skutečně znamená, že modul =  $(A'A A'S) = 0$ .

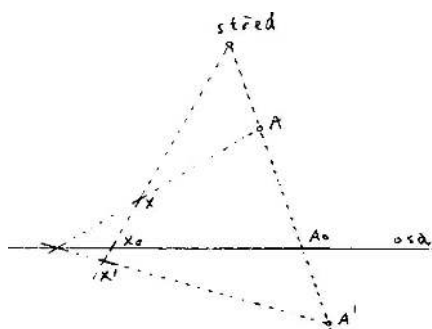
V souvislosti s analogickou diskuzí v odst. 7.8 nás může ještě napadnout uvažovat osové kolineace s modulem  $\pm 1$ :

- *projektivní elace*, pokud  $S \in o$  ( $\implies$  modul = 1),
- *harmonická souměrnost*, pokud modul = -1.

V případě projektivní elace je  $S = A_0$ , což skutečně znamená, že modul =  $(A'A SS) = 1$ . Elace (resp. posunutí) je tedy speciálním případem projektivní elace, kdy střed (resp. střed i osa) je nevlastní. Speciálním případem harmonické souměrnosti je šikmá souměrnost, a to když osa je nevlastní.

Uvědomte si, že přímo z definice osové kolineace (a Pappovy věty) plyne návod ke konstrukci obrazu libovolného bodu  $X$ , viz obr. 7.24. Odtud dále plyne, že osová kolineace zachovává dvoj-  
 poměry bodů na jakékoli přímce (tedy ne jen na ose nebo přímce procházející středem)!

<sup>10</sup>V literatuře se často místo přívlastku osová užívá středová.



Obrázek 7.24: Obraz bodu  $X$  v osové kolineaci určené středem, osou a dvojicí bodů  $A \mapsto A'$ :

- (1) obraz  $X'$  leží na přímce  $SX$ ,
- (2) průsečík přímky  $AX$  s osou je samodružný,
- (3) obraz  $X'$  leží na přímce spojující  $A'$  s pomocným bodem (2).

### Obecné projektivní zobrazení

Osová kolineace a středové promítání jsou základní projektivní zobrazení v rovině. Definice obecného projektivního zobrazení (mezi prostory libovolné dimenze) je následující:

Zobrazení mezi projektivními prostory je *projektivní*, když

- (a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (b) zachovává dvojpoměry (\*).

(\*) Kolineární body jsou body, které leží na jedné přímce, tedy také body splývající. Podmínka (b) tedy má smysl pouze v případě, kdy se různé kolineární body zobrazí na různé kolineární body.

Definující podmínky neznamenají nic jiného, než že se (projektivní) přímky zobrazují na přímky, resp. na body (tedy nikoli např. na úsečky nebo jiné části přímek).

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo též *kolineace*. Výše zmiňované středové promítání jistě není prosté (injektivní), takže to není kolineace. Místo prosté/neprosté se stejně jako v afinním případě užívají přívlastky *regulární/singulární*.

Při zobrazení přímky je podmínka (a) splněna triviálně, takže (prosté) projektivní zobrazení je v takovém případě zcela charakterizováno podmínkou (b). Při zobrazení prostoru dimenze alespoň 2 nejsou podmínky (a) a (b) úplně nezávislé:

Důsledkem tzv. základní věty projektivní geometrie je, že prosté zobrazení, které zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky nutně zachovává dvojpoměry. Toto tvrzení můžeme chápat jako velice silné zobecnění Pappovy věty, jehož zdůvodnění není vůbec jednoduché. (Také k tomuto problému se vrátíme v příštím semestru. . .)

Prosté projektivní zobrazení přímky je úplně charakterizováno podmínkou (b), tzn. takové zobrazení je zcela určeno obrazy libovolných tří navzájem různých bodů. Pokud jeden z těchto bodů zvolíme jako nevlastní, můžeme zbylé dva chápat jako „počátek“ a „jednotku“ pomocné souřadné soustavy. Pro obecný bod na přímce pak odpovídající dvojpoměr chápeme jako jeho

„souřadnici“ vzhledem k této souřadné soustavě. Obdobně můžeme uvažovat o projektivních zobrazeních roviny:

- (i) Uvažme tři body v obecné poloze, které chápeme jako počátek a jednotky pomocné souřadné soustavy, jejich obrazy a obrazy nevlastních bodů pomocných souřadných os, tj. úběžníky.
- (ii) Každý bod v rovině je jednoznačně určen dvěma „souřadnicemi“ vzhledem této soustavě — tyto jsou určeny rovnoběžkami se souřadnými osami.
- (iii) Dvojným přenesením dvojpoměru (b) umíme určit „souřadnice“ obrazu daného bodu.
- (iv) Pokud obraz počátku a právě sestrojené „souřadnice“ jsou v obecné poloze, potom pomocí úběžníků umíme doplnit obraz daného bodu.

Odtud vidíme, že prosté projektivní zobrazení roviny (kamkoli) je zcela určeno obrazy tří bodů v obecné poloze a dvou odpovídajících nevlastních bodů. Zobecnění těchto úvah pro projektivní zobrazení prostoru (kamkoli) je zřejmé. Celkem můžeme tato pozorování shrnout následovně:



**Věta** (o určenosti projektivního zobrazení). *Prosté projektivní zobrazení prostoru dimenze  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) je jednoznačně určeno obrazy  $n + 1$  bodů v obecné poloze a úběžníky  $n$  odpovídajících přímek vycházejících z jednoho bodu.*

Připomínáme, že úběžníky jsou obrazy nevlastních bodů. Z předchozího víme, že nevlastní body projektivní roviny tvoří projektivní přímku. Obrazem této přímky vzhledem k jakémukoli projektivnímu zobrazení je opět projektivní přímka, kterou nazýváme *úběžnicí*.

Místo s úběžnicí lze samozřejmě pracovat s obrazy vlastních bodů. V takovém případě platí, že prosté projektivní zobrazení roviny (resp. prostoru) je určeno obrazy čtyř bodů, z nichž žádné tři nejsou kolinéární, (resp. pěti bodů, z nichž žádné čtyři neleží v jedné rovině).



### Poznámky a vyhlídky

Výše zmiňované příklady projektivních transformací byly tzv. **základní**: základní regulární projektivní transformací je osová kolineace, základní singulární projektivní transformací je středové promítání do přímky. Stejně jako v afinním případě, základní transformace v rovině mají přímku samodružných bodů. Zobecnění některých základních tvrzení z předchozích odstavců je následující:

**Věta** (o skládání ...). *Každou projektivní transformaci v rovině lze realizovat jako složení nejvýše čtyř základních projektivních transformací.*

Toto je zobecnění věty 7.8 na str. 76; opět pozorujeme ohromné množství možností v možných rozkladech.



Základní projektivní transformace v prostoru jsou transformace, které mají rovinu samodružných bodů. Zájemci mohou přemýšlet nad zobecněním předchozí věty pro projektivní transformace v prostoru. . .

V následující kapitole budeme kromě rovnoběžných promítání prostoru do roviny studovat také promítání středová. V každém případě se jedná o základní singulární zobrazení v prostoru. Podobně jako v afinním případě se ptáme:

- Jaké je zobecnění věty o určenosti projektivních zobrazení pro **singulární** případy?

Se singulárními případy je vždycky trochu problém. Z konstrukčního rozboru, který oné větě předcházela, můžeme snadno vyvodit, že předpoklad injektivnosti může být zeslaben, ale ne příliš: Pokud by (pro  $n = 2, 3$ ) v obrazu „osového kříže“ některé dvě osy splývaly, máme problém s doplněním obrazu bodu z jeho „souřadnic“ v kroku (iv). Závěr formulujeme alibisticky takto:

- „*Ne příliš singulární*“ projektivní zobrazení jsou určena stejně jako ve větě na str. 84.

K tomuto tématu se znovu vracíme v podkapitolách 11 a 15. Prozatím jenom opakujeme, že v konstrukčním zdůvodnění tohoto tvrzení odkazujeme výhradně na vlastnosti (a)–(b) z definice projektivního zobrazení. To znamená, že základními konstrukčními nástroji je

- přenášení dvojpoměrů,
- spolupráce s úběžnicí.




Často se vyplatí také spolupráce s vybranými úběžnicemi (při středových promítáních prostoru do roviny se úběžnicí základní roviny přezdívá *horizont*). . .

## 7.11 Cvičení

- (1) Sestrojte projektivní obraz čtvercového dláždění roviny.
- (2) Rozhodněte, která ze čtveřic bodů na obr. 7.25 je projektivním obrazem čtveřice stejně vzdálených bodů.



Obrázek 7.25: [St] Která čtveřice je projektivním obrazem čtveřice ekvidistantních bodů?

- (3) Pro dané čtyři kolineární body  $A, B, C, D$  a tři kolineární body  $K, L, M$  sestrojte bod  $N$  tak, aby byl zachován dvojpoměr:  $(KLMN) = (ABCD)$ . Uvažujte také jiné permutace bodů ve čtveřici. 
- (4) Dokažte, že např. čtveřice bodů  $(BCMR)$  v úplném čtyřrohu na obr. 7.8 na str. 66 je v harmonickém poměru.
- (5) Dokažte, že osová kolineace je involutivní právě tehdy, když modul  $= -1$ .
- (6) Pro dva dané čtyřúhelníky rozhodněte, zda je jeden obrazem druhého vzhledem k nějaké osové kolineaci (zformulujte nějaké přirozené kritérium). 
- (7) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
  - vyjádřete odpovídající projektivní transformaci jako složení osových kolineací,
  - sestrojte obraz libovolného dalšího bodu v rovině. 
- (8) Předp., že čtyři dané body jsou obrazy sousedních vrcholů pravidelného  $n$ -úhelníku ( $n = 5, 6, 8, 10, \dots$ ); sestrojte obrazy ostatních vrcholů.
- (9) Sestrojte projektivní obraz pravidelného  $n$ -bokého hranolu ( $n = 4, 5, 6, 8, 10, \dots$ ).

## 8 Přehledy a poznámky

### 8.1 Základní transformace v rovině

V tomto odstavci si přehledně připomeneme základní transformace v (projektivní) rovině a jako obvykle něco málo doplníme. Nejpozději na tomto místě bychom si měli všimnout, že všechny dosud jmenované základní transformace mají něco společného:

- *osu* = přímku samodružných bodů,
- *střed* = samodružný bod takový, že každá přímka jdoucí tímto bodem se zobrazuje sama do sebe.

Osa a střed mohou být jak vlastní, tak nevlastní, a podle toho taky můžeme jednotlivé typy základních transformací rozlišovat. Obecnou definici tedy můžeme vyslovit následovně:

Projektivní transformace v rovině, která má osu a střed, se nazývá *základní*.

Z Desarguesovy věty (viz odst. 8.2) plyne, že (regulární) projektivní transformace v rovině má osu právě tehdy, když má střed. Celkem jednoduše lze také zdůvodnit, že žádná neidentická projektivní transformace nemůže mít víc než jednu osu a jeden střed. . .



Úplně **nejzákladnější** transformace je osová kolineace — všechny ostatní základní transformace chápeme jako speciální, resp. mezní případy, viz tab. 8.1. Uvědomte si, že podmínky v jednotlivých sloupcích nejsou úplně nezávislé! Např. z definice modulu plyne, že pokud  $S \in o$ , potom je modul nutně roven 1. Taky se jistě nemůže stát, aby  $S$  i  $o$  byly nevlastní a současně  $S \notin o$ , apod.

střed $S$	osa $o$	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne	0	(středové promítání do přímky)
		ano	1	projektivní elace
		ne	-1	harmonická souměrnost
		ne	jinak	<b>osová kolineace</b>
nevlastní	vlastní	ne	0	(rovnoběžné promítání do přímky)
		ano	1	elace
		ne	-1	šikmá, resp. osová souměrnost
		ne	jinak	osová afinita
vlastní	nevlastní	ne	0	(promítání do bodu)
		ne	1	(identita)
		ne	-1	středová souměrnost
		ne	jinak	stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

Tabulka 8.1: Klasifikace základních transformací v projektivní rovině

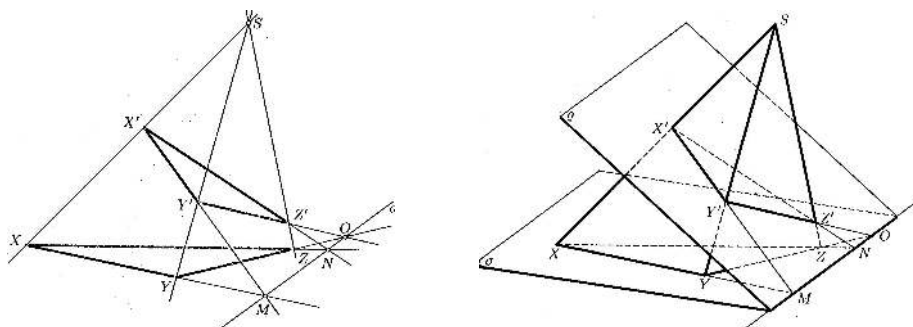
Některé položky uvádíme v závorkách, protože se jedná o triviální, resp. degenerované případy, které do tohoto přehledu sice patří, ale nejedná se o základní transformace ve výše vymezeném smyslu.

V případě harmonické souměrnosti je modul roven  $-1$ , což znamená, že každá čtveřice  $(X', X, X_0, S)$  je v harmonickém poměru. Šikmá souměrnost je harmonická souměrnost s nevlastním středem a osová souměrnost je navíc charakterizována tím, že směr souměrnosti je kolmý k ose. Připomínáme, že právě tyto základní transformace jsou involutivní.

## 8.2 Desarguesova věta

Ve cvičeních 7.3, 7.5, 7.9, resp. 7.11 jsme přemýšleli, jak charakterizovat základní shodné, podobné, afinní, resp. projektivní transformace v (projektivní) rovině. Jako nejzákladnější transformace jsme rozpoznali osové kolineace. V souvislosti s jejich charakterizacemi musíme zmínit následující klasické tvrzení:

**Věta (Desarguesova).** *Pro libovolné dva trojúhelníky  $XYZ$  a  $X'Y'Z'$  v projektivní rovině platí: přímky  $XX'$ ,  $YY'$ ,  $ZZ'$  prochází jedním bodem právě tehdy, když průsečky přímek  $XY$  a  $X'Y'$ ,  $YZ$  a  $Y'Z'$ ,  $XZ$  a  $X'Z'$  leží na jedné přímce.*



Obrázek 8.26: [Ku] Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.

*Důkaz.* Planimetrický důkaz tohoto tvrzení je značně netriviální, věta je však velmi srozumitelná s vhodnou trojrozměrnou interpretací, viz obr. 8.26:

Při zdůvodňování první implikace se odkážeme na poznatek, že každé dvě roviny — v tomto případě roviny  $\rho$  a  $\sigma$  obsahující dané trojúhelníky — se protínají v přímce (vlastní či nevlastní). Při zdůvodňování druhé implikace se odkážeme na poznatek, že každé tři roviny, které neobsahují společnou přímku — v tomto případě roviny určené třemi dvojicemi odpovídajících si stran — mají společný právě jeden bod (vlastní či nevlastní).  $\square$

Chápeme-li trojúhelník  $X'Y'Z'$  jako obraz trojúhelníku  $XYZ$  vzhledem k nějaké projektivní transformaci, potom Desarguesovu větu můžeme tlumočit následovně:

- *Regulární projektivní transformace v rovině má osu právě tehdy, když má střed.*

V takovém případě se jedná o osovou kolineaci nebo nějaký její derivát.

Korespondence mezi rovinami  $\rho$  a  $\sigma$  na obr. 8.26 je obyčejné středové promítání mezi dvěma rovinami v prostoru; odborně se takové korespondenci říká *perspektivní kolineace*. Osovou kolineaci v rovině tedy můžeme chápat jako průmět perspektivní kolineace mezi dvěma rovinami v prostoru do jiné roviny.

Nad obr. 8.26 asi nikoho nepřekvapí, že první aplikace osově kolineace (resp. afinity) potkáme při sestřování řezů jehlanovitých (resp. hranolovitých) těles, viz cvičení 11.3.

### 8.3 Hierarchie geometrických zobrazení

Všechny diskutované typy zobrazení si na závěr zorganizujeme. V následující tabulce uvádíme, které vlastnosti se při tom či onom zobrazení zachovávají, přičemž podstatné invarianty jsou zvýrazněny symbolem + (místo obyčejného +). V následujícím přehledu samozřejmě nevystupuje dilatace (viz odst. 7.1).

	kolin.	vzdál.	děl. pom.	dvojpom.	rovnob.	obs.	odch.
projektivní	+	–	–	+	–	–	–
afinní	+	–	+	+	+	–	–
ekviafinní	+	–	+	+	+	+	–
podobná	+	–	+	+	+	–	+
shodná	+	+	+	+	+	+	+
konformní	–	–	–	–	–	–	+

Tabulka 8.2: Přehled geometrických zobrazení a jejich vlastností.

*Ekviafinní* zobrazení jsou taková afinní zobrazení, jež zachovávají obsahy plošných útvarů (v prostoru samozřejmě objemy). Příklady ekviafinních zobrazení jsou všechna shodná zobrazení, elace a šikmá symetrie. *Konformní* zobrazení jsou zobrazení, která zachovávají odchylky protínajících se křivek. Kromě všech podobných zobrazení je to např. kruhová inverze.

Přímo z definicí a odvozených vlastností umíme zorganizovat všechny diskutované typy zobrazení jako na obr. 8.27 (šipka naznačuje podřízenost ve smyslu každé shodné je podobné apod.) Z uvedeného také plynou následující jednoduché důsledky:

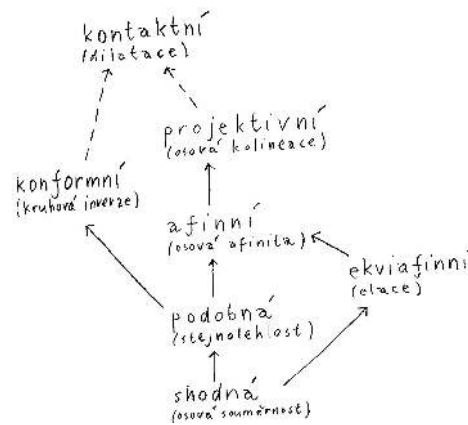
#### Důsledky.

- (1) *Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je afinní.*
- (2) *Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností jakýchkoli (tedy i nekolineárních) trojic bodů, je podobné.*
- (3) *Konformní zobrazení, které je projektivní, je podobné.*
- (4) *Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je shodné.*

#### Poznámky

Všechna zobrazení od shodných po afinní jsou definovaná mezi eukleidovskými prostory (různých dimenzí). Projektivní zobrazení musíme uvažovat mezi projektivními rozšířeními eukleidovských prostorů. Z vlastností základního konformního zobrazení — kruhové inverze — víme, že tuto nelze globálně definovat v eukleidovské rovině, ale ani v jejím projektivním rozšíření. Tím správným prostorem je tzv. Möbiovo rozšíření eukleidovské roviny, což je rozšíření o jeden jediný nevlastní bod. Möbiovu rovinu lze identifikovat se sférou, a to pomocí stereografické projekce, viz obr. 7.13.





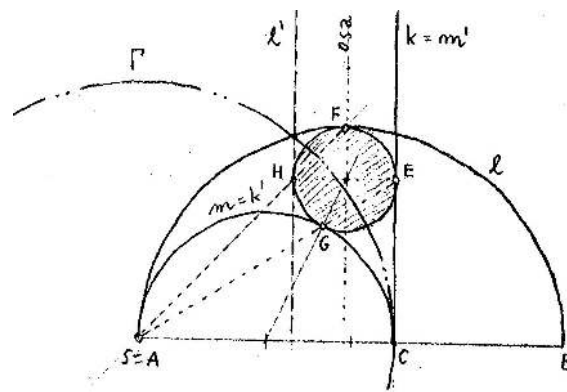
Obrázek 8.27: Hierarchie geometrických zobrazení (v závorce uveden typický představitel z každé třídy).

Vzhledem k tomu, že shodná, podobná a také ekviafinní zobrazení jsou nutně prostá, není možné tímto způsobem zobrazit trojrozměrný prostor do roviny. Zobrazení prostoru do roviny, která zobrazují přímky na přímky, jsou tedy projektivní nebo afinni — s tímto poznatkem bychom měli otvírat následující kapitolu.

## 9 Typické úlohy

### 9.1 Opět úloha Apollóniova

Na obr. 6.56 (str. 57) jsme si uvědomovali, že s tehdejšími dovednostmi jsme neuměli sestavit kružnice, které by se dotýkaly daných půlkružnic a přímky. Řešení pomocí chytře zvolené kruhové inverze je na následujícím obrázku:



Obrázek 9.28: Kružnice dotýkající se kolmice  $k$  a půlkružnic  $AB$  a  $AC$  pomocí kruhové inverze.

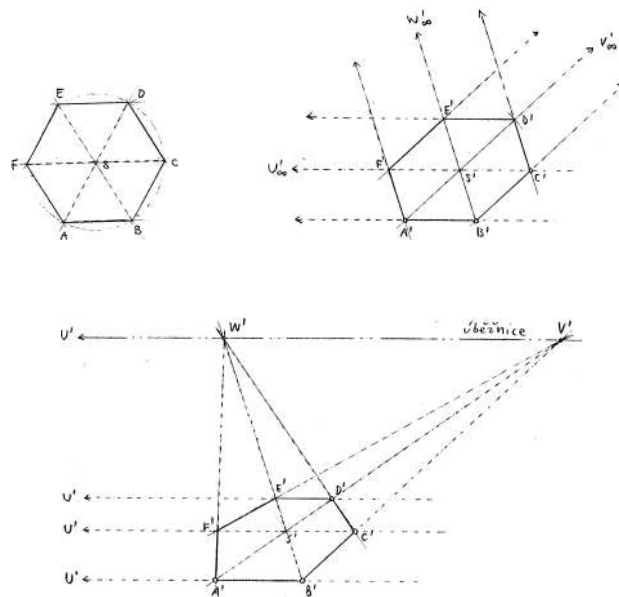
Střed kruhové inverze byl zvolen v bodě  $A$  — tato volba zaručuje, že půlkružnice  $l, m$ , které

se dotýkají v bodě  $S$ , se transformují na polopřímky  $l', m'$ , které jsou rovnoběžné. Poloměr řídicí kružnice byl zvolen  $AC$  — tato volba zaručuje, že půlkružnice  $m$  a kolmice  $k$ , které se v bodě  $C$  dotýkají, se transformují do kolmice  $k$  a půlkružnice  $m$ . To v důsledku znamená, že hledaná kružnice se při této kruhové inverzi transformuje sama do sebe! Konstrukce kružnice, která se dotýká dvou rovnoběžek  $l', m'$  a jedné kružnice  $k'$  je obzvlášť jednoduchá. . .

## 9.2 Obraz pravidelného mnohoúhelníku

Na konci odst. 7.8 (resp. 7.10) jsme si uvědomili, že každé afinní (projektivní) zobrazení roviny je jednoznačně určeno obrazem tří (čtyř) bodů v obecné poloze. V obou případech se pro konstrukce libovolného bodu v rovině užívá pouze vlastností, které jsou při tom či onom zobrazení invariantní. Na obr. 9.29 je sestrojen afinní a projektivní obraz pravidelného šestiúhelníku:

- V afinním případě je zobrazení určeno obrazy vrcholů  $A, B, C$  — při konstrukcích se využívá toho, že obrazem rovnoběžek jsou zase rovnoběžky<sup>11</sup> a dělicí poměry trojic kolineárních bodů se zachovávají.
- V projektivním případě je zobrazení určeno obrazy vrcholů  $A, B, C, D$  — při konstrukcích se využívá úběžníků<sup>12</sup> a toho, že dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů jsou invariantní.

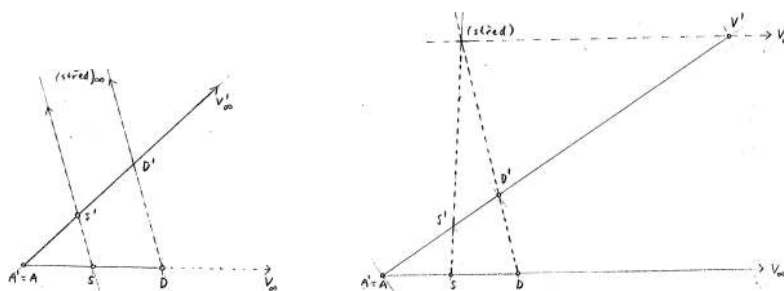


Obrázek 9.29: Pravidelný šestiúhelník a jeho afinní, resp. projektivní obraz.

Připomenutí základní konstrukce přenášení dělicího poměru, resp. dvojpoměru z jedné přímky na druhou je na obr. 9.30:

<sup>11</sup>Na obrázcích značíme jako přímky s nevlastními průsečíky.

<sup>12</sup>Všechny úběžníky leží na úběžnici, tj. přímce, která je obrazem nevlastní přímky roviny.

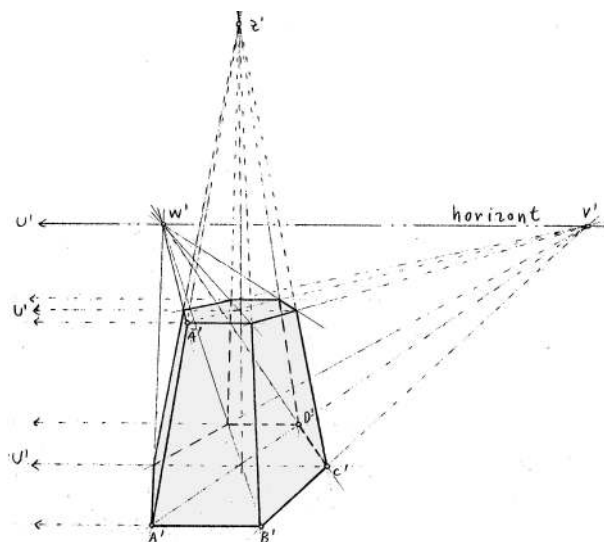


Obrázek 9.30: Přenášení dělicího poměru, resp. dvojpoměru.

### 9.3 Obraz hranolu a hranatých těles

Při afinním, resp. projektivním zobrazení prostoru do roviny potřebujeme navíc nějakou informaci o zobrazení jednoho dalšího bodu, který neleží v dříve zobrazené rovině. Tuto dovednost si vyzkoušíme na konstrukci obrazu pravidelného hranolu.

- V afinním případě je obraz hranolu určen obrazy tří vrcholů spodní podstavy a obrazem jednoho vrcholu horní podstavy.
- V projektivním případě obraz jednoho dalšího bodu samozřejmě nestačí! Tuto nejednoznačnost lze eliminovat různě — na obr. 9.31 je sestaven projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu, který je určen obrazy vrcholů  $A, B, C, D$  spodní podstavy, obrazem vrcholu  $\bar{A}$  horní podstavy a úběžníkem  $Z'$  hrany  $A\bar{A}$ .



Obrázek 9.31: Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu.

Obě podstavy hranolu jsou ve skutečnosti rovnoběžné, a proto mají tutéž úběžnici (na obrázku přejmenována na horizont). Díky tomu si můžeme všimnout, že korespondence mezi šestiúhelní-

kem spodní podstavy a šestiúhelníkem horní podstavy je naše oblíbená **osová kolineace**,<sup>13</sup> jejíž osa je právě tato úběžnice a střed je úběžník  $Z'$ . Tento postřeh je samozřejmě možné (a vhodné!) konstrukčně využít. . .

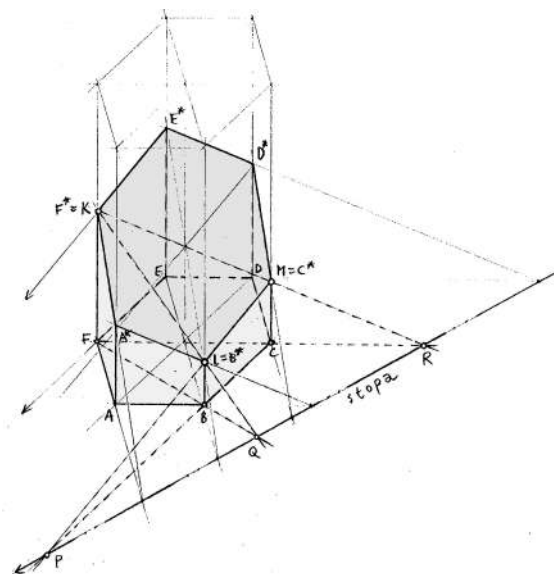
### Poznámky

Každý hranol můžeme chápat jako jehlan, jehož vrchol je nevlastní. Pokud máme sestavit obraz obecného jehlanu, zjišťujeme, že v předchozím rozboru se téměř nic nemění. Při zobrazování jiných hranatých těles může být situace komplikovanější, ale pouze z technického hlediska — teoretické principy jsou pořád stejné. K těmto otázkám se vracíme v následující kapitole, takže je prozatím opouštíme.

## 9.4 Řez hranolu a jehlanu

Konstrukci řezu obecného hranolu obecnou rovinou zatím neumíme, ale jednoduché úlohy tohoto typu můžeme řešit už nyní s odkazem na **osovou kolineaci** (resp. **afinitu**) a Desarguesovu větu, viz obr. 8.26.

Na následujícím obrázku je afinní průmět hranolu a body  $K, L, M$ , které všechny leží na svislých hranách. V tomto případě je korespondence mezi průmětem šestiúhelníku podstavy a průmětem šestiúhelníku řezu osová afinita, jejíž osou je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu a směrem je směr svislých hran. Pomocí této afinity snadno sestojíme všechny ostatní body řezu.



Obrázek 9.32: Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou  $KLM$ .

Právě konstrukce průsečnice rovin (tj. osy afinity) může obecně dělat problém, jinak jsou všechny úlohy tohoto typu pro nás stejné. Pokud bychom pracovali s projektivním obrazem hranolu (nebo s jakýmkoli obrazem jehlanu), pak bychom se místo na osovou afinitu odkazovali na osovou kolineaci.

<sup>13</sup>Pokud by byl náhodou úběžník  $Z'$  nevlastním bodem, potom by se jednalo o osovou afinitu.

K řezům obecně se ještě vracíme v odst. 17.2.



V této kapitole zmiňujeme několik metod zobrazování trojrozměrného prostoru do roviny. Po stručném přehledu se podíváme na vybrané metody podrobněji.

## 10 Úvod

Kromě několika exotických zobrazení uvažujeme výhradně různé typy promítání prostoru do roviny. Promítání rozlišujeme na

- *středová* (z vlastního středu),
- *rovnoběžná* (z nevlastního středu).

U rovnoběžného promítání dále podle polohy směru promítání k průmětně rozlišujeme na

- *kolmá*,
- *šikmá*.

Při jakémkoli promítání je za každým bodem v průmětně schována celá přímka v prostoru. Chceme-li tedy jednoznačně specifikovat skutečnou polohu bodu v prostoru, potřebujeme buď nějakou dodatečnou informaci nebo tzv. *sdružený průmět* na nějakou jinou průmětnu: na mapách se k průmětům význačných bodů přidávají kóty (viz podkap. 13), v technické praxi se poloha bodu v prostoru nejčastěji specifikuje jeho *nárysem* a *púdorysem* (tj. kolmými průměty na dvě navzájem kolmé průmětny, viz podkap. 12).

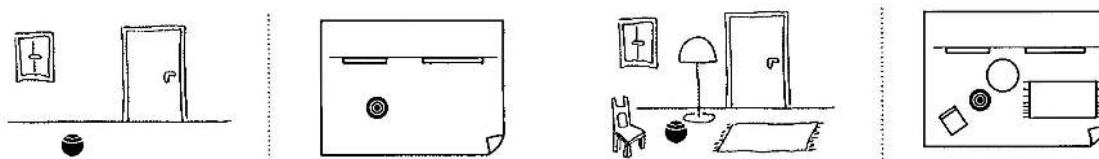
Středová, resp. rovnoběžná promítání jsou základní **projektivní**, resp. **afinní** zobrazení, o nichž už ledacos víme z předchozího textu — každé takové zobrazení je jednoznačně určeno obrazy několika bodů v obecné poloze. Promítání zadaná tímto způsobem nazýváme *volná* (viz podkap. 11), v ostatních případech mluvíme o promítáních *vázaných*.

## 10.1 Základní úlohy

Velice typickým problémem, se kterým se budeme potýkat především, je sestrojení názorného průmětu tělesa zadaného nárysem a půdorysem, příp. naopak. Přibližným řešením takových úloh se mohou bavit děti od nejtútlejšího věku, viz obr. 10.1; my bychom měli umět klíčové postřehy pojmenovat a zrealizovat přesně! Připomeňme, že základní dovedností, bez které se v těchto případech neobejdeme, nadále zůstává

- (1) přenášení dvojpoměru, resp. dělicího poměru kolineárních bodů.

V dalším budeme některé postupy **zefektivňovat** a hlavně se naučíme **měřit** úsečky a úhly (které se promítáním zkreslují) ve skutečných velikostech.



Obrázek 10.1: [SMS] K danému průmětu pokoje načrtněte jeho půdorys.

Často bude těleso dáno svým nárysem a půdorysem, vzhledem k těmto průmětnám bude zadána nějaká nová průmětna a střed (směr) promítání. Naším úkolem bude sestrojení průmětu tělesa do této nové průmětny z daného středu (v daném směru), což znamená, že musíme sestrojít průnik několika promítacích paprsků s touto průmětnou. (Jiná úloha vedoucí k týmž konstrukcím je sestrojení stínu vrženého daným tělesem do dané roviny při daném typu osvětlení.) Při těchto úlohách narazíme na problém, ve kterém se velice často chybuje — rozpoznat, zda dvě přímky dané svými průměty jsou ve skutečnosti rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné. *Základní polohové úlohy*, které musíme bezpečně ovládat, tedy jsou:

- (2) rozpoznat vzájemnou polohu dvou přímek,
- (3) sestrojít průnik přímky s rovinou.

Podobná úloha k (2) je např. určit vzájemnou polohu bodu a roviny. Speciálním případem úlohy (3) je konstrukce *stopníků*, tzn. průsečíků přímky s průmětnami. Související úlohy jsou: průnik dvou rovin (speciálně, konstrukce *stop*, tj. průsečnic roviny s průmětnami), řez tělesa rovinou, průsek dvou těles apod.

Při konstrukcích se dále neobejdeme bez umění měření vzdáleností, resp. nanášení dané vzdálenosti na danou přímku, a podobně s odchylkami přímek. Pokud měříme vzdálenost bodu od roviny, neobejdeme se bez pomocné kolmice (a její paty. . .). *Základní metrické (měřičské) úlohy*, které musíme bezpečně ovládat, tedy jsou:

- (4) určit vzdálenost dvou bodů,
- (5) určit odchylku dvou přímek,
- (6) sestrojít kolmici.

Související úlohy jsou: určit vzdálenost bodu od přímky, určit vzdálenost dvou přímek, určit odchylku přímky od roviny, sestrojít kolmou rovinu k dané přímce apod.



## 10.2 Výhled

Jednou z motivací k dalšímu studiu této kapitoly je touha po názorném a správném zobrazování různých těles, zejména těch hezkých (viz odst. 17.3). Poté, co si uvědomíme základní zákonitosti a osvojíme si několik základních konstrukcí, zjistíme, že umíme zobrazit (příp. změřit) téměř cokoli (viz např. obr. na str. 176).

První zákonitosti včetně opakování základních poznatků a konstrukcí z odstavců o afinních a projektivních zobrazeních jsou zformulovány v podkap. 11. Většinu dílčích problémů, které při reálných konstrukcích potřebujeme, představujeme v podkapitole 12. Tam také diskutujeme pár obecně platných principů, které se týkají vzájemných poloh, vzdáleností, kolmostí a odchylek rovin/přímek/bodů. Několik komplexnějších úloh najdete v podkap. 17. Ostatní části jsou veskrze informativní.

# 11 Volné promítání

Volné promítání rozlišujeme jak středové, tak rovnoběžné, přičemž přívlastek volné znamená, že průmětna a střed/směr promítání nejsou vzhledem k zobrazovanému objektu nijak předem specifikovány. V této podkapitole zopakujeme několik obecných poznatků o určenosti projektivních a afinních zobrazení a odtud odvozených konstrukcí průmětu obecného bodu v prostoru. Dále představíme řešení základní polohové úlohy — průnik přímky s rovinou — a s těmito dovednostmi zamíříme do dalších částí ke slibovaným efektivnějším postupům.

## 11.1 O určenosti volného promítání

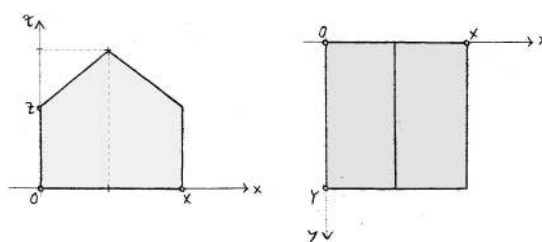
Volný průmět tělesa bývá zadán průměty několika málo bodů. Tím je také určen průmět libovolného bodu v prostoru, tedy volné promítání jako takové. Podle toho, zda se jedná o promítání středové nebo rovnoběžné, se liší způsoby určení: Středové promítání je projektivní zobrazení a závěrečná poznámka odst. 7.10 na str. 85 nám říká, kolik bodů vlastně potřebujeme, aby byl průmět určen jednoznačně. Podobně, rovnoběžné promítání je afinní, o určenosti takových zobrazení se věnuje závěr odst. 7.8 na str. 77.

Promítáním prostoru do roviny samozřejmě nikdy nevyčerpáme všechna možná projektivní, resp. afinní zobrazení, proto průměty určujících bodů **nemohou** být úplně libovolné. Určitě se např. nemůže stát, že by se tři body v obecné poloze promítly do jednoho bodu. Následující věta je jednou z možných formulací tohoto principu v případě rovnoběžného promítání:

**Věta** (Pohlkeova–Schwarzova). *Rovnoběžným průmětem tří navzájem kolmých a stejně dlouhých úseček se společným krajním bodem může být jakákoli trojice úseček v rovině se společným krajním bodem, přičemž nejvýše jedna z těchto úseček nebo nejvýše jedna dvojice těchto úseček může mít nulovou délku, resp. odchylku.*

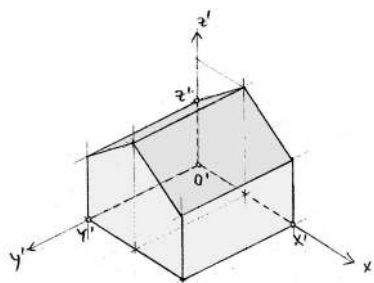
Za stejně dlouhými navzájem kolmými úsečkami si samozřejmě představujeme nějakou **kartézskou** souřadnou soustavu. Každý bod v prostoru je jednoznačně určen svými souřadnicemi vzhledem k této soustavě. Souřadnice geometricky reprezentujeme body, které jsou sestrojeny pomocí rovnoběžek se souřadnými osami. Pomocný bod v rovině určené osami  $x, y$ , resp.  $x, z$  budeme nazývat jeho *půdorysem*, resp. *nárysem*.

Počátek pomocné souřadné soustavy a referenční body na jednotlivých osách (např. jednotky) budeme obvykle značit  $O$  a  $X, Y, Z$ . Z uvedeného je patrné, jak může být volné promítání určeno, viz následující tři obrázky:



Obrázek 11.2: Nárýs a půdorys tělesa.

- Volné **rovnoběžné** promítání je určeno obrazy  $O', X', Y', Z'$ . Pomocné body na osách sestrojíme tak, aby byly zachovány **dělicí poměry**; k sestrojení průmětu bodu stačí několik **rovnoběžek** se souřadnými osami.



Obrázek 11.3: Volný rovnoběžný průmět tělesa z obr. 11.2.

- Volné **středové** promítání je určeno obrazy  $O', X', Y', Z'$  a úběžníky souřadných os  $U', V', W'$ . Pomocné body na osách sestrojíme tak, aby byly zachovány **dvojpoměry**; k sestrojení průmětu bodu stačí několik přímk procházejících **úběžníky**.

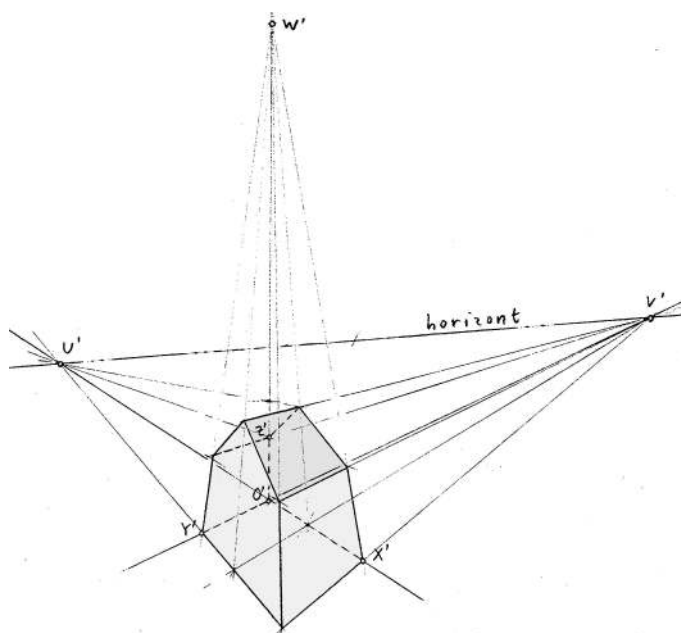
Naopak, je-li dán volný průmět bodu, můžeme pomocí rovnoběžek (resp. spojnic s úběžníky) sestrojít pomocné body na osách a přenesením dělicích poměrů (resp. dvojpoměrů) určit sdružené průměty, tzn. souřadnice tohoto bodu.<sup>1</sup>

Když umíme zacházet s průměty jednoho bodu, lze opakováním uvedených konstrukcí sestrojít prakticky cokoli, akorát to asi nebude příliš efektivní. V dalších odstavcích se zejména naučíme, jak si práci zpříjemnit a zjednodušit.

### Důležitá poznámka

Připomínáme hlavní slabinu této zobrazovací metody: Uvedené návody nefungují v případě, že průměty některých souřadných os splývají. V takovém případě je nutné hledat alternativy, které mohou být zejména v případě obecného středového zobrazení poměrně krkolomné. Podobné nepříjemnosti zcela odpadají u tzv. vázaných zobrazovacích metod, kdy je předem specifikovaná průmětna a střed/směr promítání vzhledem k osovému kříži. Také tato poznámka by nás měla motivovat k četbě dalších odstavců. . .

<sup>1</sup>Přenášení dělicího poměru, resp. dvojpoměru bodů z jedné přímky na druhou je naznačeno na obr. 9.30.



Obrázek 11.4: Volný středový průmět tělesa z obr. 11.2.

## 11.2 Průnik přímky a roviny

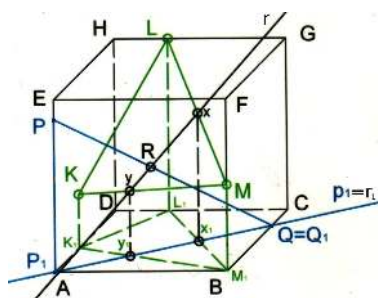
V tomto odstavci představíme obecné řešení základní polohové úlohy — pro danou přímku  $p$  a rovinu  $\rho$  máme sestavit jejich průnik, příp. zjistit, že se neprotínají.

Každý bod musí být sestaven jako průnik dvou přímek (příp. průnik přímky a kružnice nebo průnik dvou kružnic). Abychom mohli tvrdit, že se dvě zobrazené přímky v prostoru skutečně protínají, musíme mít jistotu, že leží v **jedné rovině**! Odtud je odvozen následující obecný návod řešení:

- (1) nejdříve zvolíme pomocnou (v podstatě libovolnou) rovinu obsahující danou přímku;
- (2) sestojíme průsečnici  $r$  této roviny s rovinou  $\rho$ ;
- (3) hledaný bod je průsečíkem přímek  $p$  a  $r$  (pokud je  $p = r$ , potom celá přímka  $p$  leží v rovině  $\rho$ ; pokud je  $p \parallel r$ , potom taky  $p \parallel \rho$ , a tudíž se  $p$  a  $\rho$  neprotínají).

Řešení konkrétních úloh se samozřejmě odvíjí od toho, jak jsou zadány. Obecně však platí, že pomocná rovina v prvním kroku nemůže být volena úplně libovolně, ale naopak hodně specificky, abychom se neocitli v bludném kruhu!

Na obr. 11.5 je dán volný rovnoběžný průmět krychle, vzhledem k níž je vymezena poloha přímky a roviny. Pomocná rovina je volena ve směru hrany  $AE$  a všechny naznačené svislé přímky jsou s touto hranou rovnoběžné.



Obrázek 11.5: [M. Ingrštová, 2010] Průnik přímky  $p = PQ$  a roviny  $\rho = KLM$  (bod  $K$  patří do stěny  $ADHE$ ):

- (1) pomocnou rovinu obsahující  $p$  volíme ve směru hrany  $AE$ ,
- (2) průsečnice  $r$  je určena pomocnými body  $x$  a  $y$ , které odvozujeme z jejich „půdorysů“  $x_1$  a  $y_1$ ,
- (3) bod  $R = p \cap r$  je právě hledaným průnikem  $p \cap \rho$ .

Typickými úlohami, které se v této souvislosti řeší, jsou řezy (hranatých) těles. Jedná se totiž o několikrát opakování této základní konstrukce, viz odstavce 9.4 a 17.2.

### 11.3 Cvičení

(1) V úloze na obrázku obr. 11.5:

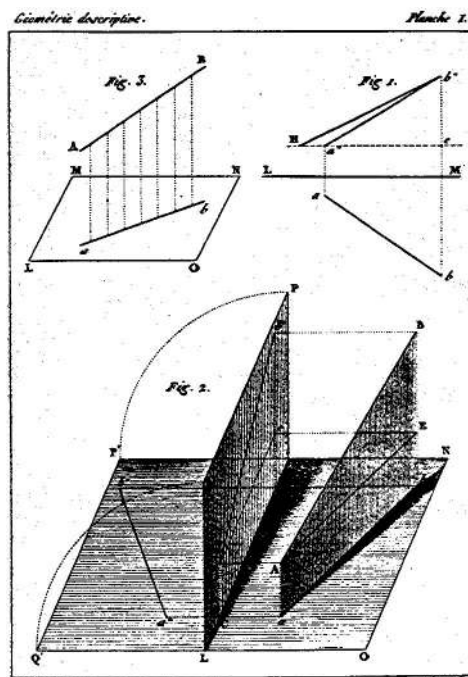
- sestrojte průniky přímek  $KL$ ,  $LM$  a  $KM$  s rovinou podstavy  $ABCD$ ,
- sestrojte řez roviny  $KLM$  s krychlí.



(2) V pravidelném pětibokém hranolu s podstavami  $ABCDE$  a  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$  jsou dány body  $K$ ,  $L$  a  $M$  tak, že  $K \in A\bar{A}$ ,  $L \in B\bar{C}\bar{C}$  a  $M \in \bar{D}\bar{E}$ . Sestrojte volný středový průmět tohoto hranolu a jeho řez rovinou  $\rho = KLM$ .

## 12 Mongeovo promítání

*Mongeovo promítání* je kolmé (a tedy rovnoběžné) promítání na dvě navzájem kolmé průmětny. Průmětnům říkáme půdorys a nárys, proto se odpovídající průmětny jmenují půdorysná a nárysná. Na rozdíl od volné manipulace s nárysem a půdorysem jako výše jsou průměty v Mongeově promítání jaksi **sduženy** — sr. 11.3 a 12.8. Tento zdánlivý detail dělá z této zobrazovací metody skutečně účinný nástroj, který doceníme zejména při řešení metrických úloh. V následujících odstavcích postupně představíme všechny základní úlohy zmiňované v odst. 10.1.

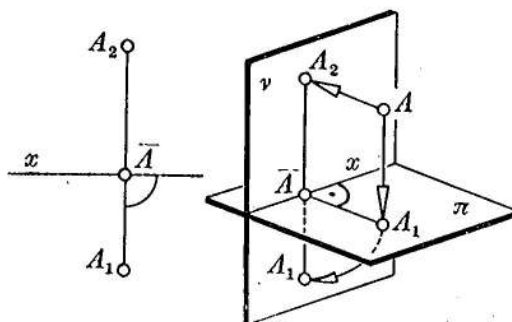


Obrázek 12.6: [Ka] Ukázka z prvního vydání Mongeovy Deskriptivní geometrie (1798).

## 12.1 Zobrazení bodu, přímky a roviny

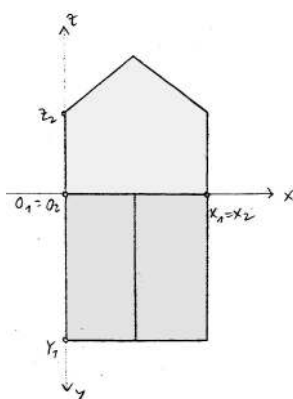
### Bod

Na obr. 12.7 je ukázáno, jak jsou bodu v prostoru přiřazeny jeho *sdužené průměty* vzhledem ke dvěma navzájem kolným průmětnám (s průsečnicí označenou  $x$ ): Bod  $A$  se kolmo promítne do



Obrázek 12.7: [Me] Mongeovy sdužené průměty bodu.

první roviny (půdorys  $A_1$ ) a do druhé roviny (nárys  $A_2$ ). Poté se průměty sduží tak, že se jedna průmětna otočí do druhé kolem průsečnice  $x$ . Odtud plyne, že body  $A_1, A_2$  v rovině představují sdužené průměty nějakého bodu v prostoru, právě když přímka  $A_1A_2$  je kolmá na  $x$ . Každý bod je svými sduženými průměty určen naprosto jednoznačně.



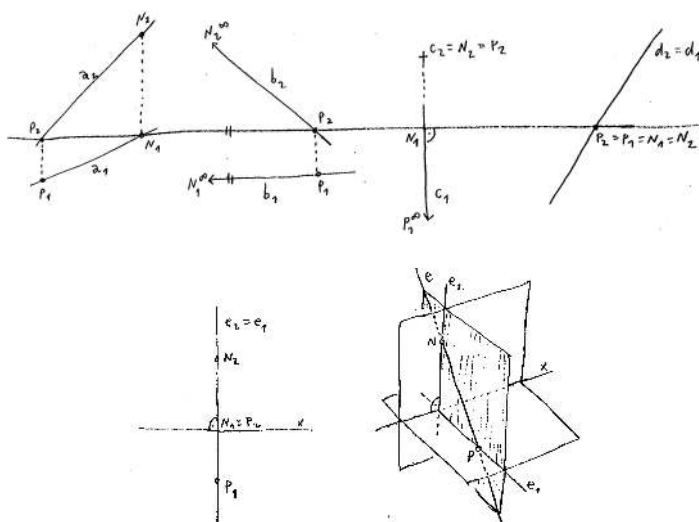
Obrázek 12.8: Mongeovy sružené průměty tělesa z obr. 11.2.

### Přímka

Sružené průměty přímky jsou zpravidla přímky, ale nemusí tomu tak být pokaždé — je-li přímka kolmá k některé průmětně, pak odpovídajícím průmětem je bod. Přímka je svými sruženými průměty určena jednoznačně právě tehdy, když není kolmá k ose  $x$ , tzn. neleží v rovině, která je kolmá k oběma průmětnám současně. V každém případě je přímka určena jednoznačně sruženými průměty dvou různých bodů, které na ní leží. . .

Pro lepší představu často používáme tzv. *stopníky*, což jsou průsečíky přímky s průmětnami. Pokud je přímka s některou průmětnou rovnoběžná, pak odpovídající stopník je nevlastní. . .

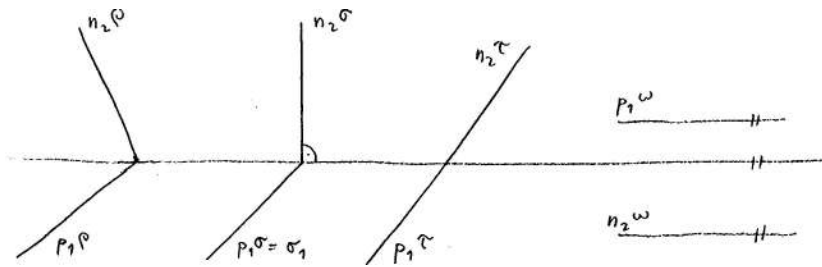
Různé polohy přímek s jejich stopníky jsou na obr. 12.9. Uvědomte si, že konstrukce stopníků je velmi speciálním případem základní polohové úlohy — průnik přímky s rovinou.

Obrázek 12.9: Sružené průměty přímek a jejich stopníky; přímka  $e$  je jednoznačně určena teprve svými stopníky (nebo nějakým jiným dodatkem).

## Rovina

Je-li rovina kolmá k některé průmětně, pak odpovídajícím průmětem této roviny je přímka; v opačném případě je jejím průmětem celá průmětna. Rovina je jednoznačně určena sdruženými průměty tří různých (a nekolineárních) bodů, které v ní leží.

Jiný a zpravidla názornější způsob určení roviny je pomocí tzv. *stop*, což jsou průsečnice s průmětnami. Nárys půdorysné stopy a půdorys nárysné stopy splývají s osou  $x$ , proto je na obrázcích nepopisujeme. Pokud rovina neobsahuje osu  $x$ , pak je svými stopami jednoznačně určena. V případě, že je rovina s některou průmětnou rovnoběžná, je odpovídající stopa nevlastní. . .

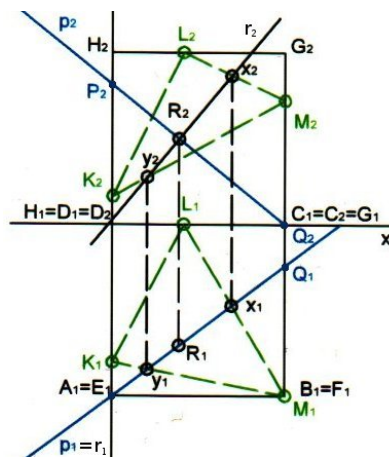


Obrázek 12.10: Rovina je (skoro vždy) určena svými stopami.

## 12.2 Polohové úlohy

### Průnik a vzájemná poloha přímky a roviny

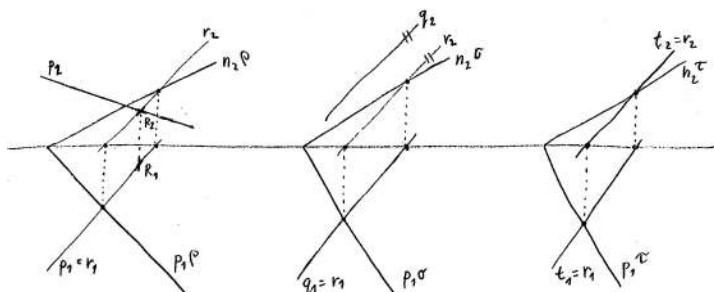
Doslovné překreslení konstrukce průniku přímky a roviny z obr. 11.5 v Mongeově promítání je na obr. 12.11. Motivace a zdůvodnění jsou v odst. 11.2. Průsečnice  $r$  dané roviny s pomocnou svislou rovinou se občas nazývá *krycí přímka*, protože se její půdorys kryje s půdorysem  $p$ ,



Obrázek 12.11: [M. Ingrštová, 2010] Průnik přímky  $p = PQ$  a roviny  $\rho = KLM$ :

- (1)  $r$  je krycí přímka pro směr kolmý k půdorysně ( $r_1 = p_1$ ),
- (2) její nárys je určen body  $x, y$ ,
- (3) bod  $R = p \cap r$  je právě hledaným průnikem  $p \cap \rho$ .

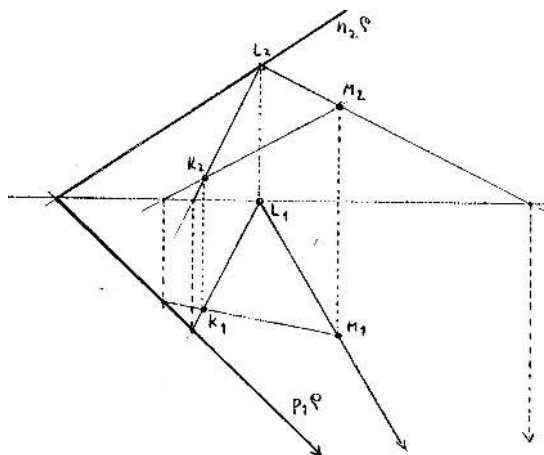
Pokud by se náhodu stalo, že výše sestrojena přímka  $r$  se s  $p$  neprotíná, pak to znamená, že přímka  $p$  a rovina  $\rho$  jsou rovnoběžné. Pokud by se stalo, že  $r$  a  $p$  splývají, pak to znamená, že  $p$  leží celá v  $\rho$ . Takto jsme vyčerpali všechny možné vzájemné polohy přímky a roviny v prostoru. Všechny tyto možnosti v případě, že rovina je dána svými stopami, najdete na obr. 12.12.



Obrázek 12.12: Vzájemné polohy přímky a roviny: různoběžnost ( $p \cap \rho = R$ ), rovnoběžnost ( $q \parallel \sigma$ ), incidentnost ( $t \subset \tau$ ).

### Průnik a vzájemná poloha dvou rovin

Speciálním případem průniku dvou rovin jsou stopy roviny, což jsou průsečnice s průmětnami. Konstrukce stop roviny dané třemi body je na obr. 12.13. Podobně by se postupovalo v případě, že rovina je dána dvěma přímkami nebo bodem a přímkou apod.

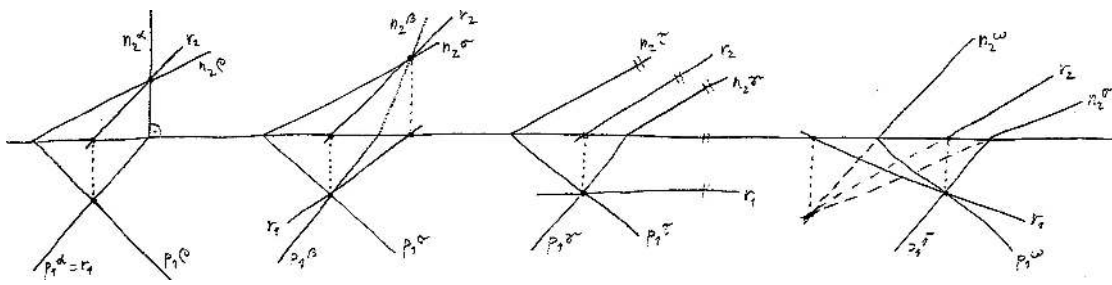


Obrázek 12.13: Stopy roviny  $\rho = KLM$  jsou určeny stopníky několika přímek ležících v  $\rho$ .

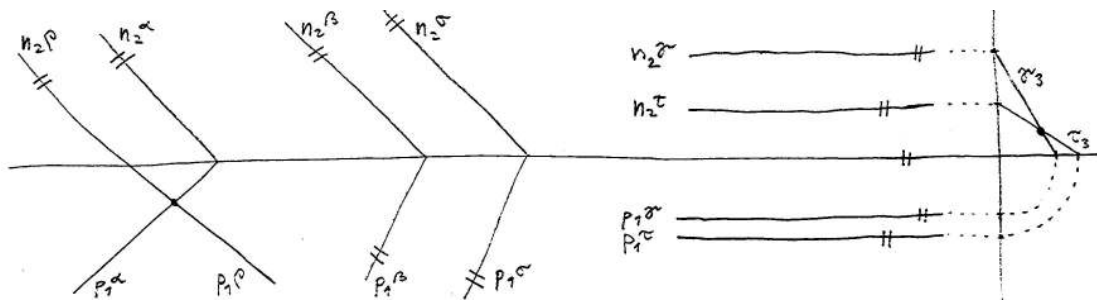
Jsou-li dvě roviny dány stopami, je konstrukce jejich průniku obzvlášť názorná, viz obr. 12.14. V jakémkoli jiném případě stačí sestrojít průnik nějaké přímky z jedné roviny s rovinou druhou a tuto konstrukci zopakovat aspoň dvakrát. . .

Generickou polohou dvou rovin je různoběžnost. Pokud jsou roviny náhodou rovnoběžné, pak obě dvojice jejich stop musí být taky rovnoběžné. Pozor, opačné tvrzení obecně neplatí, viz obr. 12.15. Pro úplnost: roviny splývají, právě když obě dvojice jejich stop splývají.





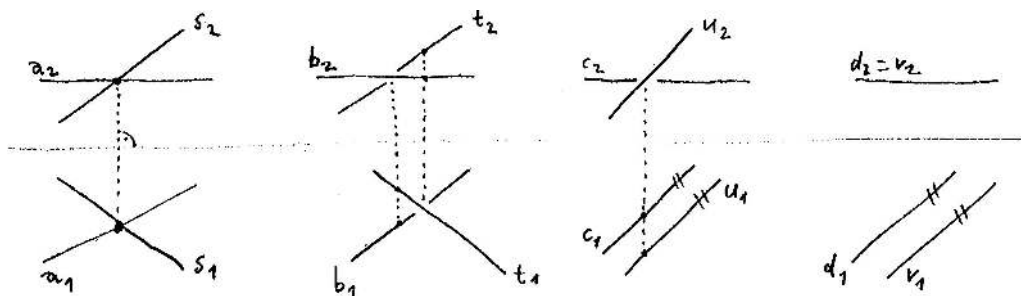
Obrázek 12.14: Průsečnice rovin zadaných stopami.



Obrázek 12.15: Vzájemné polohy dvou rovin: různoběžnost, rovnoběžnost a ještě jedna různoběžnost.

### Vzájemná poloha dvou přímek

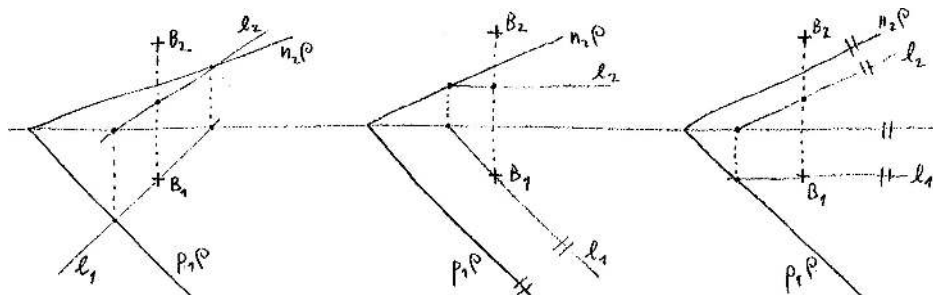
Všechny možné vzájemné polohy představujeme na obr. 12.16; v mimoběžném případě naznačujeme viditelnost křížení v každém průmětu. Pro úplnost: přímky splývají, právě když obě dvojice jejich sdružených průmětů splývají.



Obrázek 12.16: Vzájemné polohy dvou přímek: různoběžnost, dvakrát mimoběžnost a rovnoběžnost.

### Další postřehy

Předchozí diskuzi ještě doplníme poznámkou o vzájemné poloze bodu a přímky, resp. bodu a roviny. V obou případech rozlišujeme pouze dvě možnosti: bod na daném objektu buď leží nebo nikoli. Rozpoznat vzájemnou polohu bodu a přímky je samozřejmě triviální; v případě bodu a roviny si musíme pomoci právě nějakou (krycí) přímkou, viz obr. 12.17.



Obrázek 12.17: Vzájemná poloha bodu  $B$  a roviny  $\rho$ :  $l$  je libovolná přímka v  $\rho$  taková, že  $l_1 \ni B_1$ ; sestrojíme nárys  $l_2$  a uděláme závěr:  $B \in \rho \iff B_2 \in l_2$ .

⇒ Z uvedeného by mělo být zřejmé, jak by se řešila např. úloha sestrojiti nárys bodu ležícího v dané rovině, je-li dán jeho půdorys apod.

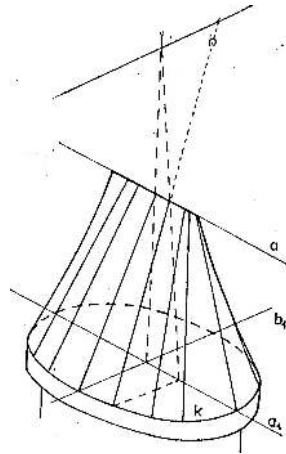
Specifické přímky  $l$  na obr. 12.17 jsou tzv. *hlavní přímky* roviny  $\rho$ , což jsou přímky ležící v této rovině rovnoběžné s některou z průměten. To v důsledku znamená, že hlavní přímky jsou rovnoběžné s některou ze stop roviny  $\rho$ . Přímky ležící v  $\rho$ , které jsou kolmé k některé ze stop, jsou tzv. *spádové přímky* roviny  $\rho$ .

### Příčky

Jiné typické polohové úlohy jsou konstrukce *příček* mimoběžných přímek (příčka je přímka, která protíná dané mimoběžky). Každé dvě mimoběžky mají nekonečně hodně příček, takže příčka je jednoznačně vymezena až nějakou dodatečnou podmínkou jako např. aby procházela daným bodem, aby měla daný směr, aby byla nejkratší apod. Pomocí příček lze vytvářet zajímavé přímkové plochy, které se hojně objevují v technické praxi. Např. společné příčky tří navzájem mimoběžných přímek tvoří plochu tzv. eliptického hyperboloidu (chladičí věže). Jiný příklad je na obr. 12.18.



Ačkoli toto téma podrobněji nediskutujeme, mělo by být jasné, že aspoň z teoretického hlediska je všechno jasné. Pro představu rozebereme případ konstrukce příčky k mimoběžkám  $a, b$  z nějakého bodu  $K$ : všechny přímky jdoucí bodem  $K$  a protínající přímku  $b$  tvoří rovinu, kterou si označíme třeba  $\beta$ ; hledaná příčka je právě taková přímka, která leží v této rovině a současně protíná přímku  $a$ . Proto stačí:

- (1) uvážit rovinu  $\beta = K + b$ ;
- (2) sestrojiti průnik  $A = a \cap \beta$ ;
- (3) spojit body  $K$  a  $A$ ;
- (4) vyznačit průsečík s přímkou  $b$ .



Obrázek 12.18: [Mach] Krov hradní věže ve Štramberku: krokve jsou příčky k mimoběžkám  $a$  a  $b$  z několika bodů na kruhové podezdívce  $k$ .

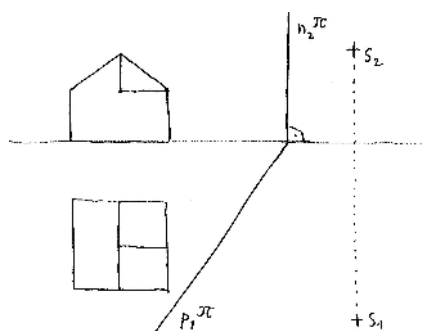
### 12.3 Cvičení

- (1) U všech výše uvedených Mongeových obrázků si utvořte prostorovou představu o skutečné poloze zobrazených objektů vzhledem k průmětnám. Tuto představu pak volně načrtněte podobně jako na obr. 12.6 nebo 12.9.
- (2) Pro zadání jako na obr. 12.11 sestrojte stopníky přímky  $p$  a stopy roviny  $\rho$  a znovu určete průsečík  $R = p \cap \rho$ .
- (3) Rovina  $\sigma$  je dána stopami a přímka  $q$  je dána sdruženými průměty svých stopníků. Dokažte, že umíte určit průnik  $R = q \cap \sigma$  ve všemožných speciálních případech jako např.  $q \perp x$  nebo  $\sigma \perp x$ .
- (4) Určete průsečnici dvou rovin určených stopami v případě, že průsečík některé dvojice stop není vůbec dostupný.
- (5) Pro zadání ve cvičení 11.3(2) si vhodně zvolte Mongeovy pomocné průmětny (a jednotky) a sestrojte sdružené průměty hranolu včetně řezu rovinou  $\rho$ . 
- (6) Na obr. 12.19 jsou sdružené průměty nějakého tělesa, stopy roviny  $\pi$  a sdružené průměty bodu  $S$ . Sestrojte středový průmět tohoto tělesa z bodu  $S$  do roviny  $\pi$ . (Při konstrukci nepřehlédněte užitečnost pomocných úběžníků.) 
- (7) U předchozí úlohy sestrojte průmět z bodu  $S$  do půdorysny a nárýsny. Nahrďte střed  $S$  nějakým směrem a řešte podobné úlohy...

### 12.4 Metrické úlohy

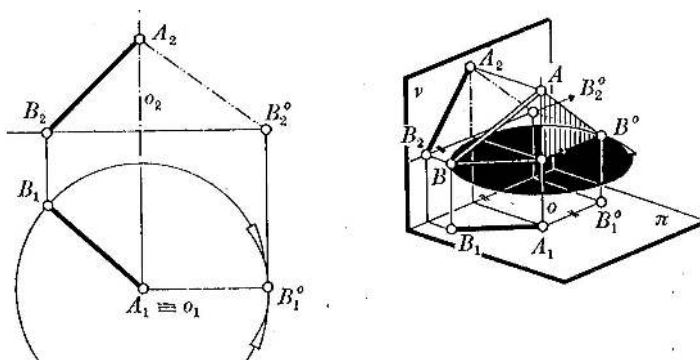
#### Vzdálenost dvou bodů

Pokud je přímka určená danými body rovnoběžná s některou průmětnou, pak v odpovídajícím průmětu vidíme vzdálenost bodů ve skutečné velikosti. Ve všech ostatních případech jsou vzdálenosti zkrácené (a protože promítáme kolmo, tak zkrácené).



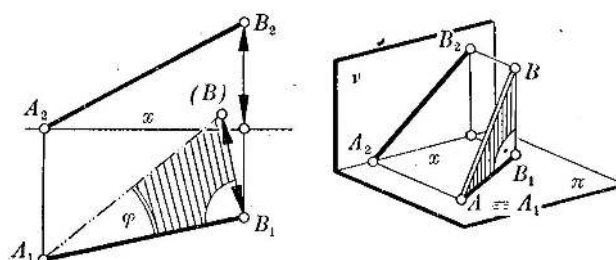
Obrázek 12.19: Sestrojte středový průmět daného objektu z daného středu do dané roviny.

Jedna z možných konstrukcí skutečné vzdálenosti dvou bodů je motivována právě zmíněným postřehem: pootočíme úsečku určenou těmito body do polohy rovnoběžné s některou průmětnou, viz obr. 12.20.



Obrázek 12.20: [Me] Nárýsný průmět úsečky je ve skutečné velikosti právě tehdy, když je tato úsečka s nárýsnou rovnoběžná — proto  $|AB| = |A_2B_2^o|$ .

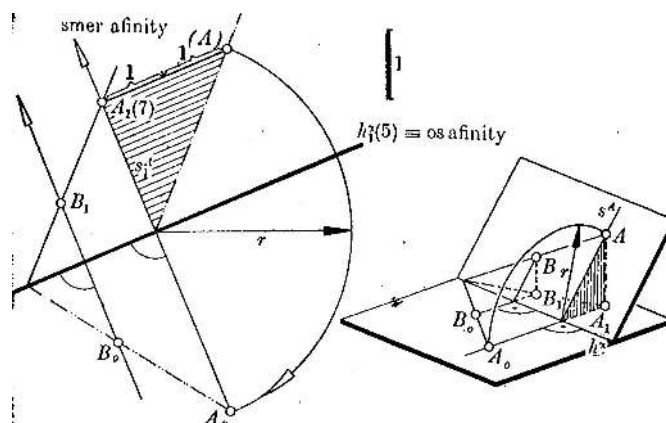
V předchozím otáčíme rovinu určenou body  $A, B$  a jejich půdorysy  $A_1, B_1$  kolem přímky  $AA_1$ . Jiná konstrukce skutečné velikosti úsečky  $AB$  je na obr. 12.21; v tomto případě otáčíme/sklápíme stejnou rovinu kolem přímky  $A_1B_1$  do půdorysny (příp. do roviny rovnoběžné z půdorysnou).



Obrázek 12.21: [Me] Úsečka  $AB$  je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami  $AB_1$ , resp.  $B_1B$ , jejichž velikosti vidíme nezkráceně v půdoryse, resp. náryse.

### Otočení roviny

Rovina, kterou jsme otáčeli v předchozích dvou konstrukcích, byla kolmá k půdorysně, tedy poněkud specifická. Nyní se naučíme otáčet obecnou rovinu do průmětny (příp. do polohy rovnoběžné s průmětnou). Náznorné zpracování je na obr. 12.22, kde je naznačeno otáčení roviny kolem hlavní přímky do roviny rovnoběžné s půdorysnou (nenechte se plést značením — místo sdruženého průmětu jsou použity kóty). Podstatné je, že korespondence mezi průměty bodů do této roviny a jejich otočenými obrazy, je stará známá a oblíbená **osová afinita**.



Obrázek 12.22: [Me] Otočení roviny kolem hlavní přímky do polohy rovnoběžné s půdorysnou: vzdálenost bodu  $A_0$  od osy je rovna velikosti přepony v naznačeném pravoúhlém trojúhelníku.

Osovou afinitu mezi průměty bodů a jejich otočenými obrazy doceníme zejména u úloh, kde vystupuje více bodů, nebo když potřebujeme otočit rovinu zpátky do původní polohy. Konkrétní realizace jedné takové úlohy je na obr. 17.46. Další typické úlohy, kde je vhodné si na tyto postřehy vzpomenout, jsou konstrukce průmětu tělesa do obecné roviny, určení skutečné velikosti řezu nějakého hranolu apod.

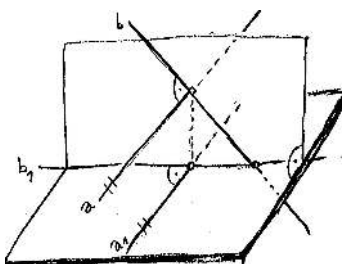
### Kolmost

Odchytku dvou různoběžek vidíme v průmětu nezkráceně, pokud je rovina těmito přímkami určena rovnoběžná s odpovídající průmětnou. V případě, že přímkami jsou kolmé, platí o něco

obecnější a celkem užitečné tvrzení:

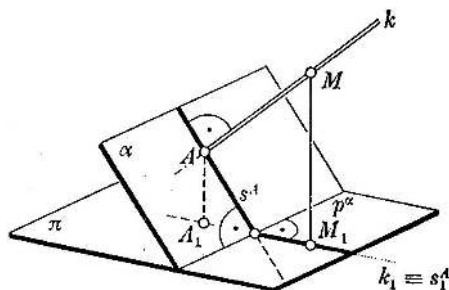
**Věta.** *Kolmým průmětem dvou kolmých přímek jsou kolmé přímky, pokud aspoň jedna z těchto přímek je rovnoběžná s průmětnou.*

Zdůvodnění plyne přímo z definicí kolmosti přímek a rovin (viz odst. 4.20). Abychom se mohli svobodněji vyjadřovat, označíme kolmice  $a, b$  a jejich kolmé průměty  $a_1, b_1$ . Budeme předpokládat, že třeba  $a$  je rovnoběžná s průmětnou, což mj. znamená, že  $a \parallel a_1$ . Protože  $a \perp b$  a promítáme kolmo, je přímka  $a$  kolmá k rovině určené  $b, b_1$ . Protože  $a \parallel a_1$ , je také přímka  $a_1$  kolmá k této rovině. To znamená, že  $a_1$  je kolmá ke všem přímkám, které v této rovině leží, zejména tedy k  $b_1$ .  $\square$



Obrázek 12.23: Kolmým průmětem kolmých přímek jsou kolmé přímky, pokud je aspoň jedna z nich rovnoběžná s průmětnou.

Tento postřeh má velice užitečný důsledek pro konstrukci kolmice k rovině, resp. kolmé roviny k přímce: kolmý průmět kolmice k rovině je kolmý ke stopě (obecněji, k průmětu libovolné hlavní přímky)! Jiné zdůvodnění téhož závěru (pomocí spádové přímky) je čitelné z obr. 12.24.



Obrázek 12.24: [Me] Kolmým průmětem kolmice k rovině je přímka kolmá k její stopě.

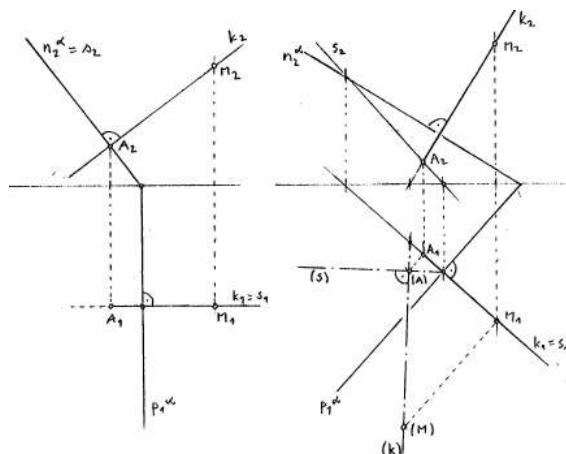
### Vzdálenosti a odchylky obecně

Každý obecnější případ určování vzdálenosti, resp. odchylky lze vždy nějak konstrukčně redukovat na určení vzdálenosti dvou bodů, resp. odchylky dvou přímek. Tato redukce je navíc vždycky přirozená a odvíjí se od definice/charakterizace pojmu vzdálenosti, resp. odchylky.

Vzdálenost bodu od přímky nebo od roviny je určena vzdáleností tohoto bodu od paty kolmice. Vzdálenost dvou přímek je nenulová, pouze když se přímky neprotínají, tedy když jsou rovnoběžné nebo mimoběžné. V prvním případě stačí spustit kolmici z libovolného bodu, druhý

případ je poněkud subtilnější — hledáme nejkratší příčku, což je právě příčka kolmá. Vzdálenost přímky od roviny, resp. vzdálenost dvou rovin je nenulová, pouze když jsou tyto rovnoběžné. . .

Z uvedených příkladů bychom si zejména měli všimnout, že dvojice bodů, jejichž vzdálenost nakonec měříme, je vždy nějak charakterizována pomocí pojmu **kolmosti**. Jak kolmost, tak vzdálenost dvou bodů jsme se naučili konstrukčně zrealizovat, takže teoreticky umíme určovat vzdálenosti kdečeho od ledasčeho. Praktické uplatnění uvedených postřehů si lze vyzkoušet ve cvičení 12.5.



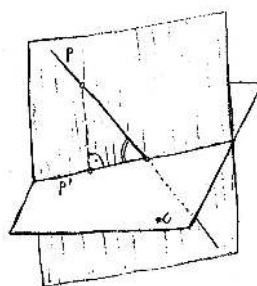
Obrázek 12.25: Vzdálenost bodu  $M$  od roviny  $\alpha$  je rovna vzdálenosti tohoto bodu od paty kolmice  $A$ : vlevo je rovina  $\alpha$  kolmá k nárysně, proto  $v(M, \alpha) = |M_2A_2|$ ; vpravo je obecný případ — vzdálenost měříme po sklopení:  $v(M, \alpha) = |(M)(A)|$ .

Podobné to je s odchylkami; nejdřív však trochu rozšíříme pojem odchylky dvou přímek. Běžně totiž myslíme (a výše jsme se naučili měřit) odchylku dvou různoběžných přímek, nicméně i v ostatních případech má pojem odchylky dobrý význam:

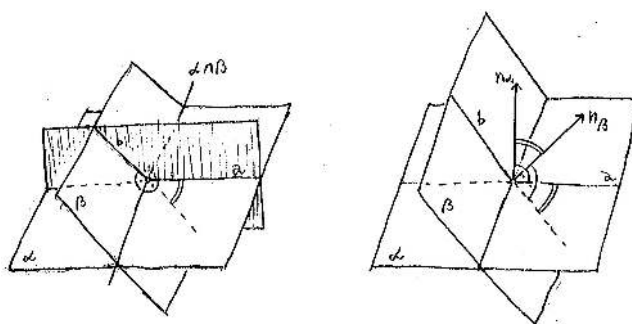
- odchylka splývajících nebo rovnoběžných přímek je nulová;
- odchylku mimoběžných přímek definujeme jako odchylku libovolných dvou různoběžek, z nichž jedna je rovnoběžná s první mimoběžkou a druhá s druhou.

Odchylka přímky od roviny je rovna odchylce dané přímky od jejího kolmého průmětu do dané roviny (viz obr. 12.26). Pokud je přímka s rovinou rovnoběžná nebo je v ní obsažená, pak podle předchozí rozšířené definice dostaneme 0. Pokud je přímka k rovině kolmá, takže se promítá do bodu, pak samozřejmě nemůžeme nic měřit a jednoduše řekneme, že odchylka je  $90^\circ$ .

Odchylka dvou rovin je rovna odchylce průsečnic těchto rovin s libovolnou rovinou, která je k oběma kolmá (viz obr. 12.27). V případě, že jsou roviny rovnoběžné nebo splývající, dostaneme 0; v případě různoběžných rovin je pomocná rovina právě rovina kolmá k jejich společné přímce. Uvědomte si, že také tento nápad umíme konstrukčně zrealizovat, ačkoli to představuje celkem hodně práce. Technicky jednodušší je rovnou určit odchylku normál: odchylka dvou přímek v rovině je totiž stejná jako odchylka jakýchkoli k nim kolmých přímek (v téže rovině). Odchylku dvou rovin tedy můžeme určit tak, že (1) nejdřív sestrojíme libovolně k nim kolmé přímky a (2) určíme odchylku těchto kolmic.



Obrázek 12.26: Odchylka přímky  $p$  od roviny  $\alpha$  je rovna odchylce přímek  $p$  a  $p'$  (= průsečnice  $\alpha$  s rovinou k ní kolmou a obsahující  $p$ ).



Obrázek 12.27: Odchylka rovin  $\alpha, \beta$  je rovna odchylce přímek  $a, b$  (= průsečnice  $\alpha, \beta$  s rovinou kolmou ke společné přímce  $\alpha \cap \beta$ ), což je totéž jako odchylka normálových přímek  $n_\alpha, n_\beta$ .

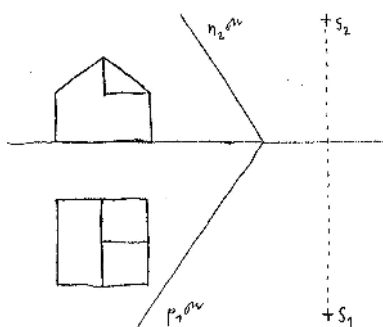
## 12.5 Cvičení

- (1) Sestrojte stopy roviny, která je kolmá k dané přímce a prochází daným bodem.
- (2) Určete vzdálenost daného bodu od dané přímky, resp. roviny.
- (3) Určete odchylku dvou rovin daných stopami.
- ☞ (4) Pro zadání ze cvičení 12.3(5) sestrojte mnohoúhelník řezu ve skutečné velikosti.
- ☞ (5) Na obr. 12.28 jsou sdružené průměty nějakého tělesa, stopy roviny  $\mu$  a sdružené průměty bodu  $S$ . Sestrojte středový průmět tohoto tělesa z bodu  $S$  do roviny  $\mu$ . (Při konstrukci nepřehlédněte užitečnost pomocných úběžníků.)
- (6) U předchozí úlohy nahraďte střed  $S$  nějakým směrem a sestrojte rovnoběžný průmět do roviny  $\mu$ .

## 13 Kótované promítání

*Kótované promítání* je kolmé promítání na jednu průmětnu s tím, že vzdálenost (některých) bodů od průmětny je naznačena jako jejich kóta. Kóty tedy nahrazují sdružený průmět u Mongeova





Obrázek 12.28: Sestrojte středový průmět daného objektu z daného středu do dané roviny.

promítání. S tímto typem zobrazení se můžeme setkat např. na turistických (a jiných) mapách.

Bod v prostoru je určen svým průmětem a kótou. Příмка je určena kótovanými průměty dvou bodů, příp. stopníkem a jedním dalším kótovaným bodem. Rovina je určena kótovanými průměty tří bodů, příp. stopou a jedním dalším kótovaným bodem. . .

Obrázek 13.29: Zobrazení bodu, přímky a roviny, konstrukce stopníků a stop. . .

Metody řešení základních úloh v kótovaném promítání a v Mongeově promítání si jsou v mnohém podobné, takže zmíníme jenom několik příkladů na ukázkou. V každém případě si vždy můžeme zvolit pomocnou (kolmou) průmětnu, podle kót sestrojíme druhé průměty vybraných bodů a řešit úlohu tak, jak jsme zvyklí. Ne vždy je však takový postup nutný a často lze postupovat přímo, viz např. obr. 13.29. Typická konstrukce, která vypadá stejně v kótovaném i Mongeově promítání, je na obr. 12.22. Dvojití řešení jedné polohové úlohy je na obr. 13.30.

Obrázek 13.30: Průnik rovin  $r = \alpha \cap \rho$  sestrojeno pomocí (a) hlavních přímek, (b) pomocného průmětu.

## 14 Axonometrie a kosoúhlé promítání

Uvažme nějakou kartézskou souřadnou soustavu v prostoru s počátkem  $O$  a osami  $x, y, z$ . Bod v prostoru je jednoznačně určen souřadnicemi vzhledem ke zvolené souřadné soustavě a naopak. Bod a jeho souřadnice geometricky (tj. bez číselného vyjadřování) zadáváme pomocí kolmých průmětů do rovin  $x, y$  (půdorys) a  $x, z$  (nárýs). Pokud zvolíme nějakou další rovinu, která je v obecné poloze vzhledem k souřadným osám, pak rovnoběžné promítání do takové roviny je tzv. *axonometrie*, a tu podle směru promítání rozlišujeme na kolmou a šikmou.

Axonometrie je tedy obyčejné rovnoběžné promítání na jednu průmětnu, nicméně z úvodu (a názvu) se dá odtušit, že při této zobrazovací metodě se budeme soustředit na otázku měření (*-metrie*), zejména podél os (*axono-*). Vzpomeňte, že problém měření ve volném rovnoběžném promítání, jak jsme je představili v podkapitole 11, je teoreticky celkem jasný, ale prakticky poněkud otravný (opakované přenášení dělicích poměrů). Základním axonometrickým úkolem je

najít nějakou rychlou a technicky **pohodlnou korespondenci** mezi Mongeovy sduženými průměty bodu a jeho axonometrickým průmětem. Tato korespondence, pojmenovaná jako *zářezová metoda*, je odvozena v odst. 14.1 a posléze zobecněna v odst. 14.2.

Mezním případem (šikmé) axonometrie je tzv. *kosouhlé promítání*, kdy promítáme šikmo do roviny  $x, z$  (Mongeova nárysna). O tomto promítání se letmo zmíníme v odst. 14.3.

## 14.1 Kolmá axonometrie

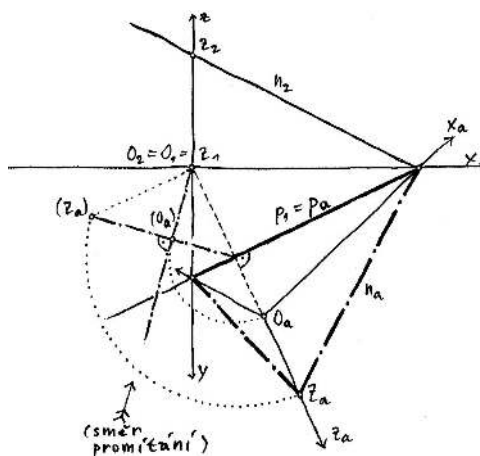
Kolmá axonometrie je úplně určena rovinou axonometrické průmětny. Vzhledem k pomocným Mongeovým průmětnám tuto průmětnu zadáváme stopami nebo pomocí průsečíků se souřadnými osami. Trojúhelník určený těmito průsečíky je tzv. *axonometrický trojúhelník*. Kolmá axonometrie bývá zpravidla zadána právě axonometrickým trojúhelníkem.

### Axonometrický trojúhelník a důležité postřehy

Na obr. 14.31 je představeno, jak lze sestrojiti axonometrický trojúhelník a průměty souřadných os, a to výhradně s dovednostmi, které jsme se naučili v podkapitole 12:

- (1) axonometrický průmět počátku je sestrojen jako průnik promítacího paprsku jdoucího tímto bodem s danou rovinou,
- (2) poté se rovina otočí kolem půdorysné stopy do půdorysny.

Přitom si uvědomujeme, že Mongeovy průměty promítacího paprsku jsou kolmé ke stopám roviny. Podobně by se dal sestrojiti průmět jakéhokoli bodu v prostoru, viz cvičení 12.5(6).



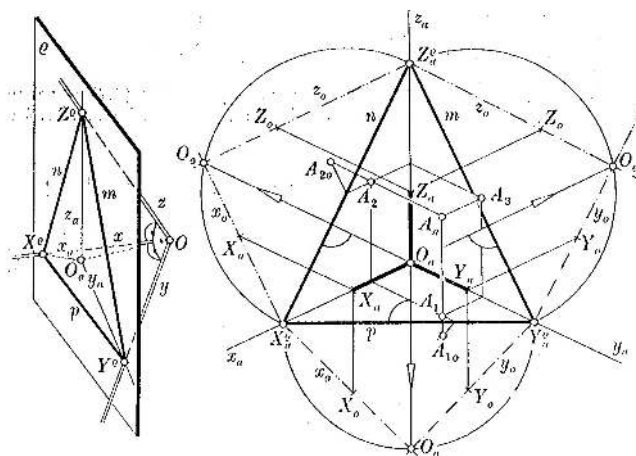
Obrázek 14.31: Kolmá axonometrie je dána stopami axonometrické průmětny; sestrojen axonometrický trojúhelník a průměty osového kříže. . .

Zůjíme-li se pouze na body v Mongeově půdorysně, dostáváme korespondenci, která je zřejmě afinním zobrzením (složení dvou afinních zobrzení) a má stopu  $p$  jako přímkou samodružných bodů. To je samozřejmě naše oblíbená **osová afinita**, jejíž osou je stopa  $p$ , směr je kolmý na  $p$  a obraz libovolného bodu je dán obrazem počátku  $O$ .

Podobný vztah samozřejmě platí také mezi Mongeovým a axonometrickým nárysem, příp. bokorysem. Odtud plyne, že průmět počátku je právě **průsečíkem výšek** axonometrického trojúhelníku.<sup>2</sup>

### Zářezová metoda

Typicky je kolmá axonometrie zadána axonometrickým trojúhelníkem a nikoli stopami jako na obr. 14.31. Z předchozího víme, že průmět počátku je průsečíkem výšek tohoto trojúhelníku a vztah mezi Mongeovým a axonometrickým půdorysem (resp. nárysem) je osová afinita. K jednoznačnému určení této osové afinity stačí sestřít bod odpovídající počátku. Ten leží na kolmici ke stopě a současně na pomocné Thaletově kružnici (aby Mongeovy průměty os byly kolmé), viz obr. 14.32.



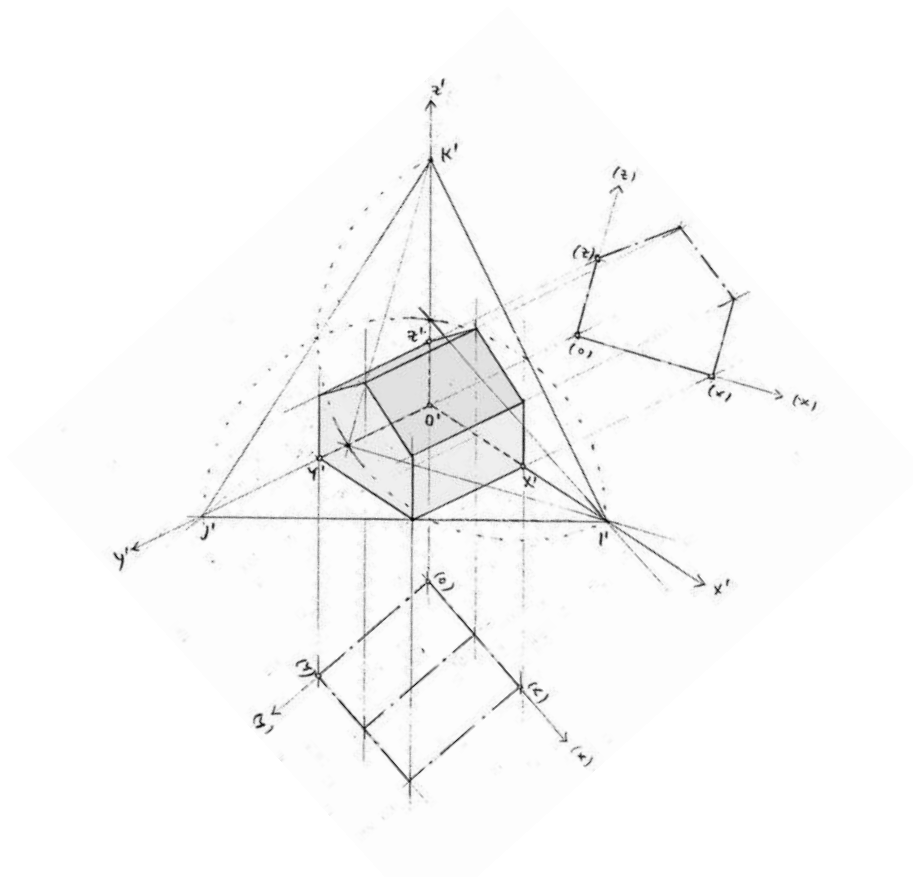
Obrázek 14.32: [Me] Kolmá axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem; sestřojen osový kříž, jednotky na osách a průmět bodu  $A$  . .

Na tomto obrázku si můžeme všimnout, že body  $A_{1o}, A_1, A_a$  leží na jedné přímce, která je kolmá na  $p$  (tj. ve směru  $z_a$ ); bod  $A_{1o}$  je Mongeův půdorys,  $A_1$  je axonometrický půdorys a  $A_a$  je axonometrický průmět bodu  $A$ . Podobně je to s trojicí  $A_{2o}, A_2, A_a$  . . . Odtud plyne slibovaná bleskurychlá konstrukce axonometrického průmětu libovolného bodu  $A$ :

- (1) umístíme Mongeův půdorys, resp. nárys bodu  $A$  vzhledem k otočeným osám  $x_o, y_o$ , resp.  $x_o, z_o$ ,
- (2) vedeme kolmice z těchto bodů k odpovídajícím stopám axonometrického trojúhelníku (tj. ve směru axonometrických průmětů příslušných os),
- (3) axonometrický průmět bodu  $A$  je průsečíkem těchto kolmic.

Uvědomte si, že při této konstrukci je celkem jedno, na kterou stranu otáčíme pomocné průmětny. Stejně tak si můžeme pomocné Mongeovy průměty posunout v uvedeném směru libovolně daleko, aby se nám nepřekrývaly pomocné čáry s těmi podstatnými. Tomuto způsobu konstrukce axonometrického průmětu se říká *zářezová metoda*. Typickou aplikaci této metody najdete na obr. 14.33, příp. v příloze na str. 175.

<sup>2</sup>Umíme zdůvodnit i přímo s odkazem na větu na str. 110: promítáme kolmo a osa  $z$  je kolmá k rovině  $x, y$ , tedy i k přímce  $p$  . . .

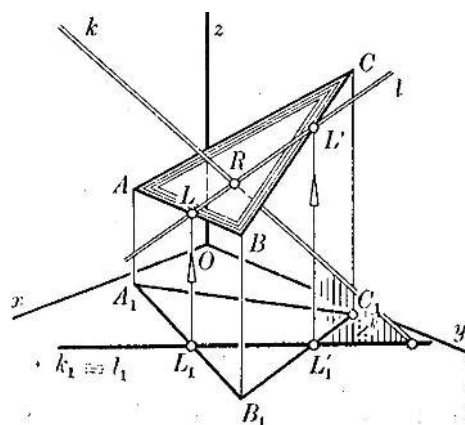


Obrázek 14.33: Kolmý axonometrický průmět tělesa z obr. 11.2 pomocí zářezové metody.

### Poznámky

Dosud jsme diskutovali několik možností konstrukce axonometrického průmětu bodu daného Mongeovými sdruženými průměty, resp. souřadnicemi. Uvědomte si, že tento proces je vždy čitelný **v obou směrech**: poloha každého bodu v prostoru je dána jeho axonometrickým průmětem spolu s jeho axonometrickým půdorysem; odtud lze vždy doplnit axonometrický nárys, příp. bokorys bodu; pomocí výše popsané korespondence (osová afinita, viz obr. 14.32) umíme sestrojít Mongeův půdorys, nárys, příp. bokorys tohoto bodu, tj. jeho souřadnice.

Hlavní výhodou řešení úloh v kolmé axonometrii je, že pracujeme s hodně názornými obrázky (aspoň pro malá měřítka) a současně jsme schopni velice hospodárně realizovat celkem jakékoli měření. Všechny základní úlohy, které jsme zmiňovali v podkapitole 12, je nyní možné převyprávět v této zobrazovací metodě. My jsme slibovali, že to dělat nebudeme, avšak na ukázkou uvádíme aspoň jednu základní úlohu, viz obr. 14.34 (až na značení a vzájemnou polohu zadávajících objektů se jedná právě o úlohu řešenou na obr. 12.11, resp. obr. 11.5).



Obrázek 14.34: [Me] Průnik přímky  $k$  a roviny  $\rho = ABC$ :

- (1)  $l$  je krycí přímka pro směr kolmý k půdorysně ( $l_1 = k_1$ ),
- (2) její axonometrický průmět je určen body  $L, L'$ ,
- (3) bod  $R = k \cap l$  je právě hledaným průnikem  $k \cap \rho$ .

## 14.2 Šikmá axonometrie

Rozdíl mezi kolmou a šikmou axonometrií je jenom ve směru promítání vzhledem k axonometrické průmětně. Nebudeme tedy opakovat všechno, co jsme říkali v předchozích odstavcích, pouze zformulujeme několik poznámek.

Šikmá axonometrie je zcela určena axonometrickým trojúhelníkem a obrazem počátku. Korepondence mezi axonometrickým půdorysem a otočeným (Mongeovým) půdorysem je opět osová afinita, jejíž osou je půdorysná stopa  $p$ , akorát směr této afinity **nemusí být kolmý ke stopě**  $p$ . Podobně je to s nárysy a bokorysy. Odtud lze rovněž odvodit *zářezovou metodu* konstrukce axonometrického průmětu z Mongeových (vhodně umístěných) sdružených průmětů. . .

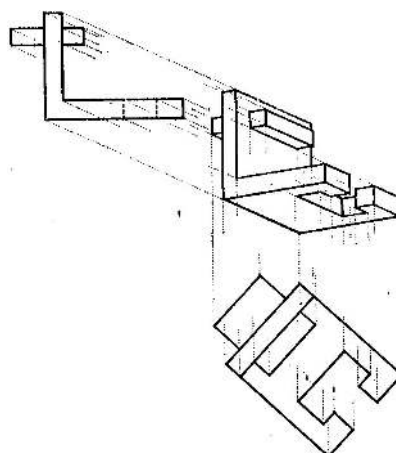
Pro rychlé a názorné zobrazení nějakého objektu daného svými sdruženými průměty se užívá právě tohoto postupu s tím, že Mongeovy průměty umísťujeme do náčrtu úplně libovolně podle vlastního uvážení. V tomto případě nejsou průmětna ani směr promítání předem specifikovány, jedná se tedy o jakési volné rovnoběžné promítání, ovšem zadané poněkud neobvyklým způsobem. Příklad takové konstrukce je na obr. 14.35.

Z uvedeného je patrné, že tato metoda je vhodná zejména pro zobrazování hranatých těles; o zobrazování oblých těles se zmíníme záhy, viz odst. 17.4.

## 14.3 Kosoúhlé promítání

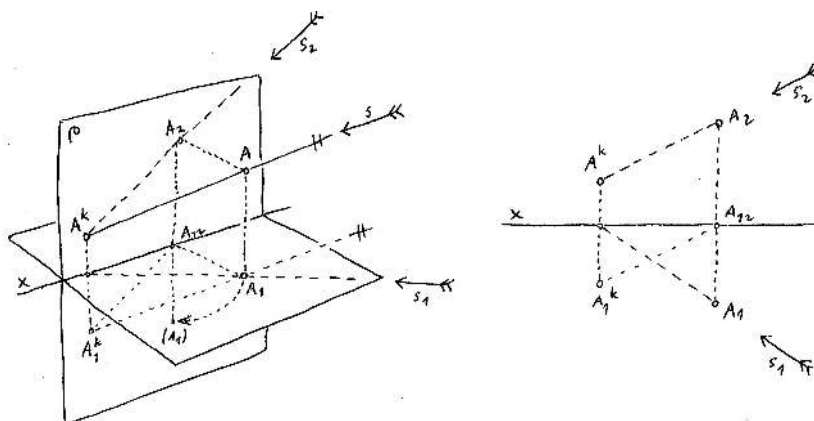
Speciálním, resp. mezním případem šikmé axonometrie je tzv. *kosoúhlé promítání*, kdy hlavní průmětna splývá s Mongeovou nárysnou. To znamená, že osy  $x$  a  $z$  v průmětu osového kříže svírají pravý úhel. Kosoúhlé promítání je zcela určeno směrem promítání, který však tentokrát — na rozdíl od obecné axonometrie — není zadán obrazem počátku, protože ten leží přímo v průmětně.

Na obr. 14.36 je naznačena konstrukce kosoúhlého průmětu obecného bodu v prostoru pro zadaný směr promítání. Průmětem je právě **nárysný stopník** přímky určené tímto bodem a směrem promítání! Zúžíme-li naše promítání pouze na body v půdorysně, pozorujeme opět afinitu, jež má osu  $x$  jako přímkou samodružných bodů. Korepondence mezi Mongeovým a kosoúhlým



Obrázek 14.35: [Me] Volný rovnoběžný průmět nějaké součástky pomocí zářezové metody.

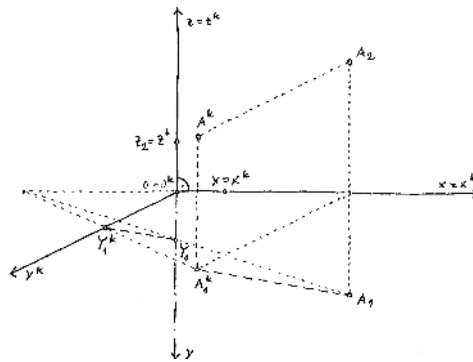
půdorysem je tedy **osová afinita**, jež je zcela určena osou  $x$  a libovolnou dvojicí odpovídajících si bodů ( $A_1$  a  $A_1^k$ ). Podobný vztah platí také mezi Mongeovým a kosoúhlým bokorysem; vztah mezi Mongeovým a kosoúhlým nárysem je samozřejmě identita.



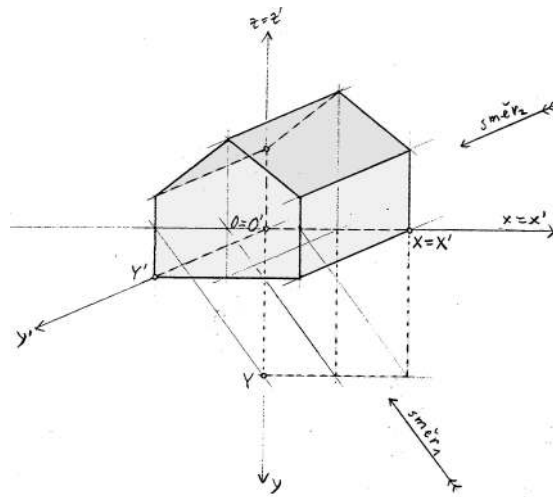
Obrázek 14.36: Kosoúhlé promítání je dáno směrem  $s$ ; sestojen kosoúhlý průmět bodu  $A$  jakožto stopník promítacího paprsku.

Na obr. 14.37 je zobrazen průmět osového kříže s jednotkami na osách, což jednoznačně určuje nějaké rovnoběžné promítání. Protože průměty os  $x$  a  $z$  jsou kolmé a jednotky na těchto osách jsou stejné, je tímto způsobem zadáno právě kosoúhlé promítání. Kosoúhlý půdorys bodu  $A$  je sestojen pomocí výše popsané osové afinity, kosoúhlý průmět je doplněn z nárysu. . .

Komplexnější úlohy řešené v kosoúhlém promítání hledejte ve cvičeních nebo v podkapitole 17. Jeden názorný příklad je na obr. 14.38.




Obrázek 14.37: Kosoúhlé promítání je dáno obrazem bodu  $Y$  na ose  $y$ ; sestrojen kosoúhlý průmět bodu  $A$  pomocí osové afinity mezi Mongeovým a kosoúhlým půdorysem.



Obrázek 14.38: Kosoúhlý průmět tělesa z obr. 11.2.

## 14.4 Cvičení

- (1) Pro zadání jako na obrázku obr. 12.11 sestrojte axonometrický a kosoúhlý průmět (a) stop roviny  $\rho = KLM$ , (b) přímky  $p = PQ$  a krycí přímky  $r$ , (c) průsečíku  $R = p \cap \rho$ .
- (2) Pro zadání ze cvičení 12.5(6) určete axonometrický trojúhelník a sestrojte průmět daného tělesa pomocí zářezové metody. 
- (3) Sestrojte kosoúhlý průmět tělesa z předchozího cvičení.

## 15 Perspektiva

*Perspektivou* (bez přívlastků) myslíme obyčejné středové promítání na jednu průmětnu. Z předchozího víme, že při obecném středovém promítání se vlastní body mohou zobrazovat do nevlast-

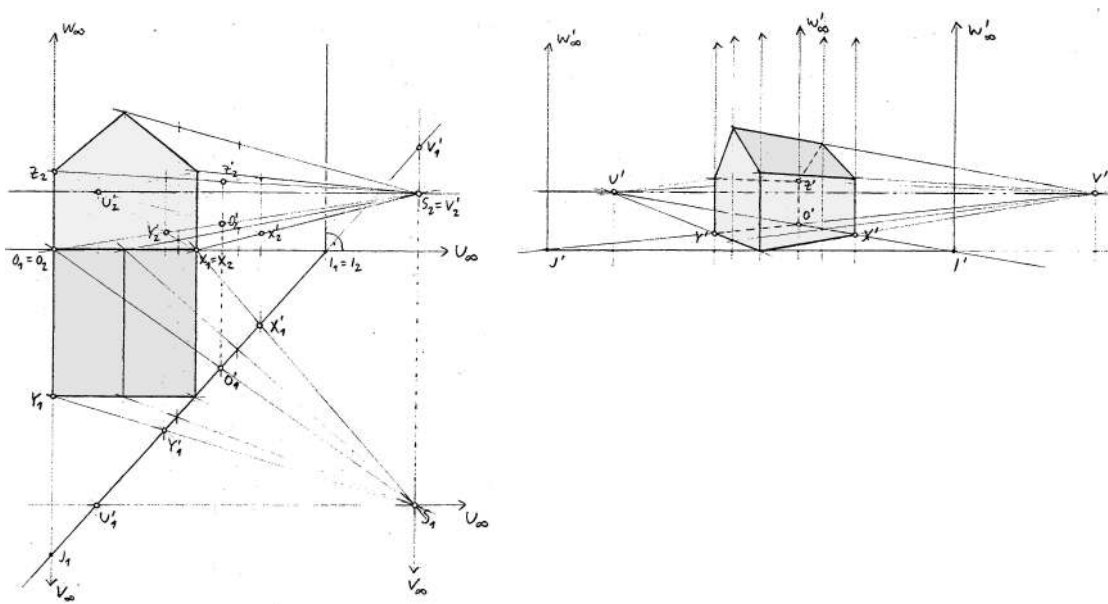
ních a naopak, což má za následek, že některé objekty se docela krutě deformují; např. středovým průmětem kružnice může být klidně hyperbola (což při rovnoběžném promítání samozřejmě není možné). Pokud chceme zobrazovat realitu co nejlépe našemu vnímání, uvažují se jistá omezení: předpokládá se dostatečná vzdálenost středu promítání od průmětny a zobrazují se jenom objekty uvnitř zorného kužele, jehož vrcholový úhel je zhruba 40–50°. V takovém případě se mluví o *perspektivě lineární*...

Přívlastkem lineární se často jenom zdůrazňuje, že se promítá do roviny a ne třeba na válcovou plochu. Lineární perspektiva je tedy specifické **projektivní** zobrazení prostoru do roviny; něco málo si dořekneme v dalším odstavci. Nelineárním perspektivám věnujeme pár poznámek v odst. 15.3.

### 15.1 Lineární perspektiva

Lineární perspektiva může být zadána *volně*, tj. průmětem dostatečně mnoha bodů/úběžníků. V odst. 11.1 jsme diskutovali, jak v takovém případě sestavit obraz libovolného dalšího bodu v prostoru. Konstrukčně to znamenalo hlavně opakované (a nezajímavé) přenášení dvojpoměrů.

Perspektiva může být taky dána *vázaně*, tj. explicitní polohou průmětny a středu promítání vzhledem k souřadným osám, resp. Mongeovým pomocným průmětnám. V takovém případě víme, jak postupovat ze cvičení 12.3(6) a 12.5(5). Konstrukčně to znamená opakované sestavování průniků promítacích paprsků s rovinou průmětny a dodatečné otočení průmětny. Dva konkrétní příklady, kdy je perspektivní průmětna zvolena kolmo k Mongeově půdorysně, jsou na obrázcích 15.39 a 15.40.

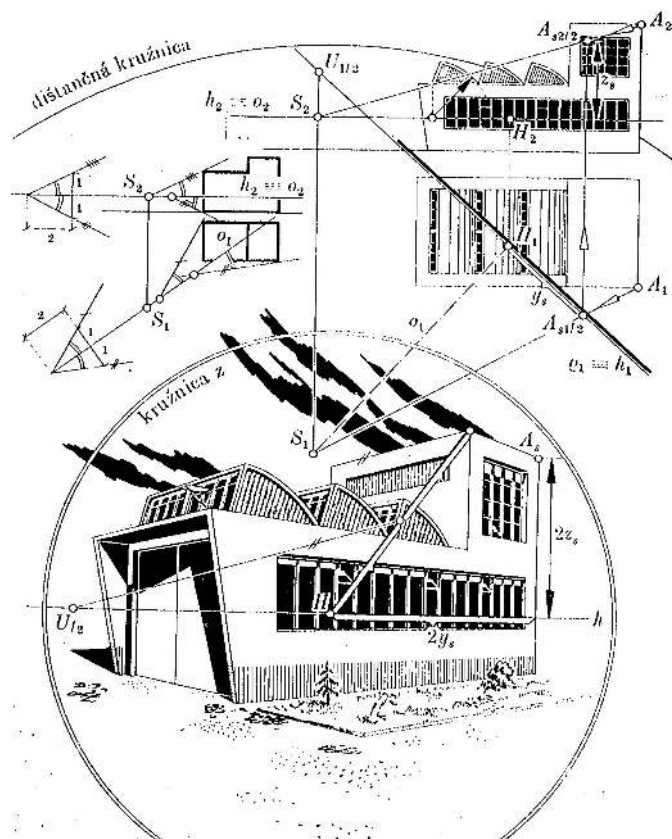


Obrázek 15.39: Perspektivní průmět tělesa z obr. 11.2.

Na obr. 15.40 je patrné několik technických detailů, které rychle okomentujeme: V levé horní části obrázku se nejdřív hledá vhodná poloha středu promítání tak, aby se celý objekt vlezl do zorného kužele. Průmětna je zvolena kolmo k půdorysně, vzdálenost od středu je celkem libovolná. Na obrázku je dále patrná konstrukce průmětu bodu *A* — horizontální vzdálenosti



měříme v půdoryse od referenčního bodu  $H$ , vertikální měříme v náryse od horizontu  $h$ . Výsledný průmět je vzhledem k Mongeovým pomocným průmětům dvakrát zvětšen — úběžník pro směry kolmé k nárysně by se nevlezl do náčrtu, proto je užito stejnolehlosti (se středem v bodě  $H$  a koeficientem 2).



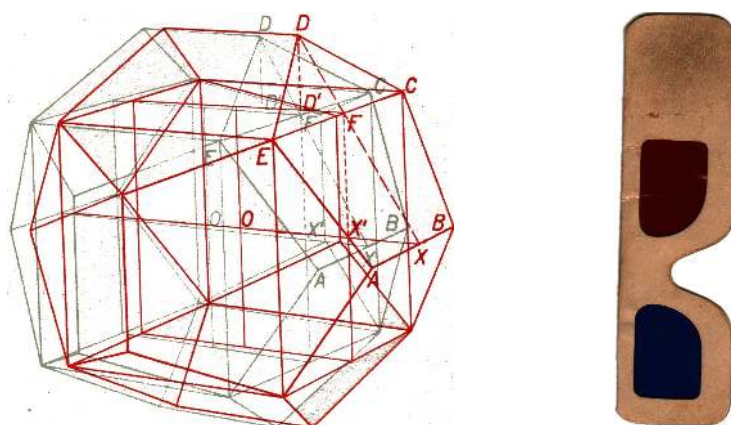
Obrázek 15.40: [Me] Perspektivní průmět budovy.

Stejně jako pro jakoukoli jinou zobrazovací metodu je i v případě lineární perspektivy vyvinuto několik postupů, které mohou práci zjednodušit. Při těchto postupech se velice často užívá **osové kolineace**. To by nemělo nikoho překvapovat, protože speciálním případem osové kolineace je osová afinita, a tu jsme několikrát zaznamenali v předchozím povídání o axonometrii a kosoúhlém promítání. Zájemce o podrobnosti odkazujeme na [KKK, Me, U] a další klasickou literaturu.

## 15.2 Stereoskopie a anaglyfy

*Stereoskopie* je zobrazovací metoda, kterou se snažíme vzbudit iluzi trojrozměrnosti nad dvojrozměrnou předlohou tím, že každému oku dodáváme jiný průmět téhož objektu. Toho lze dosáhnout tak, že se zobrazovaný objekt perspektivně promítne, a to ze dvou středů, které jsou od sebe vzdáleny stejně jako zorničky lidských očí. . .

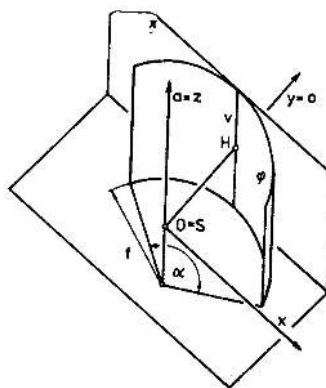
Jednou ze stereoskopických technik jsou tzv. *anaglyfy*: dva perspektivní průměty jsou zobrazeny v téže průmětně různými barvami, které jsou pak odstíněny dvojbarevnými brýlemi, viz obr. 15.41.



Obrázek 15.41: [Pr] Dvanáctistěn (s vepsanou krychlí) jako anaglyf: červený průmět je určen levému oku, azurový pravému, tzn. brýle nasazujeme červeným sklem na pravé oko a azurovým na levé.

### 15.3 Nelineární perspektiva

Typickým příkladem nelineární perspektivy je *válcová* neb *cylindrická perspektiva*, kdy se prostor promítá z daného středu na válcovou plochu (jejíž osa zpravidla prochází středem promítání). Takové zobrazení se užívá při panoramatickém fotografování, viz obr. na str. 177. Protože promítáme na jinou plochu než rovinu má za následek, že přímky se obecně nemusí zobrazovat na přímky. To znamená, že takové zobrazení rozhodně **není projektivní**.



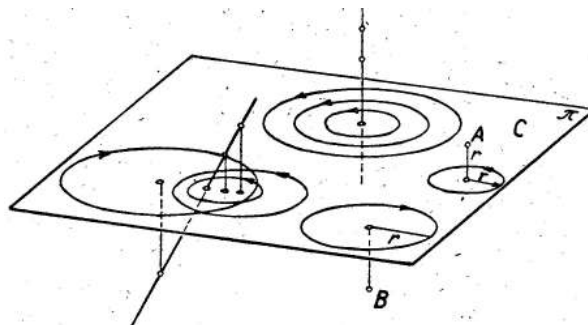
Obrázek 15.42: [DV] Určující prvky válcové perspektivy...

Na obr. 15.42 jsou naznačeny určující prvky válcové perspektivy — průmět libovolného bodu v prostoru je pak určen středovým průmětem ze středu  $S$  na válcovou plochu  $\varphi$  a následným rozvinutím této plochy do roviny  $\pi$ . Uvědomte si, že sestrojít obraz obecného bodu nelze realizovat eukleidovským pravítkem a kružítkem, viz problém rektifikace kružnice v odst. 19.1. . .

Jiným příkladem nelineární perspektivy je geometrie objektivu zvaného *rybí oko*, již je možno interpretovat jako složení středového promítání na kulovou plochu a ještě jednoho promítání z této plochy do roviny (kulovou plochu není možné rozvinout, proto se musí promítat). . .

## 16 Cyklografie

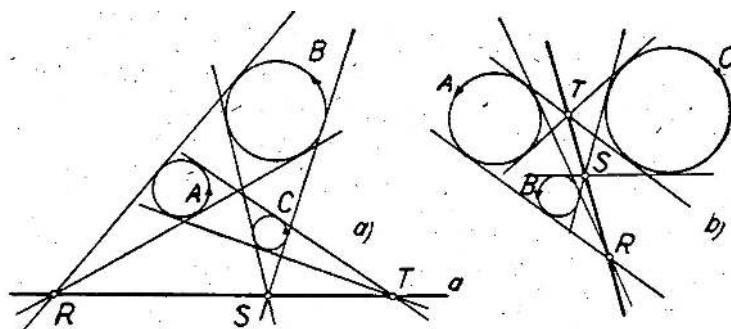
Cyklografie je trochu exotická zobrazovací metoda, která však má zajímavé aplikace. Cyklografie má nejbližší ke kótovanému promítání — bod  $A$  v prostoru je zastoupen svým kolmým průmětem  $A_1$ , akorát místo kóty ( $z_A$ ) kreslíme cyklus se středem v  $A_1$ , s poloměrem  $|z_A|$  a s orientací odpovídající znaménku  $z_A$ . Naopak, každý cyklus v průmětně určuje jednoznačně bod v prostoru.



Obrázek 16.43: [Kut] Cyklografický průmět bodu a přímky.

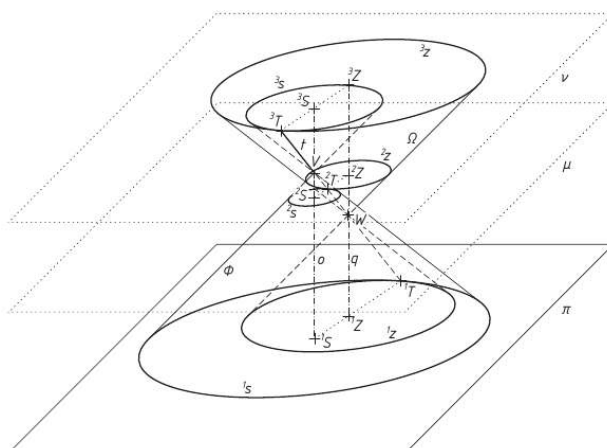
Z uvedeného se dá tušit, že zmiňované aplikace se budou týkat právě úloh s cykly/kružnicemi:

Např. cyklografická interpretace konstrukce stopy roviny dané třemi body na obr. 16.44 nám musí připomínat Mongeovu větu (viz obr. 7.8 na str. 66).



Obrázek 16.44: Cyklografická konstrukce stopy roviny  $ABC$ .

Pomocí cyklografie se taky celkem hezky interpretují některá geometrická zobrazení, jako např. trochu problematická dilatace, viz obr. 16.45.



Obrázek 16.45: [Br] Cyklografická interpretace dilatace dotýkajících se cyklů. . .

Dalšími typickými aplikacemi mohou být výše diskutované Apollóniový úlohy — jejich cyklografická interpretace vede sice k prostorovým, ale celkem jednoduchým konstrukcím jako např. určení průniku přímky s rovinou nebo kuželem!

Podrobnosti a další zajímavosti je možné najít např. v [Sei] nebo [Br].

## 17 Typické úlohy

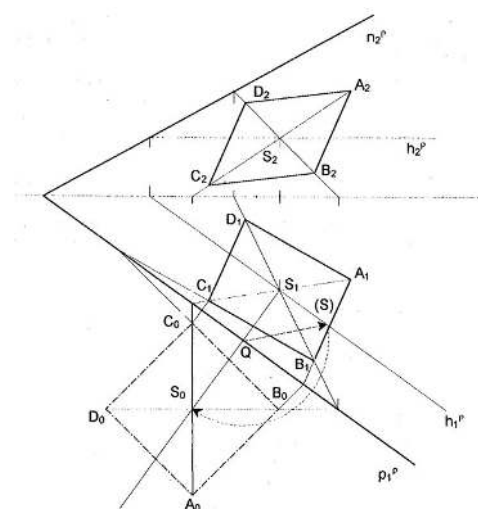
Chceme-li sestavit názorný obrázek nějakého tělesa, můžeme sestavovat volný nebo vázaný průmět, středový nebo rovnoběžný (v tomto případě navíc rozlišujeme šikmý nebo kolmý). Volné průměty jsme uměli sestavovat hned na začátku této kapitoly, u vázaného zobrazování jsme se naučili několika technicky výhodným zkratkám. Některé typické konstrukce si tady chceme připomenout. Začneme typickou metrickou úlohou o otáčení roviny.

### 17.1 Otáčení roviny

O otáčení roviny a zobrazení nějakého rovinného obrazce ve skutečné velikosti jsme mluvili v odst. 12.4 (viz též obr. 17.49). Uvedenou konstrukci lze však použít i v opačném směru:

Na obr. 17.46 je dána rovina  $\rho$  svými stopami a dále půdorysy bodů  $S$  a  $A$ . Máme za úkol sestavit sdružené průměty čtverce, který leží v rovině  $\rho$ , má střed  $S$  a vrchol  $A$ . Možné řešení je následující:

- (1) sestojíme nárys bodu  $S$  a otočíme  $S$  kolem půdorysné stopy do půdorysny ( $S_0$ );
- (2) pomocí osové afinity doplníme otočený bod  $A_0$ ;
- (3) sestojíme skutečný čtverec ( $A_0B_0C_0D_0$ );
- (4) pomocí osové afinity otočíme zpátky ( $A_1B_1C_1D_1$ );
- (5) doplníme nárysný průmět.

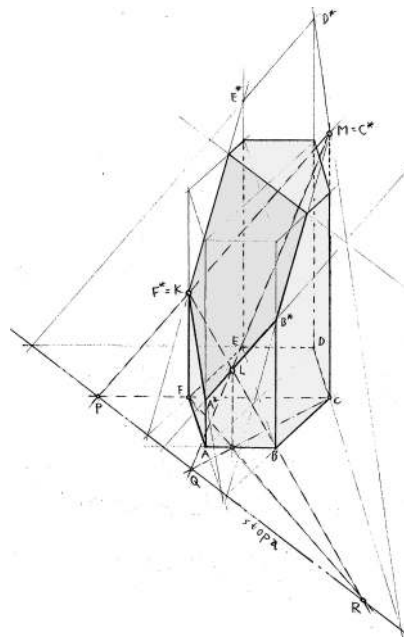


Obrázek 17.46: [Ř] Konstrukce průmětů čtverce  $ABCD$  ležícího v rovině  $\rho$ , se středem v bodě  $S$  a vrcholem  $A$ .

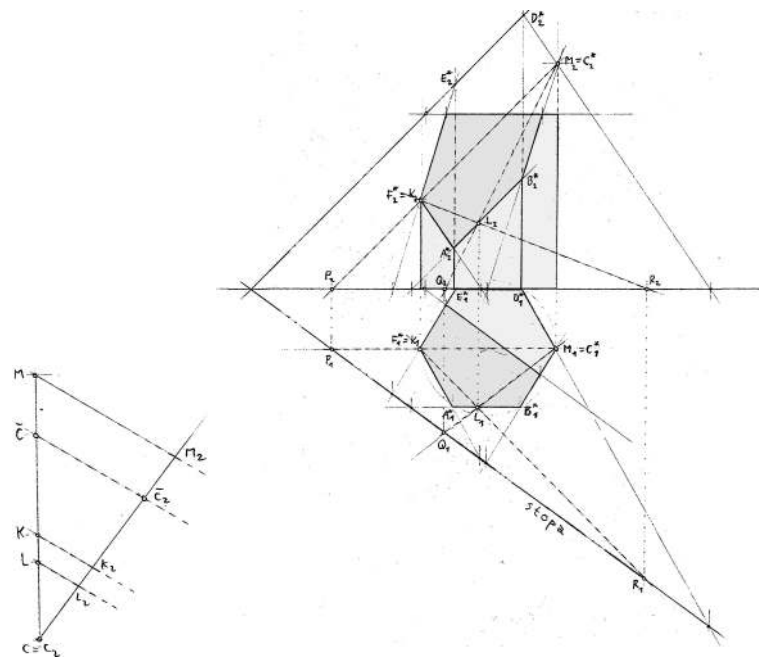
## 17.2 Řezy hranatých těles

O řezech jsme poprvé mluvili v odst. 9.4 (specifické zadání), podruhé ve cvičení 11.3 (obecné zadání ve volném promítání), potřetí ve cvičení 12.3 (obecné zadání v Mongeově promítání) a počtvrté ve cvičení 12.5 (velikost řezu ve skutečné velikosti).

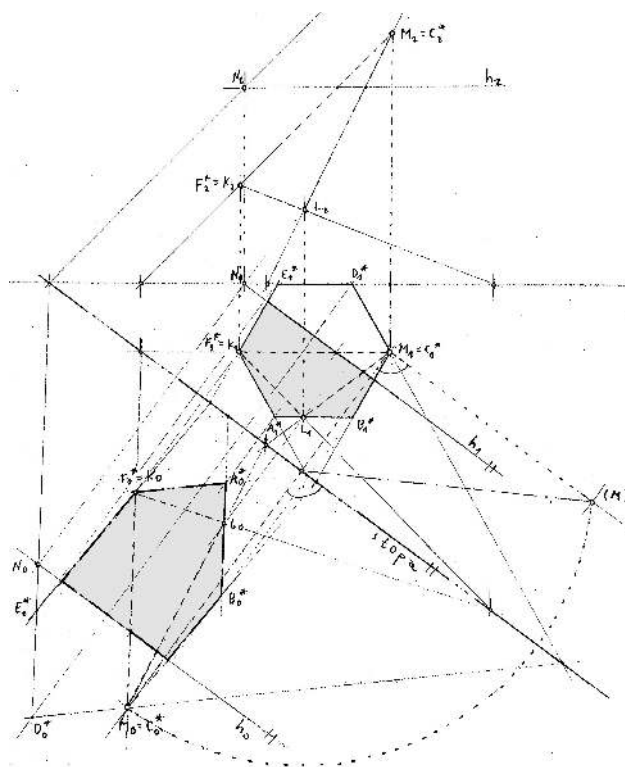
V řešení obecných úloh tohoto typu odkazujeme na základní konstrukce průniku přímky a roviny a otáčení roviny; v obou případech s výhodou používáme **osovou kolineaci**, příp. **afinitu**.....



Obrázek 17.47: Volný rovnoběžný průmět pravidelného šestibokého hranolu a jeho řezu rovinou  $KLM$ .



Obrázek 17.48: Mongeovy sdružené průměty pravidelného šestibokého hranolu a jeho řezu rovinou  $KLM$ .



Obrázek 17.49: Zobrazení řezu ve skutečné velikosti.

### 17.3 Zobrazení Platónských těles

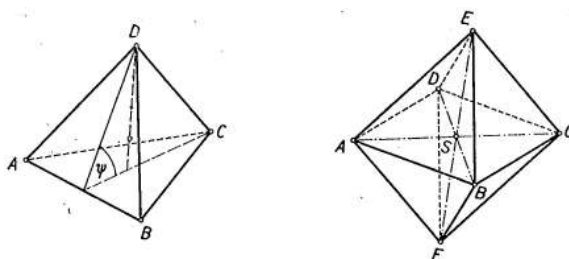
#### Volně

Na obr. 17.50 je volný rovnoběžný průmět pravidelného čtyřstěnu a osmistěnu. V prvním případě není co řešit, protože rovnoběžný průmět je určen obrazy čtyř vrcholů a čtyřstěn jich ani víc nemá. Tyto průměty vrcholů mohou být zvoleny celkem libovolně (věta 11.1 na str. 97 nám akorát říká, že splývat mohou nejvýše dva z nich).

Pravidelný osmistěn má šest vrcholů — jsou-li dány průměty čtyř vrcholů v obecné poloze, zbylé dva se snadno doplní pomocí rovnoběžníků.

O průmětech pravidelného šestistěnu (krychle) jsme se bavili tolikrát, že jej tady klidně přeskočíme.

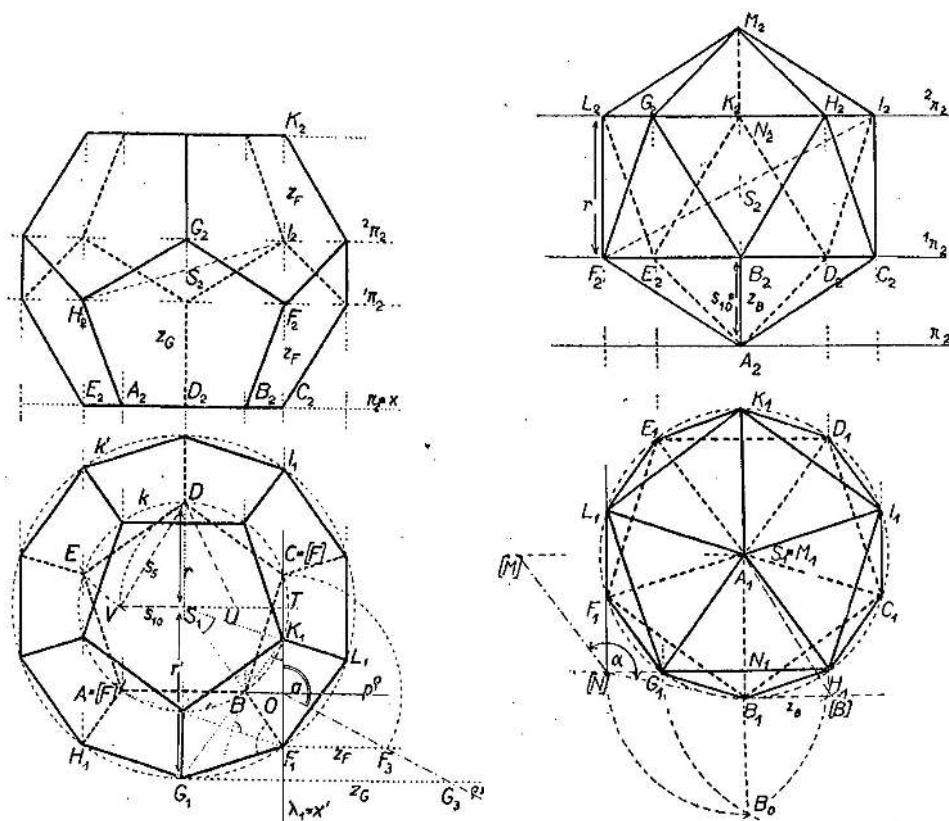
Volný průmět dvacetistěnu, resp. dvanáctistěnu spolu s kompletním rozbohem a odtud plynoucím možným návodem ke konstrukci jsme představili v odst. 4.21.



Obrázek 17.50: [U] Volný rovnoběžný průmět pravidelného čtyř- a osmistěnu.

### Vázaně

Při konstrukcích vázaných průmětů začínáme s Mongeovými sdruženými průměty tělesa, které je ve speciální poloze vůči průmětnám. To znamená, že konstrukce průmětů je jednodušší. Jediná dvě konstrukčně netriviální Platónská tělesa zobrazená ve velmi speciálních polohách vůči průmětnám jsou na obr. 17.51 (pokud se někomu nepozdává podezřele mnoho pomocných čar, může je samozřejmě ignorovat a sestrojít si všechno po svém na základě rozboru z odst. 4.21.)



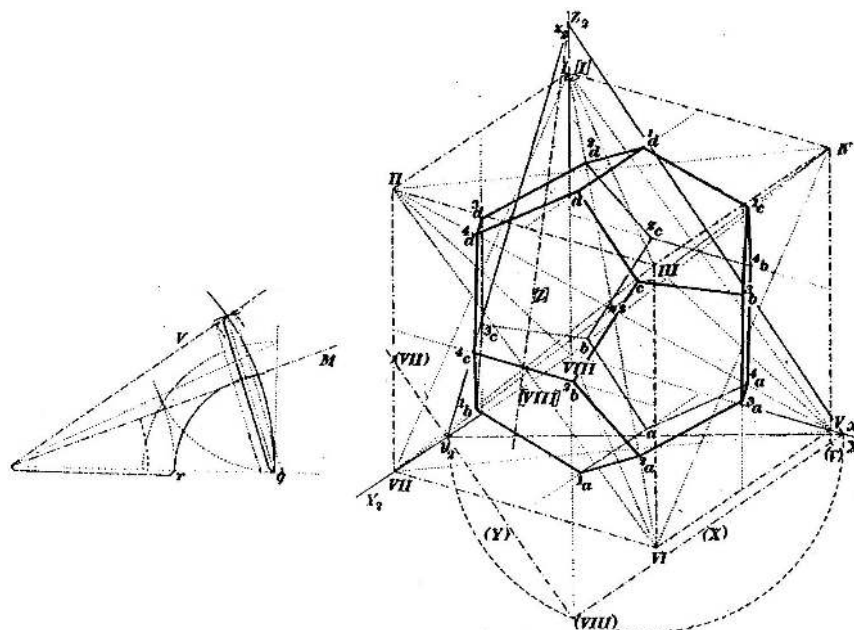
Obrázek 17.51: [KV] Mongeovy sdružené průměty pravidelného dvanácti- a dvacetistěnu.



Odtud lze rychle sestrojít např. (a) axonometrický průmět pomocí zářezové metody, kterou jsme vysvětlovali v odst. 14.1, nebo (b) kosohlý průmět podle návodu z odst. 14.3. Můžeme také sestrojít (c) perspektivní průmět podle návodu v odst. 15.1 (který je odvozen ze cvičení 12.3(6)).

### Alternativně

Komu předchozí možnosti pořád nestačí, může výše zmiňované metody různě kombinovat jako např. na obr. 17.52: Zde je zobrazen kolmý axonometrický průmět krychle, do níž je vepisován dvanáctistěn. Při této konstrukci se nejdřív zdůvodní, že když rozdělíme stranu opsané krychle zlatým řezem, tak delší díl odpovídá straně vepsané krychle (tj. úhlopříčce pětiúhelníku) a kratší díl odpovídá straně dvanáctistěny (tj. straně pětiúhelníku). Takto se celkem volně (přenášením dělicích poměrů) sestrojí 12 vrcholů ve stěnách opsané krychle. Zbýlých 8 vrcholů tvoří právě vrcholy vepsané krychle a tady se využije stejnolehlosti obou krychlí. . .

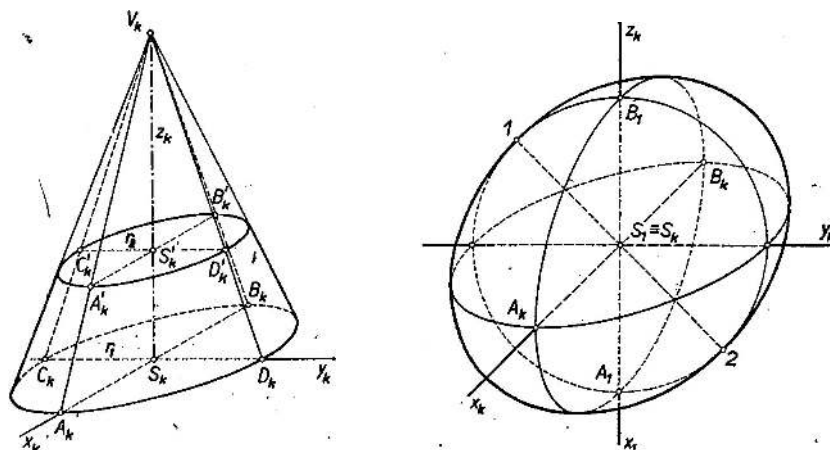


Obrázek 17.52: [KKK] Kolmý axonometrický průmět pravidelného dvanáctistěny.

## 17.4 Zobrazení oblých těles

Oblými tělesy tady myslíme jenom kužele, válce a koule. Při sestrovování jejich průmětů potřebujeme umět z daných podmínek sestrojít vždy průmět nějaké obrysové kružnice, u kuželů a válců ještě obrysové přímky. Při každém rovnoběžném a vhodně zvoleném středovém promítání je průmětem kružnice elipsa a tato je pro nás dokonale určena svými hlavními průměry. Obrysové přímky kuželů a válců jsou pak tečnami k elipsám, které jsou průměty podstav. Obě tyto úlohy jsou řešitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem, a to hned několikerým způsobem. V našich úlohách přichází elipsa vždycky jako obraz kružnice vzhledem k nějaké osové afinitě (kolineaci), kterou s oblibou rádi užíváme a preferujeme, viz odst. 21.5.

Na obr. 17.53 je průmět kužele a koule v kosoúhlém promítání, avšak bez zmiňovaných pomocných konstrukcí. Naopak všechny pomocné čáry (plus dodatečné osvětlení) lze najít na obr. 17.54.



Obrázek 17.53: [U] Kosoúhlý průmět rotačního kužele a koule. . .

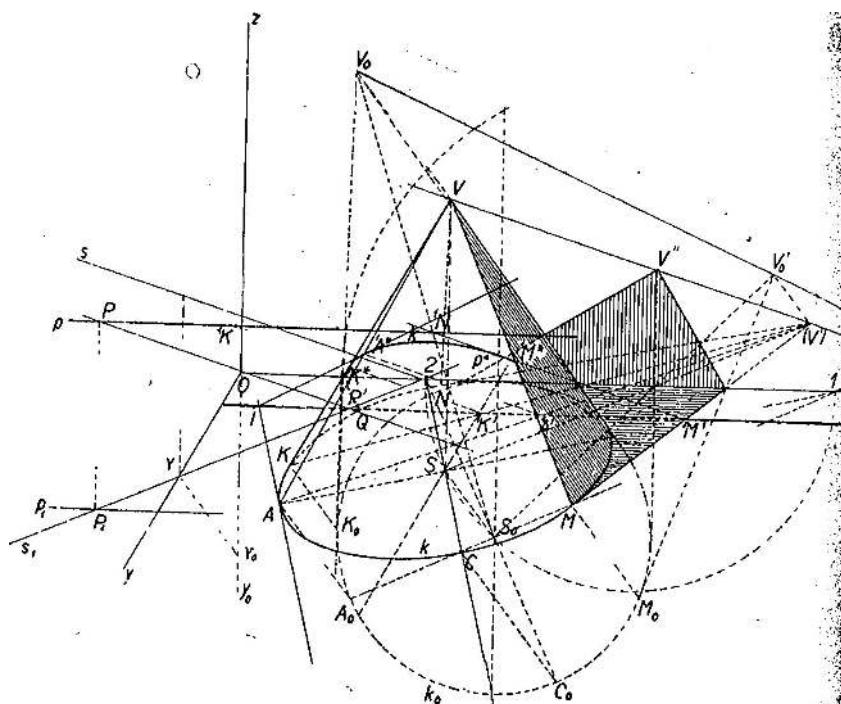
Uvědomte si, že sestavit kolmý axonometrický průmět kužele, resp. válce s podstavou v půdorysně je mnohem jednodušší, protože nemusíme sestavovat směry hlavních průměrů — hlavní osa je rovnoběžná s půdorysnou stopou axonometrického trojúhelníku a je zobrazena ve skutečné velikosti, stačí pouze určit zkrácení na vedlejší ose. S koulí je to samozřejmě ještě lepší.

## 17.5 Další

### Osvětlení

Často se kvůli zdůraznění prostorové představy zobrazují tělesa spolu s jejich stíny vzhledem ke zvolenému zdroji osvětlení. Úlohy tohoto typu neskytají z teoretického hlediska žádné nové myšlenky, tudíž se s nimi nemusíme moc zaobírat. Jediné, co potřebujeme dostatečně mnohokrát opakovat, je opět základní úloha o průniku přímky s rovinou.

Na obr. 17.54 je dán rotační kužel s podstavou v půdorysně a směr osvětlení. Sestrojen je kosoúhlý průmět kužele spolu s vlastním stínem na kuželi a stíny vrženými do první i druhé průmětny. . .



Obrázek 17.54: [KV] Osvětlení kužele.

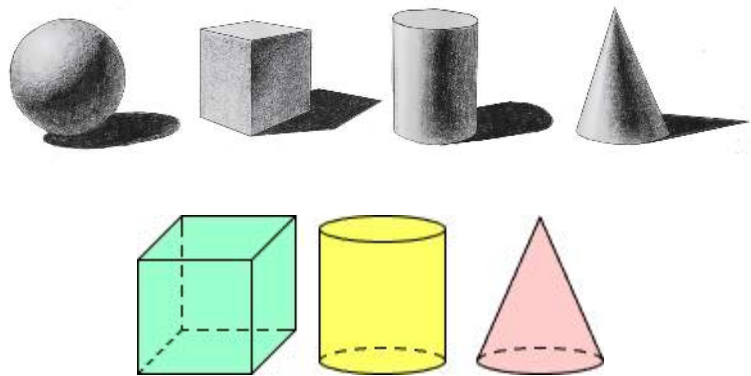
Na obrázku je samozřejmě víc čar než by se jednomu mohlo zamlouvat, proto je vždy vhodné přemýšlet na nějakým vlastním řešením. . .



### Co je špatně?

Úplně na závěr uvádíme jedno užitečné cvičení. Na obr. 17.55 jsou zobrazeny dvě skupiny těles, u nichž se předpokládá, že všechna tělesa ze stejné skupiny stojí na téže rovině a jsou zobrazena tímž způsobem. Pokud jsme se v tomto kurzu něčemu naučili, mělo by nám být hned jasné, co je na obrázku špatně a proč. Navíc bychom měli umět případné chyby napravit, a to s pravítkem a kružítkem!





Obrázek 17.55: [I] Jsou dány průměty dvou skupin těles. Najděte a opravte všechny pohoršující skutečnosti.

## 18 K Pythagorově větě

Pythagorova věta je jedno z nejznámějších planimetrických tvrzení vůbec. Kromě zdůvodnění, které jsme citovali na str. 14, je známo ještě několik desítek dalších důkazů. Ty se dají rozdělit do tří hlavních skupin — důkazy založené na

- transformacích obsahů mnohoúhelníků,
- přeskupování částí (stříhání a skládání),
- podobnostech.

V žádném případě nelze tuto větu dokázat bez postulátu o rovnoběžkách a někdy je zajímavým cvičením jej v jednotlivých zdůvodněních vystopovat. . .



Pythagorova věta má řadu různých zobecnění podle toho, jak na toto tvrzení nahlížíme. Jedno možné zobecnění máme v kosinové větě, viz II.12–13 na str. 21, jiné např. ve větě VI.31, viz str. 33.

Spolu s větou XII.2 o obsahích kruhů můžeme větu VI.31 dále zobecnit: Pro půlkruhy sestavené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku platí, že obsah toho nad přeponou je roven součtu obsahů půlkruhů nad odvěsnami.

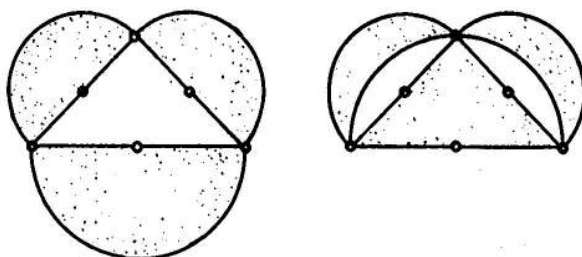
Díky Thaletově větě (str. 23) víme, že když překlopíme půlkružnici nad přeponou do opačné poloviny, bude obsahovat protilehlý vrchol trojúhelníku. Odtud dohromady plyne, že půlměsíce na obr. 18.1 mají stejný obsah jako daný pravoúhlý trojúhelník. Tyto útvary se nazývají *Hippokratovy půlměsíce* a jsou zajímavé proto, že se jedná o křivočaré útvary, které je možné geometricky kvadrátovat. . .

Další zobecnění Pythagorovy věty je zformulováno v následující pozoruhodné větě.<sup>1</sup>

**Věta** (Ptolemaiova). *Pro libovolný tětíkový čtyřúhelník  $ADBC$  platí, že součin velikostí úhlopříček je roven součtu součinů velikostí dvojic protilehlých stran:*

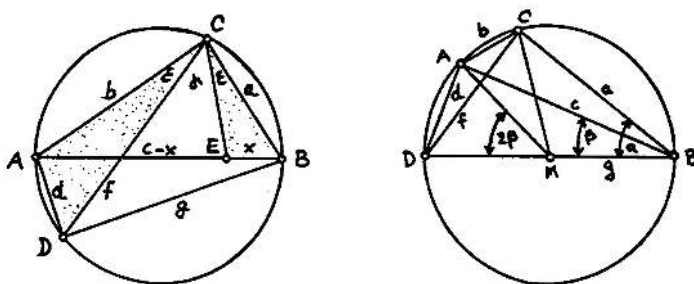
$$AB \cdot CD = AD \cdot CB + AC \cdot BD.$$

<sup>1</sup>Pokud je čtyřúhelník v Ptolemaiově větě obdélníkem, dostáváme právě rovnost z Pythagorovy věty.



Obrázek 18.1: [A] Vyznačené půlměsíce mají stejný obsah jako odpovídající pravouhlý trojúhelník.

Pro vhodně zvolené čtyřúhelníky (viz obr. 18.2 vpravo) lze z této věty vydedukovat geometrické zdůvodnění tzv. součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus. Na základě této věty se ve starověku sestrojovaly tabulky vyjadřující vztahy mezi velikostmi úhlů a odpovídajících tětiv apod. (tedy právě tabulky goniometrických funkcí).



Obrázek 18.2: [A] K Ptolemaiově větě.

## 19 K eukleidovským konstrukcím

Všechny odstavce v této podkapitole odkazují na problém sestrojitelosti reálných veličin. Tomuto tématu jsme se věnovali v odst. 4.18, kde jsme zformulovali charakterizaci eukleidovsky sestrojitelných veličin.

### 19.1 Slavné problémy starověku

Existuje několik skutečně slavných a dlouhou dobu otevřených problémů, jež byly formulovány již ve starověku. Několik úloh, které se týkají eukleidovské sestrojitelosti, zmíníme níže. Zdůvodnění jejich řešitelnosti/neřešitelnosti je založeno na algebraickém popisu naznačeném v odst. 4.18. Detaily samozřejmě ignorujeme, viz dříve doporučené zdroje.

#### Zdvojení krychle

Úkolem je sestrojiti krychli, jejíž objem je dvojnásobkem objemu dané krychle. Je-li velikost hrany dané krychle  $a$ , pak hledaná krychle má mít hranu délky  $x = \sqrt[3]{2}a$ . Třetí odmocnina ze 2 je sice algebraické číslo, ale nikoli výše uvedeného tvaru. Tato úloha není eukleidovsky řešitelná.

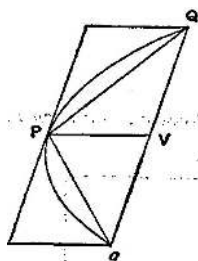
### Rektifikace kružnice

Úkolem je sestrojít úsečku, jejíž délka je rovna velikosti obvodu dané kružnice. Je-li poloměr dané kružnice  $r$ , pak hledaná úsečka má mít velikost  $x = 2\pi r$ . Od roku 1767 se ví, že číslo  $\pi$  není racionální, a od roku 1882 se ví, že číslo  $\pi$  není algebraické, tudíž není sestrojitelné. Tato úloha není eukleidovsky řešitelná.

### Kvadratura kruhu

Úkolem je sestrojít čtverec, jehož obsah je roven obsahu daného kruhu. Je-li poloměr daného kruhu  $r$ , pak hledaný čtverec má mít hranu dlouhou  $x = \sqrt{\pi}r$ . Ze stejného důvodu jako u rektifikace kružnice, není tato úloha eukleidovsky řešitelná.

Odedávna bylo dobře známo, že řešitelnost těchto dvou problémů je ekvivalentní (viz Archimédovu větu na str. 40) a odedávna se lidé domnívali, že se jedná o neřešitelnou úlohu. Nicméně odedávna bylo také známo několik příkladů kvadratury křivočarých útvarů, viz Hippokratovy pľlměsíce (obr. 18.1) a Archimédovu kvadraturu paraboly (obr. 19.3).



Obrázek 19.3: [HTD] Obsah parabolické úseče je roven  $\frac{4}{3}$  obsahu trojúhelníku  $PQq$  (což jsou  $\frac{2}{3}$  obsahu opsaného rovnoběžníku).

### Trisekce úhlu

Úkolem je rozčtřit daný úhel na tři shodné úhly. Na rozdíl od předchozích problémů je tato úloha záludná v tom, že některé úhly sestrojít lze a některé nikoli. Řešení je opět ryze algebraické a zajímavé a redukuje se na analýzu kořenů polynomů třetího stupně nad vhodnými algebraickými rozšířeními tělesa racionálních čísel.

Do seznamu sestrojitelných úhlů samozřejmě patří  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ , jejich poloviny, čtvrtiny, osminy, ale taky libovolné celé násobky. Kromě toho z odst. 4.14 umíme sestrojít úhel  $36^\circ$  apod. Na druhé straně, mezi úhly, které eukleidovsky sestrojít nelze, patří např. nevinně vyhlížející  $20^\circ$  a spousta (opět drtivá většina) dalších.

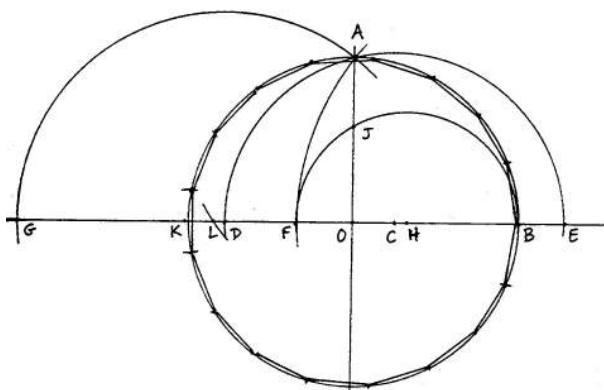
### Konstrukce pravidelného $n$ -úhelníku

Úkolem je sestrojít pravidelný  $n$ -úhelník, což evidentně úzce souvisí s předchozím problémem, akorát jsme podstatně redukovali množinu úhlů do diskuze. V Základech najdeme konstrukce pro  $n = 3, 4, 5$  a  $15$ . Pro každý sestrojitelný pravidelný  $k$ -úhelník, není problém sestrojít taky pravidelný  $2k$ -úhelník. Tzn. úloha je řešitelná také pro  $n = 6, 8, 10, 12, 16, 20$  a další.

30. března 1796 C.F. Gauss sestrojil pravidelný 17-úhelník (viz obr. 19.4) a posléze dokázal jednu implikaci v následující větě. Druhý směr o několik desítek let později dokázal P.L. Wantzel stejně jako pár dalších výše zmiňovaných výsledků.

**Věta** (Gaussova–Wantzelova). *Pravidelný  $n$ -úhelník lze sestavit eukleidovským pravítkem a kružítkem právě tehdy, když  $n$  je součinem libovolné mocniny 2 a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

*Fermatovo prvočíslo* je prvočíslo tvaru  $F_k = 2^{2^k} + 1$ . K dnešnímu dni<sup>2</sup> je známo pouze pět Fermatových prvočísel:  $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$  a  $F_4 = 65537$ . Tato úloha tedy není řešitelná pro  $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, \dots$  Pro další čtení doporučujeme např. 13. kapitolu v [A].



Obrázek 19.4: [Ha] Konstrukce pravidelného 17-tiúhelníku.

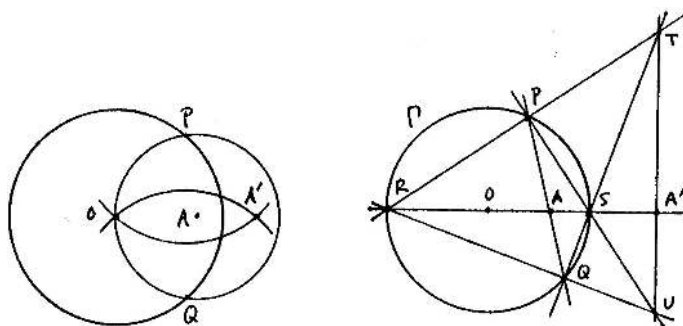
## 19.2 Mascheroniovské a steinerovské konstrukce

*Mascheroniovské konstrukce* jsou konstrukce, při kterých se používá pouze kružítko. *Steinerovské konstrukce* jsou konstrukce, při kterých se používá pouze pravítko a jedna pomocná předem narýsovaná kružnice. Platí, že veličina je sestrojitelná eukleidovsky, právě když je sestrojitelná mascheroniovsky, právě když je sestrojitelná steinerovsky. Toto tvrzení se zdůvodňuje v podobném duchu, jak jsme naznačili v odst. 4.18, viz [Mar<sub>2</sub>].

To v důsledku znamená, že jakoukoli eukleidovskou konstrukci musí jít realizovat mascheroniovsky, příp. steinerovsky. Nalezení takové konstrukce může být samozřejmě poněkud komplikovanější, než zdůvodnit, že to je možné. Dva příklady na ukázkou jsou na obr. 19.5.

<sup>2</sup>17. února 2020



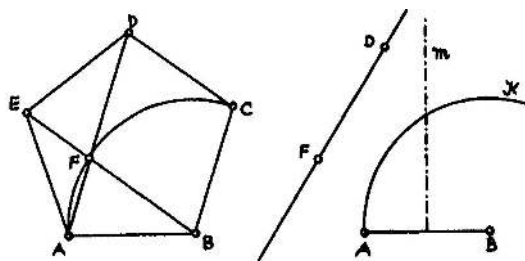


Obrázek 19.5: [Ha] Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu  $A'$  k bodu  $A$  při kruhové inverzi se středem v  $O$ ...

### 19.3 Konstrukce s označeným pravítkem

*Konstrukce s označeným pravítkem* jsou konstrukce, při kterých se používá jak kružítko, tak pravítko, a navíc je dovoleno dělat na pravítku značky, které se dále používají. Takovému nástroji se také říká *neusis*.

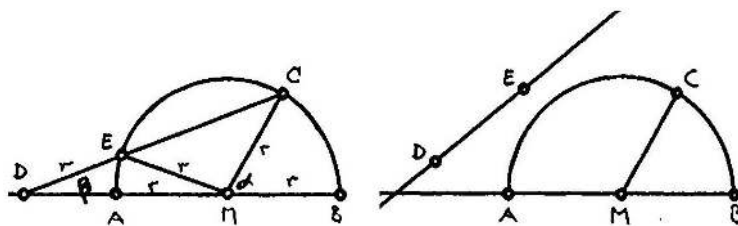
Tímto způsobem lze velmi rychle sestavit pravidelný pětiúhelník, viz obr. 19.6 (srovnejte s konstrukcemi v 4.14). Neusis se také používá při tzv. proužkové konstrukci bodů elipsy (zadané hlavními průměry)...



Obrázek 19.6: [A] Konstrukce pravidelného pětiúhelníku s kružítkem a označeným pravítkem.

Zajímavější je, že s označeným pravítkem lze řešit mnohé eukleidovské neřešitelné problémy jako např. trisekci libovolného úhlu! Na obr. 19.7 najdete Archimédovo řešení tohoto problému, jehož zdůvodnění je velmi prosté...

Úplnou charakterizaci veličin, které lze s kružítkem a označeným pravítkem sestavit, lze najít v [Ha] nebo [Mar<sub>2</sub>]...



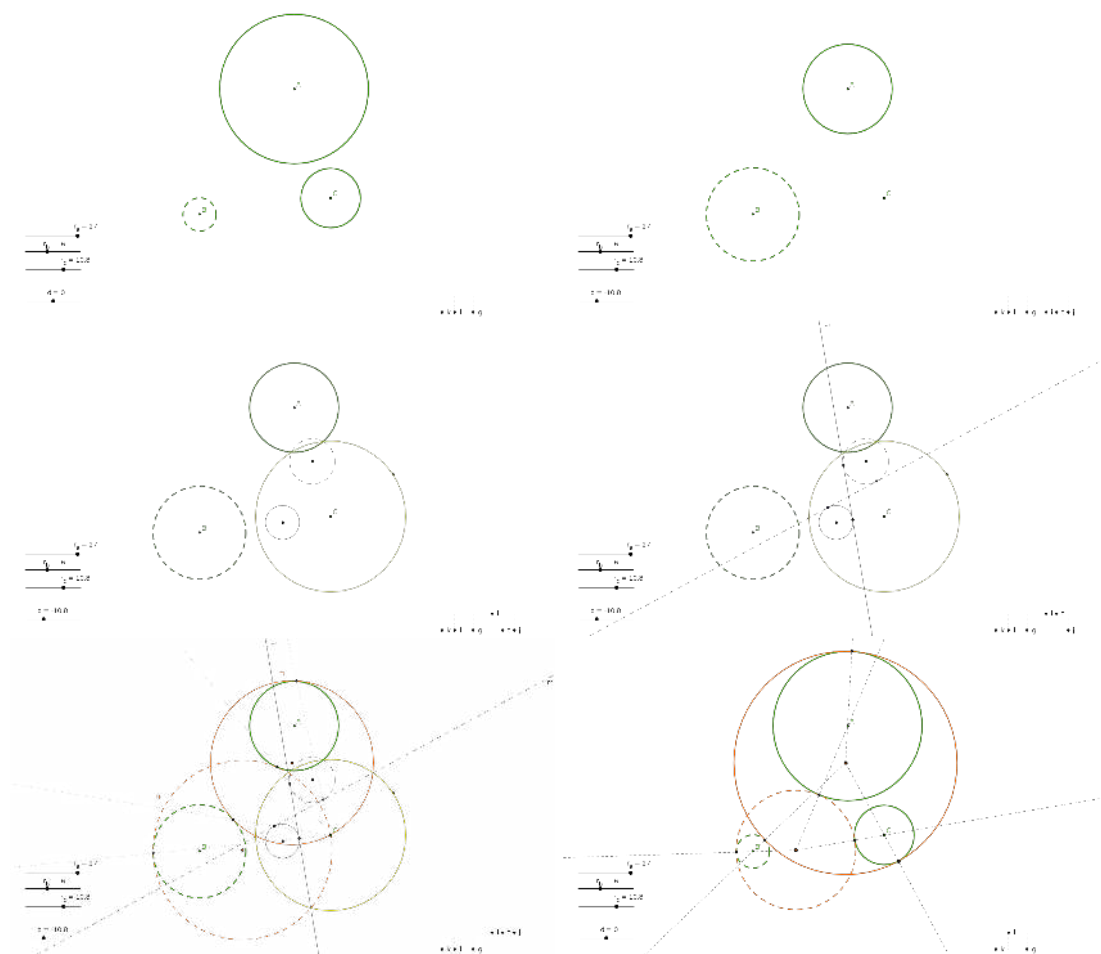
Obrázek 19.7: [A] Trisekce úhlu s označeným pravítkem:  $\alpha = \angle BMC$  je libovolný úhel; sestrojíme lib. kružnici se středem v  $M$ ; přiložíme neusis s vyznačenými body  $D$  a  $E$  tak, že  $DE = AM$ . . . Potom platí, že  $\beta = \frac{1}{3}\alpha$ .

## 20 K úlohám Apollóniovým

První seznámení s Apollóniovými úlohami je v podkapitole 5. Od samého začátku jsme si všimli, že vhodné geometrické transformace pomáhají při řešení úlohy. Ve cvičení 7.7 jsme si uvědomili, že pomocí dilatace a kruhové inverze lze jakoukoli Apollóniovu úlohu redukovat na podstatně jednodušší problém z poměrně krátkého seznamu. Tady doplníme ještě několik postřehů a alternativ.

### 20.1 Řešení pomocí vhodných transformací

Toto je metoda, kterou jsme protěžovali především. Nebudeme se znovu opakovat, pouze pro porovnání přikládáme miniseriál demonstrující typickou redukci složitosti pomocí dilatace a kruhové inverze, viz obr. 20.8.



Obrázek 20.8: Řešení obecné Apollóniový úlohy pomocí dilatace a kruhové inverze:

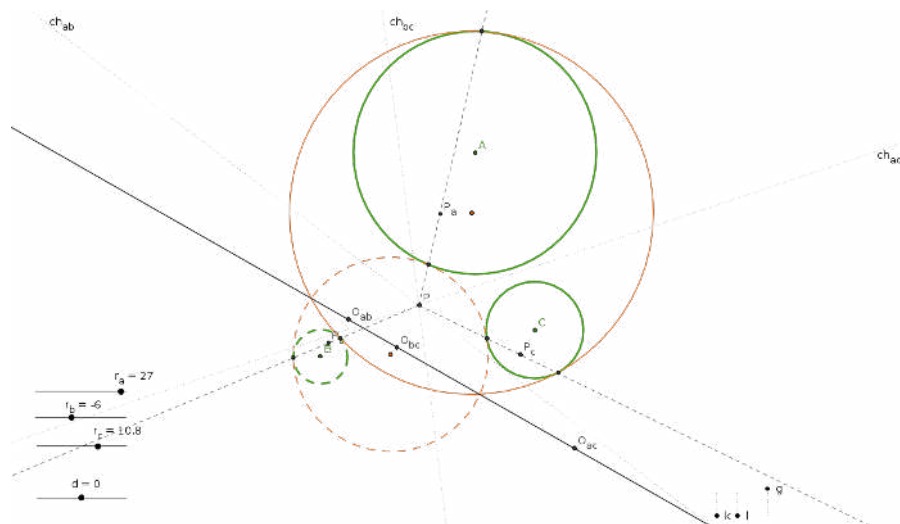
- (1) zadání, (2) dilatace,
- (3) kruhová inverze, (4) společné tečny ke dvěma cyklům (!),
- (5) kruhová inverze, (6) dilatace.

## 20.2 Řešení Gergonnovo

Toto řešení je poměrně elementární, čímž myslíme, že při konstrukci se nepracuje s žádnou transformací, viz obr. 20.9. Zdůvodnění konstrukce plyne z následujícího rozboru:

- (a) spojnice ( $l_i$ ) dvojic dotykových bodů na každém cyklu prochází společným bodem ( $P$ ), jež je potenčním středem daných tří kružnic,
- (b) póly ( $L_i$ ) těchto spojnic (= průsečíky tečen z dotykových bodů) leží na jedné přímce ( $ch$ ), jež je právě chodrálou dvou kružnic řešení,
- (c) tato přímka je právě osou podobnosti tří daných cyklů (= spojnice tří středů stejnolehlosti),
- (d) protože  $L_i \in ch$  a  $L_i$  je pól  $l_i$ , musí pól  $ch$  ležet na  $l_i$ .

Zdůvodnění tvrzení, že nejsou jasná, lze najít např. v [Ho]. Princip zmiňovaný v (d) je znám jako tzv. *polární reciprocita*.



Obrázek 20.9: Gergonnovo řešení obecné Apollóniovovy úlohy:

- (1)  $ch_{ab}, ch_{bc}, ch_{ac}$  jsou chordály tří dvojic daných kružnic, jež prochází jejich potenčním středem  $P$ ,
- (2)  $O_{ab}, O_{bc}, O_{ac}$  jsou středy stejnolehlosti tří dvojic daných cyklů, jež leží na jejich ose podobnosti,
- (3)  $P_a, P_b, P_c$  jsou póly této přímky vzhledem k daným kružnicím,
- (4) dotykové body jsou na spojnicích  $PP_a, PP_b, PP_c$ .

### 20.3 Řešení pomocí geometrických míst

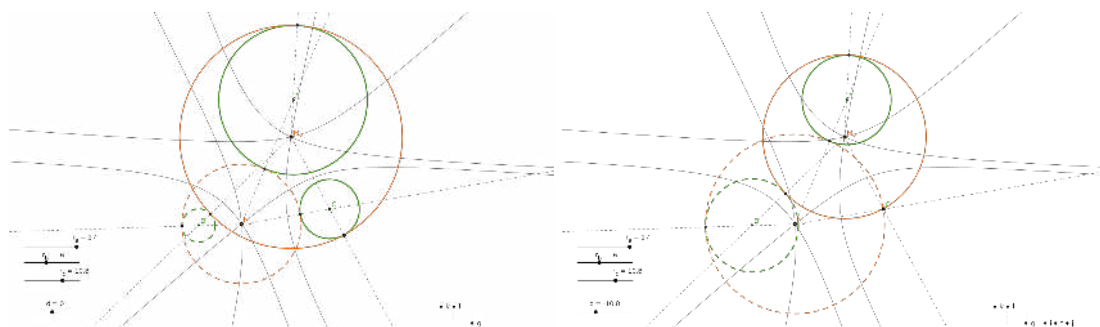
Tato metoda je založena na jednoduchém pozorování, že středy cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů tvoří vždy nějakou **kuželosečku**, kterou si označíme např.  $k$ :

**Věta.** Pro cykly  $a, b$  se středy  $A, B$  a poloměry  $r_a, r_b$  platí:

- je-li  $|r_a - r_b| > |AB|$ , pak  $k$  je elipsa s ohnisky  $A, B$  a délkou hlavní osy  $|r_a - r_b|$ ,
- je-li  $|r_a - r_b| < |AB|$ , pak  $k$  je hyperbola s ohnisky  $A, B$  a délkou hlavní osy  $|r_a - r_b|$ .

V uvedeném popisu uvažujeme  $r_a, r_b$  jako orientované poloměry, tzn. znaménko  $r_a$  odpovídá orientaci cyklu  $a$ . Ve speciálních, resp. mezních případech je kuželosečka  $k$  kružnice nebo přímka...

Pro tři dané cykly jsou středy hledaných dotýkajících se cyklů společnými body nějakých tří kuželoseček — sestojit takové body zpravidla neumíme eukleidovsky.



Obrázek 20.10: Středů cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří kuželosečku (která se nemění při dilatacích).

## 20.4 Řešení pomocí cyklografie

(Prozradím zájemcům, kteří znají heslo.<sup>3</sup>)

## 21 Kuželosečky

V této podkapitole uvedeme několik ekvivalentních definic elipsy a stručně zmíníme několik užitečných důsledků. Podobné definice a vlastnosti lze zformulovat také pro parabolu a hyperbolu.

### 21.1 Elipsa

Elipsa je rovinná křivka, která může být definována mnoha různými způsoby. Některé neznámější stručně připomeneme a hlavně naznačíme, proč jsou navzájem **ekvivalentní**. V odst. 21.4 ještě přidáme jeden možný pohled na elipsu.

*Elipsa* je rovinná křivka definovaná některým z následujících ekvivalentních způsobů:

- (a) uzavřená kuželo-sečka, tj. řez kuželové plochy takovou rovinou, která protíná všechny její povrchové přímky;
- (b) množina bodů v rovině, jež mají konstantní součet vzdáleností od dvou bodů  $E$  a  $F$ :

$$|EX| + |XF| = \text{konst.};$$

- (c) množina bodů v rovině, jež mají konstantní poměr vzdáleností od bodu  $F$  a přímky  $d$ , přičemž

$$|XF| : |Xd| = \text{konst.} < 1;$$

- (d) křivka určená kvadratickou rovnicí (vzhledem k vhodné souřadné soustavě)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{resp.} \quad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

<sup>3</sup>Heslo je EIFARGOLKYC.

Související pojmy a vztahy jsou následující:

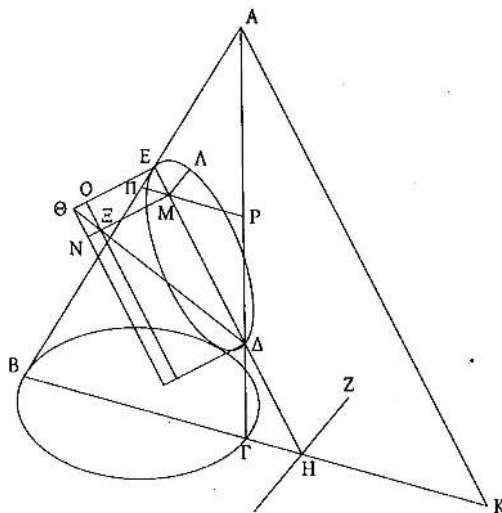
- body  $E$  a  $F$  jsou *ohniska*, přímka  $d$  je *řídící přímka* (elipsa má dvě ohniska a dvě řídící přímky),
- kvadratická rovnice v (d) je tzv. *středová*, resp. *vrcholová rovnice* elipsy (pojmenováno podle umístění počátku odpovídající souřadné soustavy),
- $a$  = délka *hlavní poloosy*,  $b$  = délka *vedlejší poloosy*,  $p = \frac{b^2}{a}$  = *parametr elipsy*,
- konstanta v (b) je rovna  $2a$ ,
- konstanta v (c) je rovna  $\frac{e}{a}$ , kde  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  = *výstřednost* elipsy.

Diskuzi začneme ukázkou z klasického a velmi zevrubného pojednání o kuželosečkách od Apollónia z Pergy. Zde je elipsa definována podle (a), ostatní charakterizace jsou odtud odvozené.

**Věta** (Apollóniova). *Uvažme kužel s kruhovou podstavou<sup>4</sup> a jeho eliptický řez jako na obr. 21.11. Potom pro libovolný bod  $\Lambda$  na elipse platí*

$$\Lambda M^2 = \Xi M \cdot ME, \quad (21.1)$$

kde  $M$  je pata kolmice z  $\Lambda$  na  $\Delta E$  a  $\Xi$  je bod na úhlopříčce pevného přiloženého obdélníku se stranami  $\Delta E$  a  $E\Theta$ , kde  $E\Theta$  je určena vztahem  $\Delta E : E\Theta = AK^2 : (BK \cdot K\Gamma)$ .



Obrázek 21.11: [Š] Ke 13. větě z I. knihy Apollóniových Kuželoseček. . .

*Důkaz.* Úsečka  $E\Theta$  je sestrojena poněkud uměle, za chvíli však bude jasné, že odpovídá právě parametru  $p$  elipsy.

<sup>4</sup>Kužel nemusí být nutně rotační.

Odvození (21.1) plyne právě z definující rovnosti pro úsečku  $E\Theta$  a podobností několika trojúhelníků:

$$\frac{\Delta M}{M\Xi} = \frac{\Delta E}{E\Theta} = \frac{AK}{BK} \frac{AK}{KT} = \frac{EM}{M\Pi} \frac{\Delta M}{MP}.$$

Když levou stranu rozšíříme  $ME$ , budou mít poměry na obou stranách stejný čítec, odkud plyne rovnost jmenovatelů:

$$M\Xi \cdot ME = M\Pi \cdot MP.$$

Navíc rovina  $\Lambda\Pi P$  je rovnoběžná s podstavou, tudíž řezem kuželové plochy touto rovinou je kružnice a  $\Pi P$  je její průměr. Podle Thaletovy věty je úhel  $\Pi\Lambda P$  pravý a podle Eukleidovy věty o výšce platí:

$$M\Pi \cdot MP = M\Lambda^2.$$

Dosazením do předchozí rovnice tak dostáváme (21.1). □

**Důsledek.** Definice (a) a (d) jsou ekvivalentní.

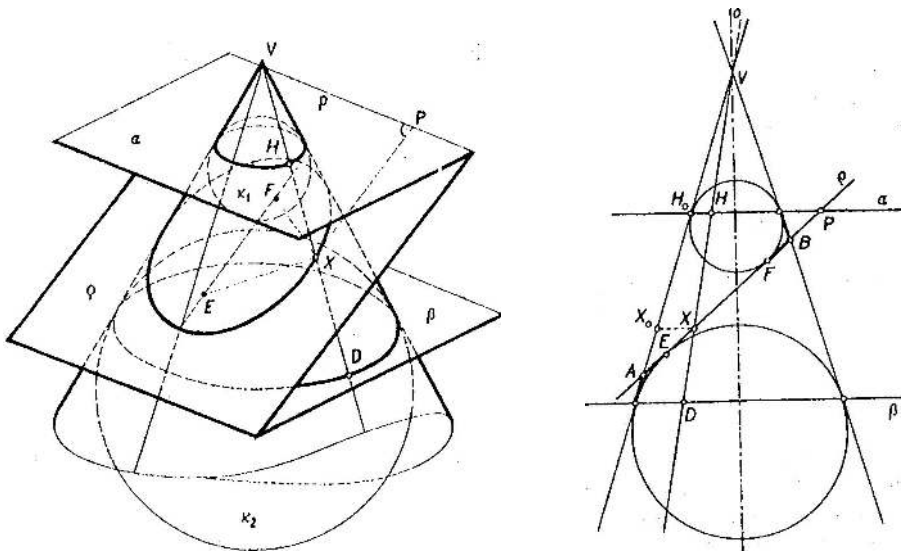
*Důkaz.* Označíme si  $|E\Theta| =: 2p$ , dále  $|E\Delta| =: 2a$ ,  $|EM| =: x$  a  $|M\Lambda| =: y$ . Z podobnosti trojúhelníků  $\Theta E\Delta$  a  $\Theta E\Xi$  umíme při tomto značení vyjádřit  $|\Xi M| = 2p - \frac{p}{a}x$ . Rovnici (21.1) pak můžeme přepsat jako

$$y^2 = \left(2p - \frac{p}{a}x\right)x,$$

což je právě vrcholová rovnice elipsy v (d). □

Zbylé ekvivalence plynou z následující pozoruhodné věty.

**Věta** (Dandelinova–Queteletova). *Předpokládejme, že rovinným řezem rotační kuželové plochy je elipsa. Pak ohniska této elipsy jsou právě body dotyku kulových ploch, které se dotýkají jak kužele, tak roviny řezu.*



Obrázek 21.12: [Ku<sub>2</sub>] K Dandelinově–Queteletově větě...

*Důkaz.* Celé následující zdůvodňování je odvozeno z jednoduchého poznatku, že všechny tečny z daného bodu k dané kulové ploše jsou stejně dlouhé (myslíme samozřejmě úsečky od daného bodu k bodům dotyku).

Na obr. 21.12 značí  $E, F$  dotykové body kulových ploch s řeznou rovinou,  $X$  je libovolný bod na elipse, body  $H, D$  jsou průsečíky přímkou  $VX$  s dotykovými kružnicemi kužele a vepsaných koulí. Chceme ukázat, že platí  $|EX| + |XF| = \text{konst.}$ , tj., že  $E$  a  $F$  jsou právě ohniska elipsy:

Podle výše uvedeného poznatku je  $|EX| = |DX|$  a  $|XF| = |XH|$ , tudíž

$$|EX| + |XF| = |DX| + |XH| = |DH|.$$

Protože je kužel rotační, je vzdálenost  $|DH|$  stále stejná pro všechny povrchové přímkou, což jsme právě měli dokázat.  $\square$

**Důsledek.** Definice (a), (b) a (c) jsou navzájem ekvivalentní, přičemž řídící přímky elipsy jsou právě průsečnice  $\rho \cap \alpha$  a  $\rho \cap \beta$  na obr. 21.12.

*Důkaz.* Ekvivalence (a) a (b) plyne přímo z předchozí věty. Ekvivalence s definicí (c) bude zřejmá, když dokážeme charakterizovat řídící přímky. Pro průsečnici  $p = \rho \cap \alpha$ , ohnisko  $F$  a pro libovolný bod  $X$  na elipse chceme ukázat, že platí  $|XF| : |Xp| = \text{konst.} < 1$ , tj., že  $p$  je její řídící přímka.

Vzdálenost  $|Xp|$  měříme jako vzdálenost  $|XP|$ , kde  $P$  je pata kolmice z  $X$  na  $p$ ; v pomocném bočním průmětu vidíme tuto vzdálenost nezkráceně. Před chvílí jsme si uvědomili, že  $|XF| = |XH|$ ; tuto vzdálenost vidíme v bočním průmětu jako velikost pootočené úsečky  $|X_0H_0|$  (pro jistotu dodáváme, že  $HH_0 \parallel XX_0$ ). Platí tedy:

$$|XF| : |Xp| = |X_0H_0| : |XP|.$$

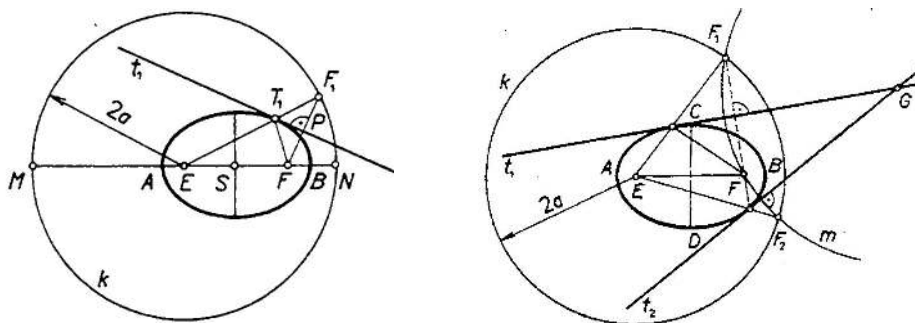
Protože trojúhelníky  $AH_0P$  a  $AX_0X$  (v bočním průmětu!) jsou stejnohlé, platí:

$$|X_0H_0| : |XP| = |AH_0| : |AP|,$$

což je konstanta (určená výhradně vzájemnou polohou rovin  $\rho$ ,  $\alpha$  a kužele). Navíc je zřejmé, že tato konstanta je  $< 1$ , což jsme měli dokázat.  $\square$

## 21.2 Další vlastnosti a pojmy

Z ohniskových vlastností elipsy lze vyvodit několik dalších poznatků, které jsou užitečné např. při konstrukcích tečen, viz obr. 21.13.



Obrázek 21.13: [Ku<sub>2</sub>] Vlastnosti tečen elipsy. . .



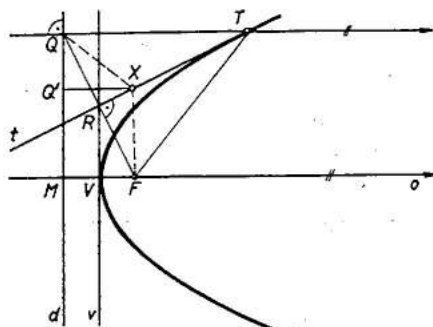
Tyto vlastnosti lze použít k elementárním konstrukcím *pólu* přímky, resp. *poláry* bodu vzhledem k dané elipse. . .

Elipsu jako takovou samozřejmě nelze naryšovat pravítkem a kružítkem. Můžeme však sestavit libovolné množství na ní ležících bodů. . .

Pro přibližné určení elipsy v okolí jejích vrcholů se užívá tzv. (*hyper-*)*oskulačních kružnic*. . .

### 21.3 Ostatní kuželosečky

Většina výše uvedených poznatků, které jsme zformulovali o elipse, má analogie pro ostatní nedegenerované kuželosečky, tj. *parabolu* a *hyperbolu*. Až bude někdy čas, tak jich tady pár vyjmenujeme. . .



Obrázek 21.14: [Ku<sub>2</sub>] Vlastnosti tečen paraboly. . .

### 21.4 Projektivní obraz kružnice

Pozorování v předchozích odstavcích nám silně připomínají jinou podobnou situaci — „kružnice“ a elipsa na obr. 21.11 jsou v úplně stejném vztahu jako dva trojúhelníky na obr. 8.26. Planimetrická interpretace této korespondence je samozřejmě opět **osová kolineace**.

V perspektivní kolineaci může kružnici odpovídat libovolná kuželosečka a při středovém promítání se každá kuželosečka zobrazuje do kružnice. To v důsledku znamená, že obrazem kružnice vzhledem k osové kolineaci může být libovolná nedegenerovaná<sup>5</sup> kuželosečka. Speciálním případem osové kolineace je osová afinita a — jako každé afinní zobrazení — tato neumí zobrazit žádný vlastní bod na nevlastní. To znamená, že obrazem kružnice vzhledem k osové afinitě může být jedině elipsa. Odtud plyne následující tvrzení, které má velice užitečné konstrukční důsledky.

**Věta.** *Obrazem kružnice v osové kolineaci (afinitě) je nedegenerovaná kuželosečka (elipsa). Naopak, libovolná nedegenerovaná kuželosečka (elipsa) je obrazem kružnice vzhledem k nějaké osové kolineaci (afinitě).*

Vzhledem k tomu, že středová promítání a osové kolineace jsou základní projektivní zobrazení, předchozí tvrzení je možné ještě zobecnit:

**Věta.** *Projektivním obrazem kružnice je kuželosečka. Naopak, každá kuželosečka je projektivním obrazem kružnice.*

<sup>5</sup>Pokud by byla degenerovaná, nebyla by kolineace kolineací, tj. nebyla by bijektivním zobrazením.

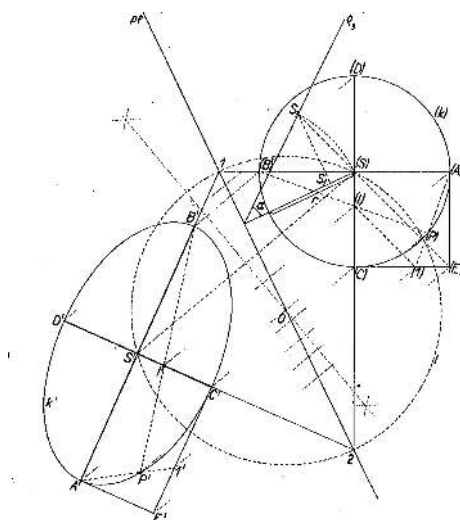
## 21.5 Úlohy s kuželosečkami

Tady zmiňujeme několik úloh, na které odkazujeme při zobrazování oblých těles (odst. 17.4). Pro některé z následujících úloh samozřejmě existují elementární konstrukce odvozené z ohniskových vlastností kuželoseček (odst. 21.2). My budeme ve všech případech zaměřovat **osovou kolíneaci (afinitu)** mezi kuželosečkou a kružnicí. Tato je buď součástí nebo ji lze podle potřeby vymyslet, a to dokonce několika způsoby. Úlohy formulujeme pro elipsu, avšak není problém zobecnit pro obecnou (nedegenerovanou) kuželosečku. . .

### Konstrukce hlavních průměrů

Předpokládejme, že elipsa je dána jako obraz kružnice vzhledem k osové afinitě určené osou  $p$  a obrazem  $S'$  středu ( $S$ ). Sestrojit onu elipsu pro nás znamená sestrojit její hlavní průměry, což jsou sdružené průměry, které jsou současně navzájem kolmé.

Řešení na obr. 21.15 je odvozeno z toho, že sdružené průměry v kružnici jsou právě navzájem kolmé průměry. Hledáme tudíž takovou dvojici kolmých průměrů v kružnici, jejímž obrazem jsou zase kolmé průměry. Odpovídající přímky se protínají na ose (body 1 a 2) a pravý úhel u vrcholu ( $S$ ), resp.  $S'$  je charakterizován tím, že leží na Thaletově kružnici (ozn.  $l$ ). Střed této kružnice leží na ose úsečky  $(S)S'$  a na ose afinity  $p$ . . .

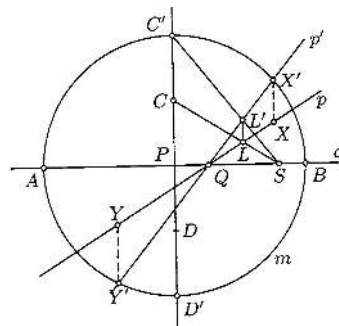


Obrázek 21.15: [KV] Hlavní průměry elipsy pomocí osové afinity.

### Průnik přímky s kuželosečkou

Elipsa je dána svými vrcholy  $A, B, C$ , máme sestrojit její průnik s přímkou  $p$ .

K řešení na obr. 21.16 užíváme (uměle vytvořenou) osovou afinitu mezi elipsou a kružnicí s průměrem  $AB$  — tato afinita má osu  $AB$  a je zcela určena dvojicí bodů  $C \mapsto C'$ . Přirozený postup je následující: sestrojíme obraz přímky  $p$ , určíme její průsečíky s kružnicí ( $X', Y'$ ) a vzory těchto dvou bodů ( $X, Y$ ) jsou řešením úlohy.

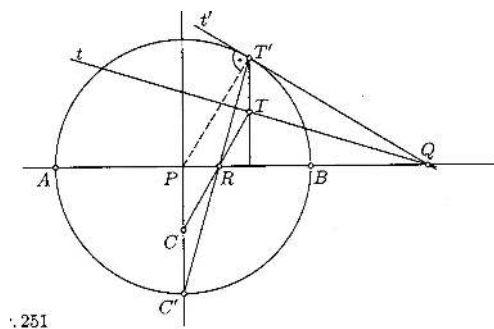


Obrázek 21.16: [Ku] Průnik přímky s elipsou pomocí osové afinity.

**Tečna ke kuželosečce**

Elipsa je dána svým hlavním průměrem  $AB$  a bodem  $T$ , máme sestrojiti tečnu k elipse z bodu  $T$ .

Pomocí stejné osové afinity jako v předchozí úloze můžeme postupovat takto: sestrojíme obraz bodu  $T$ , sestrojíme tečnu z tohoto bodu ke kružnici, vzor této přímky je tečnou k elipse.



Obrázek 21.17: [Ku] Tečna k elipse pomocí osové afinity.

Uvedené myšlenky lze snadno modifikovat např. k sestrojení tečny k dané elipse z daného bodu či v daném směru. . .





Na závěr nabízíme pokus o stručné shrnutí probrané látky. Za celý semestr jsme toho napovídali celkem hodně, ty nejpodstatnější věci se však poznají podle toho, že jsou zpravidla obdařeny přívlastkem **základní**.

### Klasická konstrukční geometrie (kap. II)

Nejprve jsme si dali záležet na organizaci základních geometrických poznatků, a to podle Eukleidových Základů (podkap. 4). Geometrie (stejně jako jakákoli jiná matematická disciplína) není pouhým souborem definicí a pouček, které je nutné se před každou zkouškou našprtát. Ptáme-li se u každého tvrzení, jak je zdůvodněno (příp. co z něj dále vyplývá), můžeme odhalit jasnou logickou strukturu, a tu již nelze zapomenout! Takto se postupně dostáváme k několika málo primitivním (tj. nejzákladnějším, a tedy nedefinovaným) pojmům a vztahům/relacím. Primitivní pojmy jsou

- *bod, přímka a rovina,*

primitivní vztahy jsou

- *incidence, uspořádání, shodnost, rovnoběžnost a spojitost.*

Tyto vztahy jsou vymezeny několika základními tvrzeními (axiómy, resp. postuláty), viz odst. 4.1 a přílohu na str. 171.

### Planimetrie

Na úvod jsme se věnovali poněkud problematickému pátému Eukleidovu postulátu (odst. 4.4). Ten je poprvé použit ve větě o střídavých úhlech (I.29), odkud dále plyne např. věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku (I.32) nebo základní věty o stejnoplochých trojúhelnících/rovnoběžnících (I.35–38). Vyvrcholením tohoto tematického okruhu byla Eukleidova věta o odvěsně, resp. věta Pythagorova (I.47).

Víceméně jenom s těmito poznatky jsme byli schopni konstrukčně řešit problém tzv. kvadratury obecného mnohoúhelníku (odst. 4.6). Rozborem zdůvodnění jednotlivých kroků jsme si navíc uvědomili zajímavý dodatek týkající se střihání (str. 17).

Jako ukázkou tzv. geometrické algebry jsme uvedli konstrukci *zlatého řezu* úsečky, kterou jsme interpretovali jako geometrické řešení velmi speciální kvadratické rovnice (odst. 4.9).

V souvislosti s kružnicemi (odst. 4.12) jsme zmínili několik základních tvrzení týkajících se jejich vzájemného dotyku, příp. tečen (III.11–19). Dalším milníkem byla věta o středových a obvodových úhlech (III.20–21), jejímiž bezprostředními důsledky jsou např. věta o tětivovém čtyřúhelníku, Thaletova věta nebo věta o úsekovém úhlu. Vyvrcholením tohoto odstavce byla věta, která sice nemá žádné speciální pojmenování (III.35–36), která nás však dovedla k velice užitečnému pojmu *mocnosti bodu ke kružnici*.

Hezkou syntézu všech podstatných a do té doby diskutovaných témat lze najít při důkladném rozboru pravidelného pětiúhelníku (odst. 4.14). Odtud jsme vyvodili návod k jeho konstrukci a současně jsme doplnili několik početních vyjádření (str. 29).

Velice užitečnou pomůckou v mnoha konstrukcích, resp. v jejich zdůvodněních jsou podobné útvary, nejčastěji trojúhelníky. Teorie podobnosti je považována za pokročilejší látku, mj. také proto, že se porovnávají *poměry* veličin různého typu (odst. 4.16). Typickým a v jistém smyslu nejzákladnějším tvrzením je věta VI.1, která se sice přímo netýká podobnosti, ale doplňuje předchozí diskuzi o rovnostech obsahů trojúhelníků/rovnoběžníků. Druhé nejzákladnější a v tomto kurzu nejčastěji citované tvrzení je ve větě VI.2, která charakterizuje rovnost poměrů vzdáleností dvou trojic kolineárních bodů. Odtud plyne známá charakterizace podobnosti dvou trojúhelníků (VI.4–5) a vyjádření poměru obsahů podobných trojúhelníků/mnohoúhelníků pomocí *koeficientu* podobnosti (VI.19–20). Tento tematický celek je zakončen přirozeným zobecněním Pythagorovy věty (VI.31).

### Sestrojitelné veličiny

Na tomto místě jsme schopni úplně charakterizovat tzv. *eukleidovsky sestrojitelné* veličiny, tzn. všechny veličiny, které jsou — vzhledem k dané jednotce — sestrojitelné pomocí eukleidovského pravítka a kružítka (odst. 4.18). Ty jsou algebraicky vymezeny jako takové veličiny, které lze vyjádřit pomocí konečného počtu operací  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$  a  $\sqrt{\quad}$  (str. 35). Odpovídající geometrické konstrukce jsou založeny na

- příkládání a odebírání úseček na přímce,
- podobných trojúhelníků,<sup>6</sup>
- Eukleidově větě o odvěsně, resp. o výšce.

Tato diskuze úzce souvisí s obecnými kvadratickými rovnicemi a jejich geometrickým řešením (str. 36).

Eukleidovsky sestrojitelné veličiny jsou veličiny velmi specifického typu, jinými slovy: naprostá většina reálných veličin není eukleidovsky sestrojitelná. Odtud plyne, proč některé známé geometrické problémy, jako např. kvadratura kruhu nebo konstrukce pravidelného mnohoúhelníku s obecným počtem vrcholů, nejsou eukleidovsky řešitelné (odst. 19.1).

### Stereometrie

Na úvod jsme si zopakovali definice *rovnoběžnosti* a *kolmosti* přímek v rovině, které jsme rozšířili na přímky a roviny v prostoru (odst. 4.20). Poté jsme velice svižně probrali několik trojrozměrných analogií k dříve diskutovaným planimetrickým tématům:

Pojednání o kvádrech/rovnoběžnostěnech a jejich objemech v XI. knize je velmi podobné tomu, co známe z I., resp. VI. knihy.

<sup>6</sup>Resp. na navzájem vložených rovnoběžnicích jako na obr. 4.6 na str. 16.

Pojednání o jehlanech (překvapivě) a válcích/kuželích (pochopitelně) ve XII. knize je podstatně komplikovanější, neboť se nelze vyhnout jistým infinitezimálním úvahám. Ty jsou v Základech zhmotněny v tzv. Eudoxově metodě, která je založena na vyčerpávání daného tělesa tělesy jednoduššími, o nichž všechno víme. Objem koule (a taktéž obsah kruhu) je zde diskutován ve stejném duchu.

Vyvrcholením tohoto bloku — a současně celých Základů — je klasifikace a důkladný rozbor pravidelných konvexních mnohostěnů, tzv. *Platónských těles* (odst. 4.21). Těch je celkem pět, podrobněji jsme se věnovali pouze dvěma nejkomplicovanějším tělesům: pravidelnému dvanáctistěnu a dvacetistěnu. Vztahy, které jsme v těchto tělesech objevili (a ve kterých se opakovaně objevoval zlatý řez), si potřebujeme zapamatovat pro konstrukce jejich různých průmětů. Tomu se věnujeme v závěru celého kurzu. . .

### Dotykové úlohy

Dotykovými úlohami myslíme úlohy, v nichž se dotýkají kružnice, příp. kružnice a přímky (podkap. 5). Rozšiřujeme diskuzi z odst. 4.12 a naším cílem je vyřešit obecnou Apollóniovu úlohu. Přitom vyřešit neznamená nějak vyčarovat řešení, ale pěkně eukleidovsky sestrojít zejména dotykové body!

Nejzákladnější dotykové úlohy jsou dvě:

- konstrukce tečny z bodu ke kružnici,
- konstrukce společných tečen dvou kružnic,

přičemž každou z těchto úloh umíme řešit (alespoň) dvojím způsobem (odst. 5.1).

Poté jsme se věnovali dalším dotykovým úlohám, které postupně vygradovaly k možnému řešení obecné Apollóniové úlohy (odst. 5.2–5.4). V uvedených konstrukcích se opakovaně odkazujeme jenom na několik základních principů:

- mocnost bodu ke kružnici,
- souměrnosti,
- stejnolehlosti,
- dilatace.

U dilatací si uvědomujeme, že je nutné uvažovat dotyk v souhlase s *orientacemi* vystupujících objektů. V ostatních případech to nutné není, ale pomáhá to v organizaci řešení (zejména u úloh s více řešeními).

Ke zmiňovaným transformacím jako takovým se ještě vracíme v samostatných odstavcích (v kap. III) a přidáme k nim jednu další — kruhovou inverzi. Několik dodatků k Apollóniově úloze lze najít také v podkap. 20.

### Užitek

Na konci tohoto bloku umíme sestrojít čtverec, který má stejný obsah jako libovolný daný mnohoúhelník. Navíc si uvědomujeme, že ve speciálních případech je možné naše obecné konstrukční návyky zajímavě zjednodušit (str. 53).

Víme všechno o zlatém řezu a z jeho algebraického vyjádření si umíme kdykoli odvodit svoji vlastní konstrukci. Obecněji, umíme vymyslet konstrukci kořenů libovolné kvadratické rovnice. Současně si uvědomujeme, že ne všechny reálné veličiny jsou eukleidovsky sestrojitelné, a bezpečně umíme rozpoznat právě ty sestrojitelné od všech ostatních.

Umíme sestrojít pravidelný pětiúhelník a několik dalších pravidelných mnohoúhelníků. Teoreticky umíme řešit obecnou Apollóniovu úlohu, prakticky se prozatím soustředíme na úlohy, které jsou v určitém smyslu speciální (str. 56).

## Geometrická zobrazení (kap. III)

V této kapitole jsme diskutovali několik skupin geometrických zobrazení. Hlavní výklad se odvíjel podle osy

*shodná—podobná—afinní—projektivní*

(odst. 7.2—7.4—7.8—7.10). U každé skupiny jsme nejdříve zmínili několik konkrétních a většinou dobře známých příkladů, poté následovala obecná definice, příp. další obecné vlastnosti a aplikace. Mezi shodná a afinní zobrazení jsme ještě zařadili skupinu *ekviafinních* zobrazení (tj. takových afinních zobrazení, která zachovávají obsahy/objemy).

Obecná projektivní zobrazení jsou dobře definována pouze mezi *projektivními* prostory, které jsme poměrně volně vymezili jako eukleidovské prostory rozšířené o body „v nekonečnu“ (str. 78). Toto rozšíření s sebou přináší několik typických záludností které souvisí s uspořádáním bodů na přímce (např. projektivní přímka nerozděluje projektivní rovinu na dvě nespojitelné části).

Kromě toho jsme do výkladu začlenili ještě jeden odstavec o kruhové inverzi jakožto základním *konformním* zobrazení v rovině (odst. 7.6) a jeden odstavec o dilataci jakožto představiteli mnohem obecnější třídy *kontaktních* zobrazení (odst. 7.1). Smyslem těchto dvou odboček bylo doplnění diskuze o výše zmiňovaných dotykových úlohách.

Celková rekapitulace a hierarchie všech probíraných skupin zobrazení je v odst. 8.3.

### Vlastnosti

Zobrazení všeobecně rozdělujeme na

- *regulární* (injektivní, neboli prostá),
- *singulární* (neinjektivní).

Transformace nějakého prostoru je zobrazení tohoto prostoru do sebe. Regulární transformace eukleidovského prostoru rozlišujeme na

- *přímé* (zachovávají orientaci),
- *nepřímé* (mění orientaci).

Jakékoli shodné, podobné, či ekviafinní zobrazení je nutně regulární. Afinní a projektivní zobrazení mohou být jak regulární, tak singulární. Regulární afinní transformace je buď přímá, nebo nepřímá. Pro obecné projektivní transformace nemá toto dělení smysl.

Z obecných vlastností projektivních, resp. afinních/podobných/shodných zobrazení umíme vydedukovat několik důležitých vět o jejich určenosti (viz věty a poznámky na str. 84, resp. 76). Tyto postřehy současně představují výchozí poznatky pro následující kapitolu o zobrazovacích metodách! Přehled všech použitelných invariantů je uveden v tabulce na str. 88:

- pro obecné projektivní zobrazení to je pouze kolinearita a dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů;
- pro afinní zobrazení navíc poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů a (ekvivalentně) rovnoběžnost;



- pro podobná zobrazení navíc poměry vzdáleností jakýchkoli trojic bodů a (ekvivalentně) odchylky přímek;
- pro shodná zobrazení navíc vzdálenosti jakýchkoli dvojic bodů.

Základní konstrukční dovednosti tedy jsou: spojování dvojic bodů přímkami a přenášení dvojpoměrů; přenášení dělicích poměrů a konstrukce rovnoběžek; přenášení úhlů; přenášení úseček. Přenášení dělicích poměrů je odvozeno z věty VI.2 (str. 31), přenášení dvojpoměrů z věty Pappovy (str. 81); všechny ostatní konstrukce jsou elementární, resp. triviální.

### Základní zobrazení

Základní (regulární) projektivní transformace v rovině jsou takové, které mají *osu a střed*. Transformace může mít nejvýše jednu osu a nejvýše jeden střed; z Desarguesovy věty (str. 87) navíc plyne, že existence středu je ekvivalentní existenci osy. Nejzákladnější projektivní transformací v rovině je *osová kolineace*, ostatní dříve jmenované příklady (osová afinita, harmonická/sikmá/osová souměrnost, elace, stejnolehlost) chápeme jako její speciální případy (str. 86).

Základním singulárním projektivním zobrazením je *středové promítání*; speciálním (afinním) případem je rovnoběžné promítání (= středové promítání se středem v nekonečnu).

### Užitek

Na konci toho bloku si uvědomujeme, že umíme sestrojít obecný projektivní nebo afinní obraz např. pravidelného mnohoúhelníku, hranolu nebo jiného oblíbeného útvaru (str. 91). Konstrukce podobného či shodného obrazu mnohoúhelníku je jednoduchá, hranolu nebo jiného trojrozměrného objektu nemožná (zobrazení trojrozměrného prostoru do roviny je vždy singulární).

Současně si uvědomujeme, že průmět rozličných prostorových konfigurací je možné interpretovat jako základní transformace v rovině, což vždy podstatně zjednodušuje konstrukce (viz např. vztah mezi podstavou a řezem hranolu na str. 92)!

Pomocí kruhové inverze navíc umíme řešit mnohé předchozí dotykové úlohy alternativně a současně velmi elegantně (str. 89). Pomocí kruhové inverze a dilatace umíme řešit obecnou Apollóniovu úlohu (str. 139).

## Zobrazovací metody (kap. IV)

Celá tato kapitola je motivována touhou umět sestrojít dostatečně obecné (tj. dostatečně názorné) a korektní dvojrozměrné obrazy rozličných trojrozměrných objektů. Hlavním úkolem je porozumění a konstrukční ovládnutí korespondence mezi skutečnými vztahy různých objektů v prostoru (vzájemná poloha, vzdálenost apod.) a jejich obrazy, které jsou vždy nějak deformované. Zobrazovacími metodami se obvykle myslí metody ovládnutí této korespondence vzhledem ke zvolenému typu zobrazení.

Téměř výhradně uvažujeme zobrazení, při kterých se přímky zobrazují na přímky, resp. na body. To znamená, že se zabýváme singulárními projektivními zobrazeními, a to těmi základními. Podle způsobu promítání dělíme na:

- *středové promítání*,
- *rovnoběžné promítání*, které dále dělíme na  $\begin{cases} \text{šikmé,} \\ \text{kolmé.} \end{cases}$

Středové promítání je obecné projektivní zobrazení, rovnoběžné promítání je afinní. Jiné možné dělení je podle způsobu zadání:

- *volné promítání*,
- *vázané promítání*.

V prvním případě je promítání určeno volně, tj. obrazy několika málo bodů — tady nás nečeká nic nového (pokud jsme pochopili hlavní poselství kap. III). Ve druhém případě je promítání určeno přesným vymezením průmětny a středu/směru promítání vzhledem k zobrazovanému objektu, příp. k pomocné souřadné soustavě — tady jen předchozí konstrukce zefektivníme.

### Přehled

Uvažme pomocnou *kartézskou* souřadnou soustavu s osami  $x, y, z$ , vzhledem k níž budeme vše vztahovat. Bod v prostoru je jednoznačně určen souřadnicemi,  $A = (x_A, y_A, z_A)$ . Kolmý průmět bodu  $A$  do roviny určené osami  $x, y$  značíme  $A_1$  a nazýváme *půdorysem*,  $A_1 = (x_A, y_A)$ ; kolmý průmět do roviny  $x, z$  značíme  $A_2$  a nazýváme *nárysem*,  $A_2 = (x_A, z_A)$ . Místo analytického vyjádření pomocí souřadnic se užívá několik geometričtějších způsobů určení polohy bodu v prostoru. Bod  $A$  je jednoznačně určen

- půdorysem  $A_1$  a *kótou* (= souřadnicí  $z_A$ ),
- půdorysem  $A_1$  a *cyklem* (= kružnicí s poloměrem  $|z_A|$  a orientací podle znaménka  $z_A$ ),
- půdorysem  $A_1$  a nárysem  $A_2$ .

První způsob vyjadřování známe z map; odvozená zobrazovací metoda se nazývá *kótované promítání* (podkap. 13). Druhý způsob vyjadřování je poměrně neobvyklý, avšak má velmi sympatické aplikace (zejména u úloh s cykly/kružnicemi a jejich dotykem); odvozená zobrazovací metoda se nazývá *cyklografie* (podkap. 16).

Třetí způsob vyjadřování je naopak velmi běžný a lze se s ním setkat od dětských knížek po dospělácké technické výkresy. Vzhledem k tomu, že půdorys  $A_1$  a nárys  $A_2$  mají společnou první souřadnici, je možné oba průměty vzhledem k této souřadnici „sdružit“; odvozená zobrazovací metoda se nazývá *Mongeovo promítání* (podkap. 12). Tato zdánlivá drobnost má velice užitečné konstrukční důsledky, které jsme se učili rozvíjet. Zadání většiny úloh formulujeme právě pomocí Mongeových sdružených průmětů.

Dosud uvedené metody uvažují toliko kolmé průměty do rovin určených souřadnými osami. Zobrazovací metoda odvozená ze šikmého promítání do roviny  $x, z$  se nazývá *kosouhlé promítání* (odst. 14.3). Zobrazovací metody, které pracují s průmětnou v obecné poloze vzhledem k souřadným osám, jsou *axonometrie* (a to kolmá nebo šikmá, podkap. 14) a *lineární perspektiva* (tedy středové promítání, odst. 15.1).

### Volné promítání

Z obecných vlastností projektivních, resp. afinních zobrazení jsme již v kap. III vydedukovali několik tvrzení o jejich určenosti. Středové promítání je projektivní, takže:

- obecné středové promítání je určeno obrazy čtyř bodů v obecné poloze (např. počátku a jednotek na osách pomocné souřadné soustavy) a úběžníky tří odpovídajících přímek (souřadných os).

Rovnoběžné promítání je afinní, úběžníky jsou proto automaticky v nekonečnu, takže:

- rovnoběžné promítání je určeno obrazy čtyř bodů v obecné poloze (např. ...).

Konstrukce obrazu libovolného bodu v prostoru je založena na opakovaném — a tudíž otravném — přenášení dvojpoměrů, u rovnoběžného promítání dělicích poměrů a rovnoběžek.

Ne každé projektivní (resp. afinní) zobrazení je středové (resp. rovnoběžné) promítání, takže obrazy zmiňovaných několika bodů nemohou být úplně libovolné.<sup>7</sup> I přes tato omezení si lze představit situaci, kdy jsou naše konstrukční návyky nedostatečné (odst. 11.1).<sup>8</sup> V takovém případě nezbyvá než improvizovat, anebo se naučit něco nového, např. něco o vázaném promítání.

### Vázané promítání

Typická výchozí situace je taková, že jsou dány Mongeovy sdružené průměty nějakého objektu, středu (resp. směru) promítání a rovina (nejčastěji pomocí *stop*). Úkolem je sestrojít průmět daného objektu z daného středu (resp. v daném směru) do dané roviny.

Ve speciálních případech umíme průmět sestrojít velice rychle, např. když promítáme do některé z Mongeových pomocných průmětů (str. 119) nebo do roviny kolmé k některé z těchto rovin (str. 120). Obecné řešení sestává z několikerého opakování dvou kroků:

- určení průmětu bodu, tzn. průniku promítacího paprsku s danou rovinou,
- určení skutečných vzdáleností průmětu bodu od několika referenčních bodů/přímek v dané rovině.

Odtud je zřejmé, jaké jsou nezákladnější úlohy, které se v této kapitole máme naučit!

Podle předchozího pododstavce stačí k určení průmětu libovolného bodu v prostoru znát průměty počátku, jednotek, příp. úběžníků souřadných os. To říkáme proto, že je vhodné různé postupy kombinovat, ty stávající jsou však zpravidla efektivnější: dřívější opakované přenášení dvojpoměrů, resp. dělicích poměrů je nyní nahrazeno opakovaným přenášením vzdáleností.

Toto opakované určování a přenášení vzdáleností lze navíc realizovat naráz pomocí otočení dané roviny do některé z Mongeových pomocných průmětů (str. 109, 125): stačí změřit vzdálenost jednoho jediného bodu od stopy (= osy otáčení) a následně využít osovou afinitu, která mezi otočeným obrazem a odpovídajícím Mongeovým průmětem vládne.

Tatáž myšlenka, akorát realizovaná opačně, tzn. jako otočení Mongeovy pomocné průmětny do dané roviny, vede k tzv. *zářezové metodě* (str. 116, 175). To je nejefektivnější metoda konstrukce kolmého průmětu do obecné roviny, kterou jsme diskutovali.

### Základní úlohy

Nezákladnější konstrukční úlohy jsou dvě (až tři):

- průnik přímky a roviny,
- vzdálenost dvou bodů,
- kolmice z bodu k rovině.

Obecné řešení první úlohy se neobejde bez myšlenky pomocné roviny, která danou přímku obsahuje. Tuto úlohu umíme bez podstatného rozdílu řešit jak ve volném průmětu, tak pomocí Mongeových sdružených průmětů (str. 100, 103, 111, 117). Speciálním případem této úlohy je konstrukce *stopníků*. Příbuzné (polohové) úlohy jsou: vzájemná poloha přímky a roviny, průnik a vzájemná poloha dvou rovin, dvou přímek apod. (odst. 12.2).

<sup>7</sup>Např. není možné, aby se všechny tři jednotky na osách souřadné soustavy zobrazily do jednoho bodu.

<sup>8</sup>Např. když obrazy počátku a dvou jednotek na osách jsou kolineární.

Obecné řešení druhé úlohy umíme pohodlně realizovat pomocí Mongeových průmětů a spočívá v konstrukci přepony pravouhlého trojúhelníku, jehož dvě odvěsny čteme z odpovídajících sdružených průmětů (str. 109). Obecné řešení třetí úlohy pomocí Mongeových průmětů je triviální: sdružené průměty kolmice k rovině jsou kolmé ke stopám (str. 110). Příbuzné (měřičské) úlohy jsou: otočení roviny, vzdálenost bodu od přímky nebo roviny, odchylka dvou přímek apod. (odst. 12.4).

### **Užitek**

Na konci toho bloku umíme sestrojít obecný středový nebo rovnoběžný průmět např. pravidelného mnohoúhelníku, hranolu či jiného oblíbeného útvaru, a to hned několika různými způsoby (odst. 17.3). Aby průmět tělesa působil víc plasticky, umíme jej vystínovat vzhledem ke zvolenému zdroji osvětlení. Pro dané těleso a danou rovinou umíme sestrojít průmět odpovídajícího řezu (odst. 17.2).

Současně si uvědomujeme, že pomocí Mongeových sdružených průmětů umíme realizovat jakákoli dodatečná — a dříve problematická měření — velice jednoduše. Např. umíme zobrazit řez tělesa ve skutečné velikosti, příp. (abychom si připomněli také něco ze začátku semestru) sestrojít čtverec, který má stejný obsah jako mnohoúhelník onoho řezu.

Přestože jsme se o zobrazování oblých těles zmínili jen velmi povrchně, velmi snadno umíme odhalit velmi časté neduhy při jejich zobrazování (str. 132).

---

## Literatura

---

- [A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999
- [Be] M. Berger, *Geometry I, II*, Springer, 1987
- [Br] M. Brauner, *Planimetrické úlohy řešené prostorově* (diplomová práce), Brno, 2009
- [DV] L. Drs, J. Všecká, *Objektivem počítače: geometrie speciálních fotografických technik*, SNTL, 1981
- [D] T. Dvořáková, *Přínos Jánoše Bolyaie k základům neeuklidovské geometrie* (bakalářská práce), Praha, 2012
- [E] Eukleidés, *Základy*, Alexandrie, –300  
(pro konkrétní citovaná vydání viz [E<sub>J</sub>, E<sub>B</sub>, E<sub>V</sub>, HTD] a [Š] níže)
- [Ha] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- [Ha<sub>2</sub>] R. Hartshorne, *Teaching geometry according to Euclid*, Notices of AMS, 2000,  
[www.ams.org/notices/200004/fea-hartshorne.pdf](http://www.ams.org/notices/200004/fea-hartshorne.pdf)
- [Hi] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1902,  
[www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf](http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf)
- [Ho] J. Holubář, *O methodách rovinných konstrukcí: Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné*, JČMF, 1949
- [KKK] F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský, *Dekriptivní geometrie I*, JČMF, 1950
- [Ka] F. Kadeřávek, *Geometrie a umění v dobách minulých*, Praha, 1935
- [Ko] A. Kolman, *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, 1968
- [KV] J. Kounovský, F. Vyčichlo, *Deskriptivní geometrie pro samouky*, ČSAV, 1953
- [Ku] F. Kuřina, *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002
- [Ku<sub>2</sub>] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996

- [Ku<sub>3</sub>] F. Kuřina, *Umění vidět v matematice*, SPN, 1990
- [Kut] B.V. Kutuzov, *Lobačevského geometrie ...*, ČSAV, 1953
- [L] M. Lávička, *Syntetická geometrie*, Plzeň, 2007,  
[http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/SG/texty/sg\\_text.pdf](http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/SG/texty/sg_text.pdf)
- [Mach] F. Machala, *Plochy technické praxe*, Olomouc, 1986
- [Mar] G.E. Martin, *Transformation geometry*, Springer, 1982
- [Mar<sub>2</sub>] G.E. Martin, *Geometric constructions*, Springer, 1998
- [Me] V. Medek, *Deskriptivna geometria*, SNTL, 1962
- [Pe] J.I. Perelman, *Zajímavá geometrie*, Mladá Fronta, 1954
- [Pr] R. Pruner, *Prostorově viděné modely (anaglyfy) pro vyučování geometrie na hlavních a nižších středních školách*, Praha, 1943
- [Ř] O. Říha, *Konstrukční geometrie I, II*, Brno, 2002
- [Ř<sub>2</sub>] O. Říha, *Kruhová inverze*, Brno, 2010
- [Sei] L. Seifert, *Cyklografie*, JČMF, 1949
- [Sek] M. Sekanina a kol., *Geometrie I, II*, SPN, 1986
- [SMS] E. Simeonov, D. Mairinger, Ch. Schmid, *Mathematische Früherziehung, Lagen & Winkel*, von Oemis, 2010
- [G9] J. Šimek, J. Schejbal, F. Procházka, *Geometrie pro devátý ročník*, SPN, 1975
- [St] J. Stillwell, *The four pillars of Geometry*, Springer, 2005
- [U] A. Urban, *Deskriptivní geometrie I, II*, SNTL, 1965

\* \* \*

- [E<sub>B</sub>] *The Elements of Euclid*, atraktivní vydání prvních 6 knih od O. Byrneho (1847),  
[www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html](http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html)
- [E<sub>J</sub>] *Euclid's Elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T.L. Heatha (1908–28),  
[aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html](http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html)
- [E<sub>V</sub>] *Eukleidés, Základy, Knihy I–XII*, české vydání prvních 12 knih, jež zpracoval a komentářem opatřil P. Vopěnka podle překladu F. Servita (1907), O.P.S., 2008–12
- [HTD] *The thirteen books of Euclid's Elements, The works of Archimedes including The method, Conics by Apollonius of Perga, Introduction to Arithmetics by Nicomachus of Gerasa*, překlady klasických prací od T.L. Heatha, R. Catesby Taliaferra a M.L. D'Ooge, Encyclopaedia Britannica, 1952
- [Š] *Řecké matematické texty*, české překlady R. Maška a A. Šmída vybraných textů s bohatými poznámkami a komentáři od Z. Šíra, OIKOYMENH, 2011

---

\* \* \*

- [I] Internet:  
[http://is.muni.cz/el/1441/jaro2016/MA2BP\\_PKG/um/](http://is.muni.cz/el/1441/jaro2016/MA2BP_PKG/um/)  
<http://www.mathatube.com/geometry-geometry-solids.html>,  
<http://missmcdonaldart.blogspot.cz/2013/02/2713day-1-through-21413-day-5-belowyou.html>,





- úběžník, 78, 84
- úběžnice, 84
- řez
  - dvacetistěnem, 43
  - zlatý, 19
- Apollónios, 45, 55, 66, 71, 89, 138, 142
- Archimédés, 40, 56, 135, 137, 161
- Bolyai, F., 17
- Bolyai, J., 6
- chordála, 25
- Dandelin, G.P., 143
- Dedekind, J.W.R., 10, 31
- Dehn, M., 39
- Desargues, G., 87
- Descartes, R., 6
- dilatace, 46, 59
- doplnění do čtverce, 19
- elace
  - projektivní, 82
- elipsa, 141
- Eudoxos, 38, 39
- Eukleidés, 5, 9, 14, 16
- Fermat, P., 136
- Gauss, C.F., 6, 135
- geometrie
  - eukleidovská, 9
- Gergonne, J.D., 139
- Gerwien, P., 17
- Hilbert, D., 5, 10
- Hippokratés z Chiu, 133
- incidence, 10
- Klein, F., 7
- Komenský, J.A., 1
- konstrukce
  - eukleidovská, 10
  - mascheroniovská, 136
  - neusis, 137
  - steinerovská, 136
- kosinová věta, 21
- kruhová inverze, 67
- kvadratura
  - kruhu, 135
  - mnohoúhelníku, 15
  - paraboly, 135
- Lambert, 135
- Lindemann, F., 135
- Lobačevský, N.I., 6
- Mascheroni, L., 136
- mocnost, 25
- Monge, G., 66, 100
- příčka, 106
- přímka
  - hlavní, 106
  - krycí, 103
  - projektivní, 79
  - spádová, 106
- Pappos, 45, 52, 81
- Petersen, J., 45
- Platón, 40
- podobnost, 30, 63

- Pohlke, K., 97
- poměr
- dělicí, 71
  - dvoj-, 78
  - harmonický, 78
  - veličin, 31
- postulát
- pátý, dodatečný, o rovnoběžkách, 10, 12
- pravidelný
- $n$ -úhelník, 135
  - desetiúhelník, 29
  - dvacetistěn, 41
  - dvanáctistěn, 129
  - pětiúhelník, 27–30, 137
  - sedmnáctiúhelník, 136
- projektivní
- rozšíření, 78
- Ptolemaios, 133
- Pythagoras, 14, 54
- Quetelet, A., 143
- Riemann, B., 7
- Schwarz, H.A., 97
- shodnost, 10, 61
- souměrnost
- šikmá, 74, 87
  - harmonická, 82, 87
  - osová, 62, 87
  - posunutá, 62
  - středová, 62
- spojitost, 10
- střed
- potenční, 26
- Steiner, J., 136
- stejnolehlost, 63
- trúba
- štramberská, 107
- transformace
- přímá/nepřímá, 62
- uspořádání, 10
- Viète, F., 45
- Wallace, W., 17
- Wantzel, P.L., 135
- Základy, 9

Přikládáme několik příloh:

- (1) nejprve část časové osy z helénistického období podle B. Artmanna [A];
- (2) od str. 165 přehled nejcitovanějších tvrzení ze všech geometrických knih [E]; výběr a zpracování je zásluhou R. Hartshorna [Ha, str. 481–486];
- (3) na str. 171 stručný přehled Hilbertovy axiomatiky [Hi]; převzato z učebního materiálu od neznámého autora;
- (4) na str. 172 věta I.29 v Byrnově vydání Základů [E<sub>B</sub>];
- (5) na str. 173 přehled Archimédových polopravidelných mnohostěnů [Ko];
- (6) na str. 174 přehled Keplerových pravidelných nekonvexních mnohostěnů [Be];
- (7) na str. 175 kolmý axonometrický průmět strojní součástky sestrojený zářezovou metodou [U];
- (8) na str. 176 průmět nějakého portálu ve dvojúběžníkové perspektivě;
- (9) na str. 177 příklad cylindrické perspektivy — panoramatický snímek Lorety na Hradčanech [DV];

TIME TABLE (all dates are B.C.E.)		
General history, related to mathematics		Mathematics
900-600 Geometric period of Greek art		
Money is invented (first coins)	600	Thales of Miletus ( $\approx 580$ )  Pythagoras ( $\approx 570-490$ )
Persian Wars ( $\approx 500-480$ )  $\approx 460$ Temple of Zeus in Olympia, Proportions 2 : 1  $\approx 450-430$ Pericles, "high classics"  $\approx 440$ Parthenon temple in Athens, proportions 9 : 4 = length : breadth = breadth : height  Socrates $\approx 470-399$  Plato 428-348  Aristotle 384-322        Alexander the Great 356-323	500          450           400           350           300	Pythagoreans in southern Italy           Hippocrates of Chios writes first <i>Elements</i> $\approx 430$           Theodorus of Cyrene $\approx 460-390$           Theaetetus $\approx 415-370$ Leon writes new <i>Elements</i> in Plato's Academy           Eudoxus $\approx 410-355$           Various other writers of mathematical treatises, e.g., Menaechmus: <i>Conics</i>           Euclid: <i>Elements</i>
Alexandria is the cultural center of the Hellenistic world 300-50	250	Apollonius of Perga, Archimedes of Syracuse

# Appendix: Brief Euclid

For reference we include abbreviated statements of the most frequently quoted results from Euclid's *Elements*.

## **Book I. Definitions**

1. A *point* is that which has no part.
2. A *line* is length without breadth.
4. A *straight line* lies evenly with its points.
8. A *plane angle* is the inclination of two lines.
10. When the two adjacent angles are equal it is a *right angle*.
15. A *circle* is a line all of whose points are equidistant from one point.
20. A triangle with two equal sides is *isosceles*.
23. *Parallel* straight lines are lines in the same plane that do not meet, no matter how far extended in either direction.

## **Postulates**

1. To draw a line through two points.
2. To extend a given line.
3. To draw a circle with given center through a given point.
4. All right angles are equal.
5. If a line crossing two other lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, then these two lines will meet on that side when extended far enough.

## **Common Notions**

1. Things equal to the same thing are equal.
2. Equals added to equals are equal.

3. Equals subtracted from equals are equal.
4. Things which coincide are equal.
5. The whole is greater than the part.

**Propositions**

1. To construct an equilateral triangle on a given segment.
2. To draw a segment equal to a given segment at a given point.
3. To cut off a smaller segment from a larger segment.
4. Side–angle–side (SAS) congruence for triangles.
5. The base angles of an isosceles triangle are equal.
6. If the base angles are equal, the triangle is isosceles.
7. It is not possible to put two triangles with equal sides on the same side of a segment.
8. Side–side–side (SSS) congruence for triangles.
9. To bisect an angle.
10. To bisect a segment.
11. To construct a perpendicular to a line at a given point on the line.
12. To drop a perpendicular from a point to a line not containing the point.
13. A line standing on another line makes angles equal to two right angles.
15. Vertical angles are equal.
16. The exterior angle of a triangle is greater than either opposite interior angle.
17. Any two angles of a triangle are less than two right angles.
18. If one side of a triangle is greater than another, then the angle opposite it is greater than the other.
19. If one angle of a triangle is greater than another, then the side opposite it is greater than the other.
20. Any two sides of any triangle are greater than the third.
22. To construct a triangle, given three sides, provided any two are greater than the third.
23. To reproduce a given angle at a given point and side.
24. Two sides equal but included angle greater of two triangles implies base greater.
25. Two sides equal and greater base implies greater angle.
26. Angle–side–angle (ASA) and angle–angle–side (AAS) congruence for triangles.
27. Alternate interior angles equal implies parallel lines.
28. Exterior angle equal to opposite interior, or two interior angles equal to two right angles, implies parallel lines.
29. A line crossing two parallel lines makes alternate interior angles equal.
30. Lines parallel to the same line are parallel.
31. To draw a line parallel to a given line through a given point.
32. Sum of angles of a triangle is two right angles, and exterior angle equals the sum of opposite interior angles.

33. Lines joining endpoints of equal parallel lines are equal and parallel.
34. The opposite sides and angles of a parallelogram are equal.
35. Parallelograms on the same base and in the same parallels are equal.
36. Parallelograms on equal bases in the same parallels are equal.
37. Triangles on the same base in the same parallels are equal.
38. Triangles on equal bases in the same parallels are equal.
39. Equal triangles on the same base on the same side are in the same parallels.
40. Equal triangles on equal bases on the same side are in the same parallels.
41. A parallelogram is twice the triangle on the same base in the same parallels.
42. To construct a parallelogram with a given angle equal to a given triangle.
43. Parallelograms on opposite sides of the diagonal of a parallelogram are equal.
44. To construct a parallelogram with given side and angle equal to a given triangle.
45. To construct a parallelogram with a given angle equal to a given figure.
46. To construct a square on a given segment.
47. (Theorem of Pythagoras) The square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the sides of a right triangle.
48. If the sum of the squares on two sides equals the square on the third side, the triangle is right.

**Book II. Propositions**

1. The rectangle contained by two lines is the sum of the rectangles contained by one and the segments of the other.
4. The square on the whole line is equal to the squares on its two segments plus twice the rectangle on the two segments.
5. The square on half a line is equal to the rectangle on the unequal segments plus the square of the difference.
6. The rectangle on a line plus an added piece with the added piece, plus the square of half the segment, is equal to the square of the half plus the added piece.
11. To cut a line so that the rectangle on the whole and one segment is equal to the square on the other segment (extreme and mean ratio).
14. To construct a square equal to a given figure.

**Book III. Propositions**

1. To find the center of a circle.
2. The segment joining two points of a circle lies inside the circle.
5. If two circles intersect, they do not have the same center.
6. If two circles are tangent, they do not have the same center.
10. Two circles can intersect in at most two points.
- 11, 12. If two circles are tangent, their centers lie in a line with the point of tangency.
16. The line perpendicular to a diameter at its end is tangent to the circle, and

the angle between the tangent line and the circle is less than any rectilinear angle.

17. To draw a tangent to a circle from a point outside the circle.
18. A tangent line to a circle is perpendicular to the radius at the point of tangency.
19. The perpendicular to a tangent line at the point of tangency will pass through the center of the circle.
20. The angle at the center is twice the angle at a point of the circumference subtending a given arc of a circle.
21. Two angles from points of a circle subtending the same arc are equal.
22. The opposite angles of a quadrilateral in a circle are equal to two right angles.
31. The angle in a semicircle is a right angle.
32. The angle between a tangent line and a chord of a circle is equal to the angle on the arc cut off.
35. If two chords cut each other, the rectangle on the segments of one chord is equal to the rectangle on the segments of the other chord.
36. From a point outside a circle, let a tangent and a secant line be drawn. Then the square of the tangent line is equal to the rectangle formed by the two segments from the point to the circle on the secant line.
37. From a point outside a circle, if two lines cut the circle, so that the square of one is equal to the rectangle formed by the segments of the other, then the first is a tangent line.

#### **Book IV. Propositions**

1. To inscribe a given segment in a circle.
2. To inscribe a triangle, equiangular to a given triangle, in a circle.
3. To circumscribe a triangle, equiangular to a given triangle, around a circle.
4. To inscribe a circle in a triangle.
5. To circumscribe a circle around a triangle.
10. To construct an isosceles triangle whose base angles are twice the vertex angle.
11. To inscribe a regular pentagon in a circle.
12. To circumscribe a regular pentagon around a circle.
15. To inscribe a regular hexagon in a circle.
16. To inscribe a regular 15-sided polygon in a circle.

#### **Book V. Definitions**

4. Magnitudes are said to *have a ratio* if either one, being multiplied, can exceed the other.
5. Four magnitudes  $a, b; c, d$  are *in the same ratio* if for any whole numbers  $m, n$ , we have  $ma > nb$  or  $ma = nb$  or  $ma < nb$  if and only if  $mc > nd$  or  $mc = nd$  or  $mc < nd$  respectively.



**Book VI. Propositions**

1. Triangles of the same height are in the same ratio as their bases.
2. A line is parallel to the base of a triangle if and only if it cuts the sides proportionately.
3. A line from a vertex of a triangle to the opposite side bisects the angle if and only if it cuts the opposite side in proportion to the remaining sides of the triangle.
4. The sides of equiangular triangles are proportional.
5. If the sides of two triangles are proportional, their angles are equal.
6. If two triangles have one angle equal and the sides containing the angle proportional, the triangles will be similar.
8. The altitude from the right angle of a right triangle divides the triangle into two triangles similar to each other and to the whole.
12. To find a fourth proportional to three given lines.
13. To find a mean proportional between two given lines.
16. Four lines are proportional if and only if the rectangle on the extremes is equal to the rectangle on the means.
30. To cut a line in extreme and mean ratio.
31. Any figure on the hypotenuse of a right triangle is equal to the sum of similar figures on the sides of the triangle.

**Book X. Propositions**

1. Given two unequal quantities, if one subtracts from the greater a quantity greater than its half, and repeats this process enough times, there will remain a quantity lesser than the smaller of the two original quantities.
117. (not in Heath, but in Commandino). The diagonal of a square is incommensurable with its side.

**Book XI. Definitions**

25. A *cube* is a polyhedron made of six equal squares.
26. An *octahedron* is a polyhedron made of eight equal equilateral triangles.
27. An *icosahedron* is a polyhedron made by twenty equal equilateral triangles.
28. A *dodecahedron* is a polyhedron made by twelve equal regular pentagons.

**Propositions**

21. The plane angles in a solid angle make less than four right angles.
28. A parallelepiped is bisected by its diagonal plane.
- 29, 30. Parallelepipeds on the same base and of the same height are equal.
31. Parallelepipeds on equal bases, of the same height, are equal.

**Book XII. Propositions**

2. Circles are in the same ratio as the squares of their diameters.
3. A pyramid is divided into two pyramids and two prisms.

5. Pyramids of the same height on triangular bases are in the same ratio as their bases.
7. A prism with a triangular base is divided into three equal triangular pyramids.

**Book XIII. Propositions**

7. If at least three angles of an equilateral pentagon are equal, the pentagon will be regular.
10. In a circle, the square on the side of the inscribed pentagon is equal to the square on the side of the inscribed hexagon plus the square on the side of the inscribed decagon.
13. To inscribe a tetrahedron in a sphere.
14. To inscribe an octahedron in a sphere.
15. To inscribe a cube in a sphere.
16. To inscribe an icosahedron in a sphere.
17. To inscribe a dodecahedron in a sphere.
18. (Postscript). Besides these five figures there is no other contained by equal regular polygons.

## Hilbert's Axioms for Plane Geometry

Undefined terms: Point, line, plane, between, congruence.

### Connection (Incidence)

- I-1. Through any two distinct points  $A, B$  there is always a line  $m$ .
- I-2. Through any two distinct points  $A, B$  there is not more than one line  $m$ .
- I-3. On every line there exist at least two distinct points. There exist at least three points which are not on the same line.
- I-4. Through any three points, not on the same line, there is one and only one plane.

### Order

- II-1. If point  $B$  is between points  $A$  and  $C$ , then  $A, B, C$  are distinct points on the same line, and  $B$  is between  $C$  and  $A$ .
- II-2. For any two distinct points  $A$  and  $C$ , there is at least one point  $B$  on the line  $AC$  such that  $C$  is between  $A$  and  $B$ .
- II-3. If  $A, B, C$  are three distinct points on the same line, then only one of the points is between the other two.

**Definition** By the *segment*  $AB$  is meant the set of all points which are between  $A$  and  $B$ . Points  $A$  and  $B$  are called the *endpoints* of the segment. The segment  $AB$  is the same as the segment  $BA$ .

II-4. (Pasch's Axiom) Let  $A, B, C$  be three points not all on the same line and let  $m$  be a line in the plane  $A, B, C$  which does not pass through any of the points  $A, B, C$ . Then if  $m$  passes through a point of the segment  $AB$ , it will also pass through a point of segment  $AC$  or a point of segment  $BC$ .

**Note:** II-4'. This postulate may be replaced by the *separation axiom*. A line  $m$  separates the points of the plane which are not on  $m$ , into two sets such that if two points  $X$  and  $Y$  are in the same set, the segment  $XY$  does not intersect  $m$ , and if  $X$  and  $Y$  are in different sets, the segment  $XY$  does intersect  $m$ . In the first case  $X$  and  $Y$  are said to be on the *same side* of  $m$ ; in the second case,  $X$  and  $Y$  are said to be on *opposite sides* of  $m$ .

**Definition** By the *ray*  $AB$  is meant the set of all points consisting of those which are between  $A$  and  $B$ , the point  $B$  itself, and all the points  $C$  such that  $B$  is between  $A$  and  $C$ . The ray  $AB$  is said to *emanate from* the point  $A$ .

A point on a given line  $m$ , divides  $m$  into two rays such that two points are on the same ray if and only if  $A$  is not between them.

**Definition** If  $A, B$  and  $C$  are three points not on the same line, then the system of three segments  $AB, BC, CA$ , and their endpoints is called the *triangle*  $ABC$ . The three segments are called the *sides* of the triangle, and the three points are called the *vertices*.

### Congruence

III-1. If  $A$  and  $B$  are distinct points on line  $m$  and if  $A'$  is a point on line  $m'$  (not necessarily distinct from  $m$ ), there is one and only one point  $B'$  on each ray of  $m'$  emanating from  $A'$  such that the segment  $A'B'$  is congruent to the segment  $AB$ .

III-2. If two segments are each congruent to a third, then they are congruent to each other. (From this it can be shown that congruence of segments is an equivalence relation; i.e.,  $AB \equiv AB$ ; if  $AB \equiv A'B'$ , then  $A'B' \equiv AB$ ; and if  $AB \equiv CD$  and  $CD \equiv EF$ , then  $AB \equiv EF$ .)

III-3. If point  $C$  is between  $A$  and  $B$ , and  $C'$  is between  $A'$  and  $B'$ , and if the segment  $AC \equiv A'C'$  and the segment  $CB \equiv C'B'$ , then segment  $AB \equiv$  segment  $A'B'$ .

**Definition** By an *angle* is meant a point (called the *vertex* of the angle) and two rays (called the *sides* of the angle) emanating from a point.

If the vertex of the angle is point  $A$  and if  $B$  and  $C$  are any two points other than  $A$  on the two sides of the angle, we speak of the angle  $BAC$  or  $CAB$  or simply the angle  $A$ .

III-4. If  $BAC$  is an angle whose sides do not lie on the same line and if in a given plane,  $A'B'$  is a ray emanating from  $A'$ , then there is one and only one ray  $A'C'$  on a given side of line  $A'B'$ , such that  $\angle B'A'C' \equiv \angle BAC$ . In short, a given angle in a given plane can be laid off on a given side of a given ray in one and only one way. Every angle is congruent to itself.

**Definition** If  $ABC$  is a triangle then the three angles  $BAC, CBA,$  and  $ACB$  are called the angles of the triangle. Angle  $BAC$  is said to be *included* by the sides  $AB$  and  $AC$ .

III-5. If two sides and the included angle of one triangle are congruent, respectively, to two sides and the included angle of another triangle, then each of the remaining angles of the first triangle is congruent to the corresponding angle of the second triangle.

### Parallel axiom

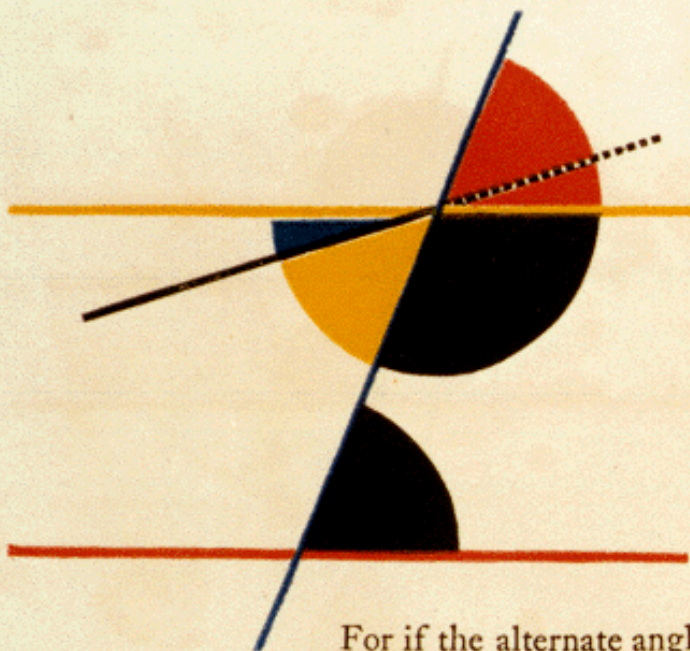
IV-1. (Playfair's postulate) Through a given point  $A$  not on a given line  $m$  there passes at most one line, which does not intersect  $m$ .

### Continuity





V-1. (Axiom of Measure—Archimedes axiom) If  $AB$  and  $CD$  are arbitrary segments, then there exists a number  $n$  such that if segment  $CD$  is laid off  $n$  times on the ray  $AB$  starting from  $A$ , then a point  $E$  is reached, where  $n \cdot CD = AE$ , and where  $B$  is between  $A$  and  $E$ .

V-2. (Axiom of linear completeness) the system of points on a line with its order and congruence relations cannot be extended in such a way that the relations existing among its elements as well as the basic properties of linear order and congruence resulting from Axioms I-III and V-1 remain valid.





**Note:** V'. These axioms may be replaced by *Dedekind's axiom of continuity*. For every partition of the points on a line into two nonempty sets such that no point of either lies between two points of the other, there is a point of one set which lies between every other point of that set and every point of the other set.






STRAIGHT line (—) falling on two parallel straight lines (— and —), makes the alternate angles equal to one another; and also the external equal to the internal and opposite angle on the same side; and the two internal angles on the same side together equal to two right angles.

For if the alternate angles  and  be not equal, draw —, making  =  (pr. 23).

Therefore —..... || — (pr. 27.) and therefore two straight lines which intersect are parallel to the same straight line, which is impossible (ax. 12).


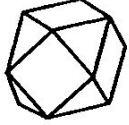
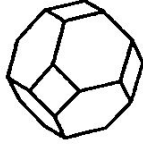
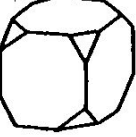
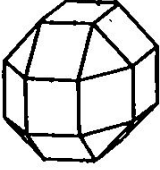

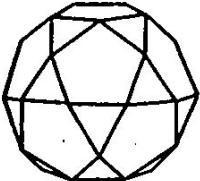
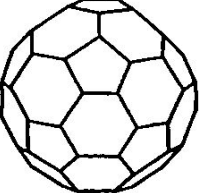
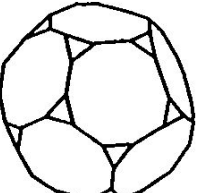
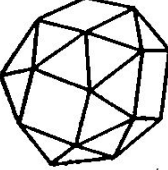
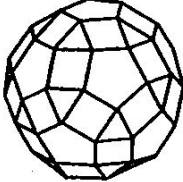
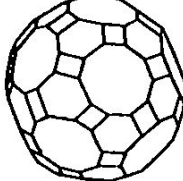
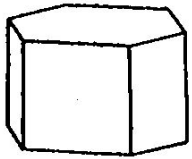
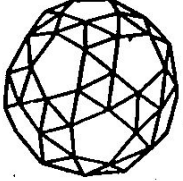
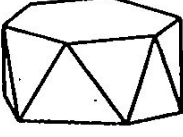
Hence the alternate angles  and  are not unequal, that is, they are equal:  =  (pr. 15);

∴  = , the external angle equal to the internal and opposite on the same side: if  be added to

both, then  +  =  =  (pr. 13).

That is to say, the two internal angles at the same side of the cutting line are equal to two right angles.

Q. E. D.

<p style="text-align: right;"><math>4_3b</math></p>  <p><math>v=12, h=18, s=8</math> (<math>4_3, 4_6</math>)</p>	<p style="text-align: right;"><math>6_4a, 8_3a</math></p>  <p><math>v=12, h=24, s=14</math> (<math>8_3, 6_4</math>)</p>	<p style="text-align: right;"><math>8_3b</math></p>  <p><math>v=24, h=36, s=14</math> (<math>6_4, 8_6</math>)</p>
<p style="text-align: right;"><math>6_4b</math></p>  <p><math>v=24, h=36, s=14</math> (<math>8_3, 6_6</math>)</p>	<p style="text-align: right;"><math>6_4c</math></p>  <p><math>v=32, h=56, s=26</math> (<math>8_3, 18_4</math>)</p>	<p style="text-align: right;"><math>6_4c</math></p>  <p><math>v=48, h=72, s=26</math> (<math>12_4, 8_6, 6_8</math>)</p>
<p style="text-align: right;"><math>12_5a, 20_3a</math></p>  <p><math>v=30, h=60, s=32</math> (<math>20_3, 12_5</math>)</p>	<p style="text-align: right;"><math>20_3b</math></p>  <p><math>v=60, h=90, s=32</math> (<math>12_5, 20_6</math>)</p>	<p style="text-align: right;"><math>12_5b</math></p>  <p><math>v=60, h=90, s=32</math> (<math>20_3, 12_{10}</math>)</p>
<p style="text-align: right;"><math>6_4d</math></p>  <p><math>v=24, h=60, s=38</math> (<math>32_3, 6_4</math>)</p>	<p style="text-align: right;"><math>12_5c</math></p>  <p><math>v=60, h=120, s=62</math> (<math>20_3, 30_4, 12_5</math>)</p>	<p style="text-align: right;"><math>12_3c</math></p>  <p><math>v=120, h=180, s=62</math> (<math>30_4, 20_6, 12_{10}</math>)</p>
 <p><math>v=12, h=18, s=8</math> (<math>6_4, 2_6</math>)</p>	<p style="text-align: right;"><math>20_3d</math></p>  <p><math>v=60, h=150, s=92</math> (<math>80_3, 12_5</math>)</p>	 <p><math>v=12, h=24, s=14</math> (<math>12_3, 2_8</math>)</p>

