FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

MATEMATIKA 3
(ZKRÁCENÁ CELOOBRAZOVKOVÁ VERZE UČEBNÍHO TEXTU)

Autoři textu:
Mgr. Irena Hlavičková, Ph.D.
RNDr. Michal Novák, Ph.D.

Květen 2014

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematika 3
(zkrácená celoobrazovková verze učebního textu)

I. Hlavičková, M. Novák

Ústav matematiky FEKT VUT
hlavicka@feec.vutbr.cz novakm@feec.vutbr.cz

(2014)

Úvod

Učební text, který nyní začínáte studovat, slouží pro prvotní seznámení s předmětem *Matematika 3*. Po jeho prostudování byste měli mít v hrubých rysech představu o tom, jaká témata a problémy jsou v předmětu studovány, proč se jimi zabýváme a jakým způsobem k jejich řešení přistupujeme. Tento text nenahrazuje doporučenou literaturu k předmětu. Mnohé matematické pojmy studované v předmětu *Matematika 3* jsou zde jen naznačeny, mnohé nejsou ilustrovány příklady. Některé z příkladů jsou uvedeny jen ve formě zadání bez řešení. Naší motivací bylo poskytnout učební pomůcku zejména studentům, kteří nechtějí nebo nemohou navštěvovat přímou výuku, resp. těm, kteří v plné verzi učebního textu s obtížemi hledají „to podstatné“. Zde mohou „to podstatné“ nalézt ve zhuštěné formě – ovšem pak se musejí obrátit k plné verzi učebního textu, protože tento text nemůže a ani nechce sloužit jako jediný zdroj informací o předmětu. Na to je příliš stručný a heslovitý.

Úvod

Tento učební text *není* zkrácenou verzí učebního textu *B. Fajmon, I. Hlavičková, M. Novák, Matematika 3* z roku 2013. Je jím inspirován, používá jeho terminologii, v zásadě dodržuje jeho strukturu výkladu, ale vzhledem k omezenému prostoru a jinému účelu je nutné jej chápat jako zcela odlišný text.

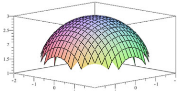
Doplňkové elektronické zdroje

Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.

Doplňkové elektronické zdroje

Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na spustitelné soubory připravené v prostředí MATLAB. Před spuštěním těchto souborů je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks.

Doplňkové elektronické zdroje



Součástí tohoto učebního textu jsou animace, resp. prvky 3D grafiky. Pro korektní zobrazení těchto multimediálních prvků a práci s nimi je nutné správně nastavit zabezpečení prohlížeče PDF souborů, a to zejména na záložkách typu *3D a multimédia*, *Důvěryhodnost multimedií (starší)*, *Multimédia (starší)*. Vlastnosti zobrazení těchto prvků lze ovlivnit pomocí položek jejich kontextového menu, příp. pomocí práce s myší nebo jiným polohovacím zařízením.

Úvod do numerických metod

Matematika 3

Obsah

Numerická matematika

Numerická matematika je praktický nástroj pro řešení problémů inženýrské praxe.

Numerická matematika

Example

Integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x$ vypočteme pomocí primitivní funkce.

Dostáváme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$. Integrál $\int_a^b e^{-x^2} \mathrm{d}x$ pomocí primitivní funkce vypočítat nelze (*zkuste si sami v Maple*).

Co budeme dělat v situaci, kdy je požadavkem určit $\int_3^5 e^{-x^2} \mathrm{d}x$?

Numerická matematika

Example

Najděte řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}
0,1x_1 + 150x_2 - 25,4x_3 + x_4 &= 125,7 \\
23x_1 - 0,5x_2 + 22,5x_3 &= 45 \\
1500x_1 - 0,8x_2 + 2,9x_3 + 12x_4 &= 1514,1 \\
9,2x_1 + 12,3x_2 - 5,3x_3 - 0,2x_4 &= 16
\end{aligned}$$

Víme, že použití Gaussovy eliminace i Cramerova pravidla je v tomto případě náročné. Co budeme dělat v situaci, kdy budeme mít soustavu 100×100 s podobnými koeficienty?

Numerická matematika

Example

Je dána funkce $f(x)$, na níž leží body $[2; 4], [3,5; 7], [4,9; 8.2], [5,7; 6,9]$. Více o této funkci nevíme. Určete $\int_4^5 f(x)\mathrm{d}x$ a zjistěte, zda v bodě $x = 4,7$ funkce $f(x)$ roste nebo klesá.

???

Analytické vs. numerické řešení

Přesné řešení získané pomocí postupů, které jste dosud poznali (řešení rovnic, derivování, integrování pomocí primitivní funkce apod.) se nazývá *analytické*, resp. *klasické*.

Matematické úlohy lze řešit i jinak – pomocí různých *numerických metod*. Tak lze vyřešit i „neřešitelné“ úlohy.

Výsledek získaný numericky není přesný ale pouze přibližný.

Obsah

Typy úloh v INM

V INM se budeme numericky řešit následující typy úloh:

- Nalezněte řešení soustav lineárních rovnic.
- Nalezněte řešení nelineárních rovnic (jedné rovnice i soustav).
- Najděte přibližné vyjádření funkce (buď danou funkci nahraďte jinou, jednodušší, nebo danými body proložte vhodnou funkci).
- Zderivujte funkci zadanou body, které na ní leží (funkční předpis není známý).
- Vypočtěte určitý integrál z funkce (např. viz $y = e^{x^2}$).
- Najděte řešení diferenciální rovnice (prozatím neznámý pojem).

Obsah

Numerické řešení úloh

Je dán reálný technický problém.

1. Problém vyjádříme v řeči matematiky.
2. Rozhodneme, zda matematickou úlohu budeme řešit analyticky nebo numericky (často si lze vybrat).
3. Zvolíme vhodný způsob řešení, tj. numerickou metodu.
4. Zapíšeme matematickou úlohu do řeči zvolené numerické metody, tj. *algoritmu*.
5. Algoritmus probíhá, ve vhodnou chvíli jej ukončíme.
6. Se znalostí reálného problému vhodně interpretujeme získané výsledky.

V INM budeme dělat kroky 3, 4, 5 a částečně 6. Řešit úlohu numericky znamená více než jen provést krok 5!

Problém

V každém z výše uvedených kroků se dopouštíme nepřesností.

Typy chyb

1. Problém nikdy nevyjádříme v řeči matematiky přesně (platí i pro interpretaci výsledků).
2. Numerický způsob řešení je lákavější (protože algoritmizovatelný a méně pracný), ale nemusí být vhodnější.
3. I sebevhodnější numerická metoda je nepřesným zápisem nepřesně zapsaného reálného problému.
4. Nepřesný zápis konstant a dalších údajů.
5. V algoritmu se nutně dopouštíme celé řady zaokrouhlovacích chyb, o okamžiku ukončení algoritmu rozhodujeme my.
6. Problém stability úlohy a algoritmu.

Problém

Chyby se mohou kumulovat nebo vyrušit.

Při slepém dosazování můžeme dostat naprosto libovolný výsledek (a nemusíme to poznat).

Potřebné znalosti a dovednosti

1. Znát povahu reálného problému a vědět, jaké výsledky jsou možné, pravděpodobné apod. Umět vyjádřit reálný problém matematicky a interpretovat získané výsledky.
2. Znát výhody a nevýhody jednotlivých numerických metod a omezení jejich použitelnosti.
3. Mít rozhled v matematice (vědět, jak obtížné jsou úkony, které daná numerická metoda vyžaduje) a „vidět několik kroků dopředu“.
4. Být si vědom nedokonalosti numerických metod a omezení použitého softwaru.

...

- Při ručním počítání přesně počítat na kalkulačce.

Obsah

Matematický software

Matematický software je pouze prostředek k usnadnění výpočtů. Uživatel musí vždy vědět,

- který software zvolit,
- jak připravit vstupní údaje,
- jak na základě zkušenosti nebo relevantních dat odhadnout parametry úlohy, počáteční aproximace apod.
- jaký zvolit postup řešení,
- jaké zvolit příkazy (zdůvodnit, proč právě tyto a ne jiné)
- jaká jsou rizika a omezení zvoleného postupu a zvolených příkazů; znát jejich volitelné parametry
- atd. atd.
- jak interpretovat výstup matematického programu včetně různých nestandardních hlášení a chyb

Matematický software

Example

Určete součet řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Odpovědi získané softwarem Maple jsou po řadě:

1. ∞ (součet nekonečno nebo řadu nelze sečíst?)
2. $\frac{\pi^2}{6}$
3. $\zeta(3)$ (ζ je Riemannova zeta funkce)

Matematický software – problémy s vykreslováním grafů

Example

Zkuste si sami pomocí svého „oblíbeného“ softwaru vykreslit grafy následujících funkcí:

- $f(x) = -\frac{e^x}{2\sqrt{3-e^x}}$ a ihned poté $g(x) = |-\frac{e^x}{2\sqrt{3-e^x}}|$, obě např. na intervalu $\langle 0, 2\rangle$,
- $h(x) = \ln(\tan\sqrt{1-x})\sin\frac{2}{x}$ na vhodném intervalu v situaci, kdy hledáte nejmenší kladné řešení rovnice $h(x) = 0$.

Další ukázky najdete v plné verzi skript.

Obsah

Co je „za“ numerickými metodami

Při numerickém řešení typových úloh (soustava lineárních rovnic, nelineární rovnice, určitý integrál apod.) využíváme vlastností daných matematických objektů.

Např. víme, že geometrický význam zápisu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ je obsah nějaké plochy. Při numerickém řešení této úlohy tedy hledáme přibližné vyjádření obsahu plochy. Při tom můžeme využít různé strategie.

Co je „za“ numerickými metodami

Podobně řešit rovnici $e^x + \sin(x) - 3 = 0$ znamená najít všechny průsečíky grafu funkce $f(x) = e^x + \sin x - 3$ s osou x. Může to také např. znamenat najít všechny průsečíky grafů funkcí $f_1(x) = e^x$ a $f_2(x) = 3 - \sin x$. Tyto body lze najít různými způsoby (postupným zkracováním intervalu, kde leží, zpřesňováním jednoho původního odhadu podle nějakých pravidel apod.)

Co strategie, to numerická metoda.

Ne každá numerická metoda funguje za všech okolností.

Obsah

Základní terminologie

- O numerické metodě, která v dané situaci vede k nalezení řešení, říkáme, že *konverguje* k přesnému řešení.
- O numerické metodě, která v dané situaci nevede k nalezení řešení, říkáme, že *diverguje*.
- Před použitím dané numerické metody musíme rozhodnout, zda v dané situaci bude konvergovat k přesnému řešení nebo ne. Ověříme tzv. *podmínky konvergence*.

Numerické řešení soustav lineárních rovnic

Matematika 3

Obsah

Formulace problému

Najděte řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých.

Zdůvodnění a souvislosti

- Zabýváme se pouze problémem, který *může* mít právě jedno řešení.
- Nemáme zaručeno, že problém má právě jedno řešení. *(zopakujte si příslušné partie z předmětu Matematika 1)*
- Nemusíme striktně ignorovat technická zadání vedoucí na soustavy $m \times n$ – pokud je lze upravit do tvaru $n \times n$.

Použité označení

- „Dlouhý“ zápis soustavy n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

- Maticový zápis $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ a $\mathbf{x}$ je vektor neznámých.

Dosud známé vs. nový pohled

Soustavy lineárních rovnic již umíte řešit (Gaussova eliminace, Cramerovo pravidlo). Tyto způsoby jsou dobře použitelné pro „malé“ soustavy s „rozumnými“ koeficienty.

Matematickým zápisem reálných technických problémů však bývají „velké“ soustavy (tisíce rovnic) s „nerozumnými“ koeficienty. Pomocí známých metod sice získáme přesné řešení, avšak tyto metody jsou těžkopádné (Cramerovo pravidlo – počítání determinantů) a obtížně algoritmizovatelné. Navíc při nich hrozí riziko zaokrouhlovacích chyb (ukázka).

Dosud jsme se nezabývali otázkou původu koeficientů (měření, výsledky výpočtů, jejich přesnost apod.)

Obsah

Návrh řešení

- Osamostatněním členů s x_i soustavu upravíme do tvaru

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \ldots - a_{2n}x_n) \\
&\ldots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \ldots - a_{nn-1}x_{n-1})
\end{aligned}
$$

- Tím rovnice převedeme do tzv. *iterační tvaru*.
- Z hodnot x_i, $i = 1, \ldots, n$, na pravé straně rovnic budeme určovat hodnoty vlevo. Označování: $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^k) \ldots x_n^{(k)}$.
- Takto budeme postupovat do té doby, než *dosáhneme zvolené přesnosti* (musíme nejprve definovat).

Volba počáteční aproximace

Abychom mohli zahájit výpočet, potřebujeme znát tzv. *počáteční aproximaci*, tj. počáteční hodnoty x_i, $i = 1, \ldots, n$.

- Počáteční aproximaci většinou určujeme ze znalostí úlohy, jejímž je soustava rovnic zápisem.
- Metody, které si budeme ukazovat, připouštějí libovolnou volbu počáteční aproximace.
- Vzhledem k chybám při výpočtu (a mechanismu jejich šíření) volíme počáteční aproximaci tak, abychom prováděli co nejméně kroků zvolené numerické metody.

Různé numerické metody

Při dosazování do rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \ldots - a_{2n}x_n) \\
&\ldots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \ldots - a_{nn-1}x_{n-1})
\end{aligned}
$$

máme několik možností. Podle toho, kterou zvolíme, budeme mluvit buď o *Jacobiho* nebo *Gauss-Seidelově* metodě.

Různé numerické metody

Pokud bychom v k–tém kroku nejprve vypočítali hodnoty vpravo (označme $\overline{\mathbf{x}}_i^{(k+1)}$) a poté řekli, že

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)} + \omega\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)},$$

kde ω je vhodný parametr, mluvili bychom o tzv. *relaxačních metodách*. Těmi se zabývat nebudeme – v našem případě bude vždy $\omega = 1$.

Obsah

Jacobiho iterační metoda

- Zvolíme libovolnou počáteční aproximaci.
- Pomocí r–té aproximace určíme $r+1$ aproximaci. Dosazujeme do vztahů:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(r+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(r)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(r)}) \\
x_2^{(r+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(r)} - a_{23}x_3^{(r)} \ldots - a_{2n}x_n^{(r)}) \\
&\ldots \\
x_n^{(r+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(r)} - a_{n2}x_2^{(r)} \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(r)})
\end{aligned}
$$

- Výpočet ukončíme, jestliže $|x_k^{(r)} - x_k^{(r-1)}| < \varepsilon$, pro $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, kde ε je požadovaná přesnost.

Jacobiho iterační metoda

- Ze sady „starých hodnot“ vypočteme sadu „nových hodnot“.
- Výpočet ukončíme, pokud jsou přírůstky hodnot „příliš malé“.

Podmínky konvergence

Theorem

Je-li matice **A** *ostře řádkově nebo sloupcově diagonálně dominantní, Jacobiho metoda konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci.*

Vysvětlení pojmů

- řádkově: $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j\neq i} |a_{ij}|$ pro $i = 1, \ldots, n$
- sloupcově: $|a_{jj}| > \sum\limits_{i=1, i\neq j} |a_{ij}|$ pro $j = 1, \ldots, n$

Obsah

Gauss – Seidelova iterační metoda

- Zvolíme libovolnou počáteční aproximaci.
- Pomocí r–té aproximace určíme $r+1$ aproximaci. Dosazujeme do vztahů:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(r+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(r)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(r)}) \\
x_2^{(r+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(r+1)} - a_{23}x_3^{(r)} \ldots + a_{1n}x_n^{(r)}) \\
&\ldots \\
x_n^{(r+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(r+1)} - a_{n2}x_2^{(r+1)} \ldots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(r+1)})
\end{aligned}
$$

- Výpočet ukončíme, jestliže $|x_k^{(r)} - x_k^{(r-1)}| < \varepsilon$, pro $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, kde ε je požadovaná přesnost.

Gauss – Seidelova iterační metoda

- „Nové hodnoty“ používáme hned, jakmile je máme k dispozici.
- Výpočet ukončíme, pokud jsou přírůstky hodnot „příliš malé“.

Srovnání vzorců obou metod

Jacobiho iterační metoda

1. známe r–tou aproximaci
2. pomocí ní určíme $r+1$ aproximace všech neznámých, přitom používáme vždy r–té hodnoty
3. známe $r+1$ aproximaci

Gauss – Seidelova iterační metoda

- $r+1$ hodnoty používáme ve výpočtu ihned poté, co je získáme

Podmínky konvergence

Theorem

Je-li matice **A** *ostře řádkově nebo sloupcově diagonálně dominantní, Gauss – Seidelova metoda konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci.*

- Stejná podmínka platí u Jacobiho metody.

Jak postupovat v případě, kdy konvergence zaručena není?

Pokud chceme mít zajištěnou konvergenci, lze u *Gauss–Seidelovy metody* soustavu vynásobit *zleva* maticí $\mathbf{A}^T$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

Při použití *Gauss–Seidelovy metody* na tuto soustavu rovnic bude konvergence zaručena pro libovolný počátek (přitom není podstatné, zda je matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ostře řádkově / sloupcově diagonálně dominantní nebo ne).

Jak postupovat v případě, kdy konvergence zaručena není?

Podmínka: Matice **A** musí být regulární.

Problém: Velmi často se zvýší počet kroků nutných k dosažení zadané přesnosti.

Problémy

Při praktické realizaci výpočtu čelíme několika problémům.

Example

Vhodnou numerickou metodou nalezněte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 0,1x_1 + 150x_2 - 25,4x_3 + x_4 &= 125,7 \\ 23x_1 - 0,5x_2 + 22,5x_3 &= 45 \\ 1500x_1 - 0,8x_2 + 2,9x_3 + 12x_4 &= 1514,1 \\ 9,2x_1 + 12,3x_2 - 5,3x_3 - 0,2x_4 &= 16 \end{aligned}$$

Pracujte s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Problémy

Soustava z přechozího snímku je „malá“. V reálných situacích může být její rozměr např. 100×100 nebo 1000×1000.

1. Jak ověřit, že má soustava právě jedno řešení?
2. Jak zvolit počáteční aproximaci?
3. Jak ověřit, že je soustava ostře rádkově / sloupcově diagonálně dominantní, resp. jak to zajistit?
4. Jak zajistit, abychom museli provádět co nejmenší počet kroků?
5. Splnění ukončovací podmínky nemusí nutně znamenat, že jsme dosáhli zadané přesnosti.

Teoretické zdůvodnění

Jacobiho i Gauss–Seidelova metoda jsou příkladem aplikace *Banachovy věty o pevném bodu*.

Kontraktivní zobrazení

Definition

Nechť X je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $F : X \to X$ je *kontraktivní*, jestliže existuje $\alpha \in \langle 0, 1)$ tak, že pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí:

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

- Množina X nemusí být *úplný* metrický prostor.
- Podmínku lze zjednodušit na „vzdálenost obrazů je menší než vzdálenost vzorů“ – ale pozor jedná se ne o *vzdálenost* ale o *metriku*.

Banachova věta o pevném bodu

Theorem

Buď X úplný metrický prostor a $F : X \to X$ kontraktivní zobrazení. Pak existuje právě jeden pevný bod $\hat{x}$ zobrazení F. Pro tento bod platí

$$\hat{x} = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

kde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tzv. posloupnost postupných aproximací definovaná takto:

- $x_0 \in X$ *je libovolný*
- $x_{k+1} = F(x_k)$ *pro* $k = 1, 2, \dots$

Souvislost s výše uvedenými metodami

Jestliže např. u Jacobiho metody využíváme vztahy

$$
\begin{aligned}
x_1^{(r+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(r)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(r)}) \\
x_2^{(r+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(r)} - a_{23}x_3^{(r)} \ldots - a_{2n}x_n^{(r)}) \\
&\ldots \\
x_n^{(r+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(r)} - a_{n2}x_2^{(r)} \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(r)})
\end{aligned}
$$

hledáme pevný bod zobrazení $F(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_J\mathbf{x} + \mathbf{d}$.

Souvislost s výše uvedenými metodami

Množina všech čtvercových matic s vhodně zvolenou „normou“ je úplným metrickým prostorem. Přitom zobrazení $F(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_J\mathbf{x} + \mathbf{d}$ je kontraktivní za předpokladu, že tato „vhodná norma“ je menší než 1. To platí mj. v případě, kdy je původní matice $\mathbf{A}$ ostře řádkově nebo sloupcově diagonálně dominantní.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Možnosti opakování

Pomocí následujících mapletů si můžete usnadnit některé dílčí výpočty, zkontrolovat jejich správnost, případně si připomenout teoretické poznatky potřebné pro aplikaci numerických metod probíraných v této kapitole.

1. Výpočet determinantu
2. Analytické řešení soustavy lineárních rovnic
3. Násobení matic

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

Před spuštěním tohoto souboru je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks. Nezapomínejte, že tyto aplikace nemohou (a ani to nedělají!) postihnout všechny nuance probírané látky!

1. Numerické metody řešení soustav lineárních rovnic

Příklady pro samostatnou práci

Při řešení následujících příkladů zkuste aplikovat různé strategie řešení. Všímejte si, jaká je jejich časová náročnost. Můžete využívat výpočetní techniku. Sami zvažte, nakolik při řešení těchto zadání využijete numerické metody, a jakou roli při řešení hrají teoretické poznatky získané v jiných předmětech.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Označme L počet písmen Vašeho křestního jména, M počet písmen Vašeho příjmení a N ciferný součet Vašeho ID a vytvořme z těchto čísel vektory $\vec{u} = (L, M, N)$, $\vec{v} = (N, M, L)$, $\vec{w} = (M, L, N)$. Chceme řešit rovnici

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{k},$$

kde $\vec{k} = (1, 1, 1)$. Při použití numerických metod pracujte s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 6x + 5y + 4z &= 3 \\ ax + 4y + 6z &= 5. \end{aligned}$$

Zvolte $a = 2$ nebo $a = 5$ tak, aby soustava měla právě jedno řešení (volbu zdůvodněte). Při použití numerických metod pracujte s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Numerické řešení jedné nelineární rovnice

Matematika 3

Obsah

Formulace problému

Je dána reálná funkce f jedné reálné proměnné x jiného tvaru než $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Najděte všechny body $\zeta \in \mathbb{R}$, pro které platí, že $f(\zeta) = 0$.

Dosud známé vs. nový pohled

Některé nelineární rovnice umíme řešit již ze střední školy (kvadratické, kubické, čtvrtého stupně, reciproké do stupně 9, resp. 10 včetně, logaritmické, exponenciální, goniometrické).

Neumíme však řešit rovnice, kde se vyskytují *současně* funkce různých typů, např. $e^x + sin(x) = 1$ nebo $x^3 + \cos x = 3$ nebo $ln(x) + (x-1)^2 + 2 = 0$ apod.

Proč zrovna tento problém?

Nelineární rovnice se vyskytují např. v různých optimalizačních úlohách. Máme-li najít minimum / maximum nějaké funkce $f(x)$ (lokální / absolutní), musíme řešit úlohu $f'(x) = 0$. Tato rovnice bývá často „komplikovaného“ tvaru.

1. $f(x) = \sin(x^2 + 4x)$
2. $f(x) = \sin(x^2 + 4x) + x^2$

Příklad

Example

Najděte lokální extrémy funkce $y(x) = \sin(x^2 + 4x)$.

Zřejmě $y'(x) = (2x + 4)\cos(x^2 + 4x)$. Body, ve kterých mohou nastávat extrémy, tedy můžeme v tomto případě určit na základě středoškolských znalostí, protože $y'(x) = 0$ pro $x = -2$ a dále pro body, kde $\cos(x^2 + 4x) = 0$, tj. tam, kde $x^2 + 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad

Example

Najděte lokální extrémy funkce $y(x) = \sin\left(x^2 + 4x\right) + x^2$.

V tomto případě je $y'(x) = (2x + 4)\cos\left(x^2 + 4x\right) + 2x$ a při řešení rovnice $y'(x) = 0$ již analyticky postupovat nemůžeme. Musíme tedy využít aparátu numerických metod.

Postup řešení

Úlohu *nelze* řešit „rovnou“. Musíme postupovat ve dvou krocích:

1. Zjistit kolik řešení zadaná rovnice má a kde tato řešení leží. tzv. *(separace kořenů)*
2. Jakmile určíme vhodný interval, na němž leží nějaké řešení dané rovnice, začít toto řešení hledat.

Separace kořenů

Nalezení intervalu, kde leží nějaké řešení zadané rovnice, může být velmi obtížné. Použití softwaru je omezené – jak např. zadat rozsah pro vykreslování funkce?

Example

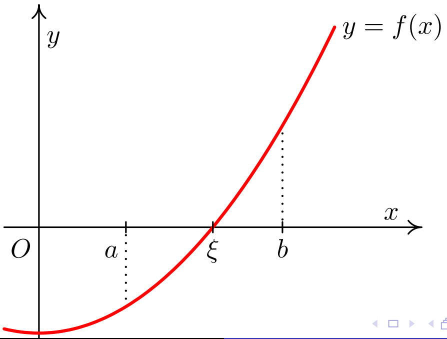
Příklad 3.3, příklad 3.4 z plné verze skript.

Dále uvedeme dva nejjednodušší postupy, které lze pro separaci kořenů. I když je používáme často, jejich praktická použitelnost je omezená.

Separace kořenů – I

Theorem

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí-li $f(a)\cdot f(b) < 0$, pak na intervalu $\langle a, b\rangle$ leží alespoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$.



Separace kořenů – I

- Jedná se o implikaci (jaký je závěr, pokud funkce spojitá není nebo pokud $f(a) \cdot f(b) < 0$ neplatí?)
- Předpoklad o spojitosti (jak ho ověříme?)
- Přesný počet kořenů na daném intervalu takto neurčíme.

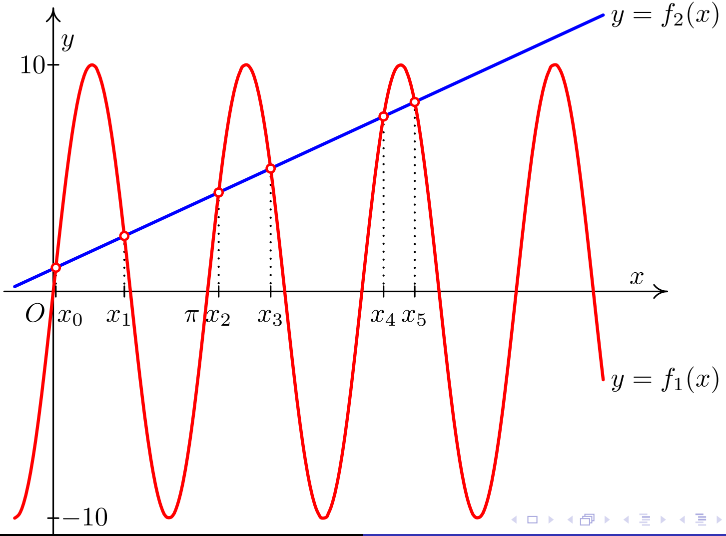
Separace kořenů – II

Při vhodném zadání lze úlohu přeformulovat:

$10\sin 2x - x - 1 = 0$	$10\sin 2x = x + 1$
$f(x) = 0$	$f_1(x) = f_2(x)$
průsečík grafu $f(x)$ s osou x	průsečík grafů $f_1(x)$ a $f_2(x)$

Grafy funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ umíme načrtnout od ruky.

Separace kořenů – II



Separace kořenů – další postupy

- Znalost reálného technického problému, zkušenosti, diskuse nad zadáním (matematik řeší obecný matematický problém – obtížné; inženýr řeší konkrétní technické zadání – jednodušší, protože proměnné mohou nabývat jen některých předem odhadnutelných hodnot).
- Znalost matematiky (např. $e^x + x^6 = 0$ nebo $\sin x - (x+1)^2 + \cos 2x = 4$).
- Výpočetní technika, grafická kalkulačka (s omezeními).

Separace kořenů – problémy

Při separaci kořenů je nutná kombinace znalostí a postupů. Zcela jistě využijete poznatky o vlastnostech elementárních funkcích ze střední školy a z 1. ročníku.

Example

Určete počet řešení rovnice

$$y = \ln\left(\tan\sqrt{1-x}\right)\sin\frac{2}{x}$$

a poté najděte to záporné řešení, které je nejblíže -75, a dále nejmenší kladné řešení.

Obsah

Teoretické zdůvodnění

Vycházíme z věty $f(a) \cdot f(b) < 0$. Víme, že na nějakém intervalu leží alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$. Tento interval podle nějakých pravidel dělíme na menší části a zkoumáme, na které části je splněna podmínka věty o opačných znaméncích, tj. na které části intervalu leží alespoň jedno řešení.

Metoda půlení intervalů (bisekce)

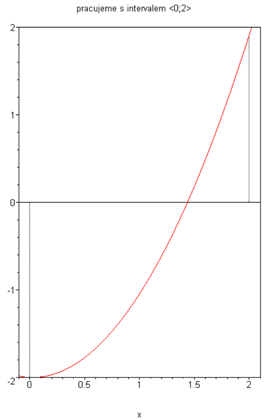
Interval $\langle a, b \rangle$ dělíme na polovinu.

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Jestliže pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $b_k - a_k < 2\varepsilon$,
je x_k řešení získané s danou přesností ε.

- Metoda konverguje vždy.
- Metoda je jednoduchá.
- Konvergence je pomalá.

Metoda půlení intervalů (animace)



Metoda regula falsi

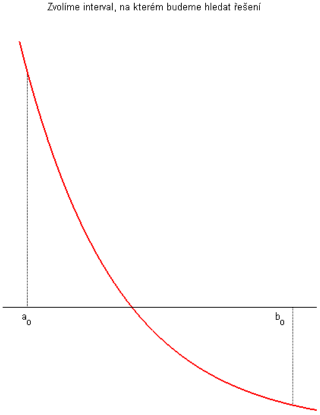
Interval $\langle a, b \rangle$ dělíme na dvě obecně různé části. Spojíme body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$; dělícím bodem intervalu je průsečík této úsečky s osou x.

$$x_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k)$$

Výpočet zastavujeme, jestliže pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

- Metoda konverguje vždy.
- Je náročnější na výpočet než metoda půlení interavalů.
- Většinou konverguje rychleji než metoda půlení intervalů.

Metoda regula falsi (animace)



Obsah

Teoretické zdůvodnění

Je dána rovnice $f(x) = 0$ a interval $I = \langle a, b\rangle$, na němž leží právě jedno řešení dané rovnice. Funkci $f(x)$ v okolí bodu $x_0 \in I$, rozvineme do Taylorovy řady

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

a zanedbáme všechny členy s derivacemi vyšších řádů (funkci linearizujeme). Získáme

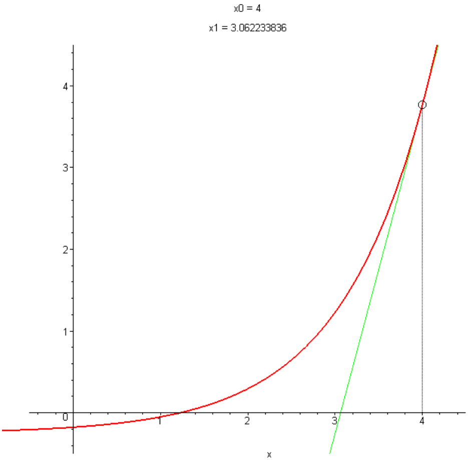
$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a určíme řešení rovnice

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

které označíme x_1. V okolí bodu x_1 funkci $f(x)$ opět rozvineme do Taylorovy řady a celý postup opakujeme.

Geometrický význam



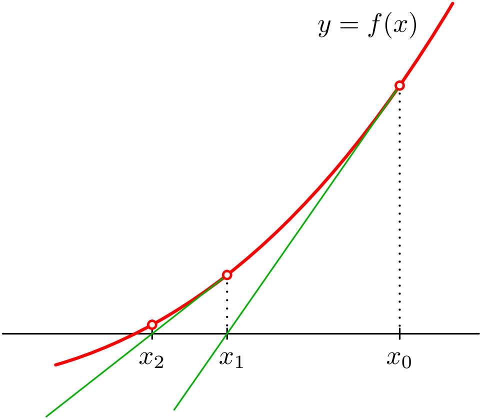
Postup

- Najdeme interval $I = \langle a, b \rangle$, na kterém leží právě jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Zvolíme počáteční aproximaci $x_0 \in I$ a ověříme podmínky konvergence.
- $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
- Výpočet ukončíme, jestliže pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

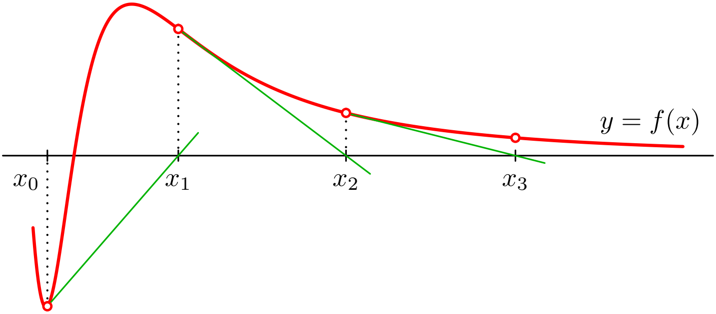
Konvergence vs. divergence

Newtonova metoda může konvergovat i divergovat. Tato skutečnost závisí na tom, jak se funkce $f(x)$ chová na intervalu $\langle a, b \rangle$, na němž hledáme řešení rovnice $f(x) = 0$.

Newtonova metoda může konvergovat...



. . . stejně jako divergovat



Podmínky konvergence

Theorem

Nechť je dána rovnice $f(x) = 0$ a interval $I = \langle a, b \rangle$, na němž leží právě jedno řešení této rovnice. Nechť jsou splněny následující podmínky:

- *funkce $f(x)$ má na intervalu I spojitou první a druhou derivaci $f'(x)$ a $f''(x)$,*
- *na intervalu I je $f'(x) \neq 0$ a současně $f''(x)$ nemění znaménko.*

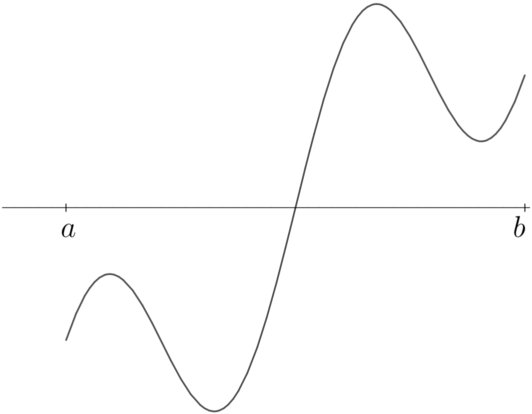
***Pak** zvolíme-li počáteční aproximaci $x_0 \in I$ tak, že platí*

- $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

Newtonova metoda bude konvergovat.

Podmínky konvergence

Je třeba ověřit **všechny** předpoklady! Samotná platnost podmínky $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ konvergenci zaručit nemusí.



Vyhodnocení metody

- Metoda nemusí konvergovat. Konvergence / divergence závisí na chování funkce $f(x)$ na intervalu I.
- Ověřování podmínek konvergence je u složitějších rovnic často velmi komplikované. Často se proto ověřování podmínek konvergence vypouští. *(Pozor: Je nutné znát důsledky a umět poznat, co je a co není hledané řešení!)*
- Metoda většinou konverguje nejrychleji z uvedených metod.

Obsah

Teoretické zdůvodnění

Rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$, uvážíme interval $I = \langle a, b \rangle$ a na zobrazení $g : I \to I$ aplikujeme Banachovu větu o pevném bodu.

Problémy

1. Vyjádření $x = g(x)$ nemusí být jednoznačné.
2. Funkce $g(x)$ a $f(x)$ mohou mít odlišné definiční obory.
3. Pevný bod zobrazení g nemusí na intervalu I existovat. Z toho ale neplyne, že neexistuje řešení původní rovnice $f(x) = 0$.
4. atd.

Iterační tvar $x = g(x)$

Example

Metodou prosté iterace najděte libovolné řešení rovnice $e^x + 3\sin x - 2 = 0$.

Převedením rovnice do tvaru $x = g(x)$ můžeme získat např.

1. $x = \ln(2 - 3\sin x)$
2. $x = \arcsin\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^x\right)$

Postup při aplikaci metody prosté iterace

- Rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$.
- Ověříme podmínky konvergence.
- Zvolíme počáteční aproximaci $x_0 \in \langle a, b \rangle$, tj. z intervalu, na němž leží alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.
- $x_{k+1} = g(x_k)$
- Výpočet ukončíme, jestliže pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

Podmínky konvergence

Jestliže definujeme metriku d předpisem $d(x,y) = |x-y|$ pro $\forall x, y \in I$, je dvojice (I, d) úplný metrický prostor. Abychom mohli použít Banachovu větu o pevném bodu, zobrazení g na intervalu I musí být kontrakce. To se však špatně ověřuje. Ověříme proto ekvivalentní podmínku.

Podmínky konvergence

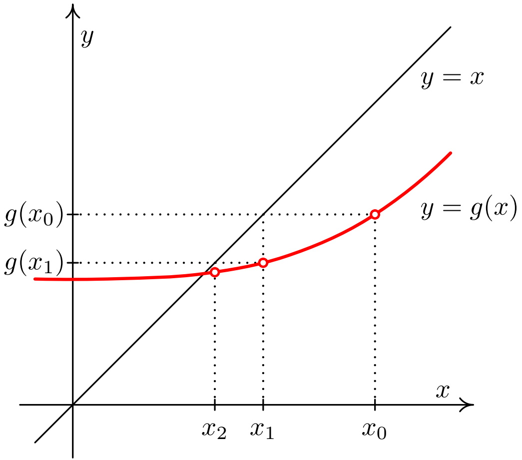
Theorem

Nechť je dána funkce $g : I \to I$, kde $I = \langle a, b \rangle$. Nechť má funkce g na intervalu I derivaci a nechť existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že platí

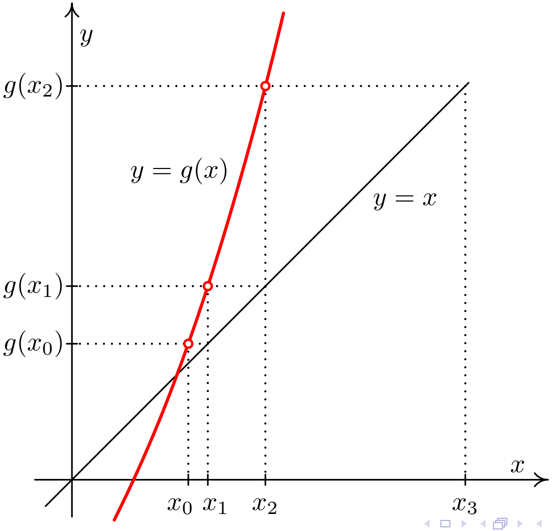
$$\max_{x \in I} |g'(x)| \leq \alpha < 1.$$

Pak na intervalu I existuje právě jeden pevný bod $\hat{x}$ zobrazení g. Zvolíme-li $x_0 \in I$ libovolné, pak $\hat{x} = \lim_{n \to \infty} x_n$, kde $x_{k+1} = g(x_k)$ pro $k = 1, 2, \ldots$.

Metoda prosté iterace může konvergovat. . .



. . . stejně jako divergovat



Vyhodnocení metody

- Metoda nemusí konvergovat. Konvergence / divergence záleží na funkci $g(x)$ ve vyjádření $x = g(x)$.
- Při ověřování podmínek konvergence musíme ověřit, že funkce $g(x)$ má derivaci na daném intervalu I, a najít maximum této derivace na daném intervalu. *To může být pracné*.
- Při volbě počáteční aproximace se musíme pohybovat uvnitř intervalu I.
- Vlastní výpočet je snadný – hledáme pouze funkční hodnoty funkce $g(x)$.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Možnosti opakování

Pomocí následujících mapletů si můžete usnadnit některé dílčí výpočty, zkontrolovat jejich správnost, případně si připomenout teoretické poznatky potřebné pro aplikaci numerických metod probíraných v této kapitole.

1. Výpočet funkčních hodnot
2. Grafy některých elementárních funkcí
3. Grafy funkcí

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

Před spuštěním tohoto souboru je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks. Nezapomínejte, že tyto aplikace nemohou (a ani to nedělají!) postihnout všechny nuance probírané látky!

1. Numerické metody řešení jedné nelineární rovnice

Příklady pro samostatnou práci

Při řešení následujících příkladů zkuste aplikovat různé strategie řešení. Všímejte si, jaká je jejich časová náročnost. Můžete využívat výpočetní techniku. Sami zvažte, nakolik při řešení těchto zadání využijete numerické metody, a jakou roli při řešení hrají teoretické poznatky získané v jiných předmětech.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je dána rovnice $10\sin(2x + 0.1) - x - 1 = 0$. Seřaďme její kladná řešení podle velikosti od nejmenšího po největší a označme je $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}01$ najděte x_4 této posloupnosti.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^2 + 3\sin 2x - 4 = 0$ a dále $\ln 2x + 4x^3 - 2 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}01$ ho najděte.

Numerické řešení soustav nelineárních rovnic

Matematika 3

Obsah

Formulace problému

Najděte řešení soustavy n nelineárních rovnic o n neznámých.

Motivace – příklady

- Hledání extrémů funkce více proměnných.
- Funkční hodnoty funkce komplexní proměnné.
- Průsečíky rovinných / prostorových útvarů.

Motivace – příklady

Example

Je dána funkce $f(z) = e^z + j\Re z - |z|\Im z$. Zjistěte, pro která z platí, že $|f(z)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\arg f(z) = \frac{\pi}{4}$.

Ze zadání vyplývá, že máme najít řešení rovnice $e^z + j\Re z - |z|\Im z = 1 + j$. Rozepsáním získáme soustavu

$$
\begin{aligned}
e^x \cos y + y\sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\
e^x \sin y + x &= 1
\end{aligned}
$$

To je soustava dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých.

Motivace – příklady

Příklad soustavy tří nelineárních rovnic o třech neznámých:

Example

Najděte průsečíky ploch:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} - 5 &= 0 \\
\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} + 2z &= 0 \\
\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 5 &= 0.
\end{aligned}
$$

Motivace – příklady

Použité označení

- „Dlouhý“ zápis soustavy n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, \ldots x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, \ldots x_n) &= 0 \\
&\ldots \\
f_n(x_1, \ldots x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

- Vektorový zápis $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, kde $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n)^T$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ je vektor neznámých a $\mathbf{o}$ je nulový vektor.

Dosud známé vs. nový pohled

Ze střední školy umíte řešit soustavy s jednou kvadratickou a jednou lineární rovnicí, jejichž geometrická interpretace je hledání průsečíku přímky a kuželosečky. Již dříve jsme si ukázali metody na hledání řešení *jedné* nelineární rovnice.

Nyní si ukážeme, jak podobným způsobem řešit *soustavy* nelineárních rovnic. Budeme modifikovat dvě z metod na řešení jedné nelineární rovnice.

Postup řešení

Podobně jako v případě jedné nelineární rovnice *nelze* ani tuto úlohu řešit „rovnou“. Opět musíme postupovat ve dvou krocích:

1. Zjistit kolik řešení zadaná soustava rovnic má a určit jejich přibližnou polohu.
2. V oblasti, kterou si určíme, hledat požadované řešení.

Určení oblasti, kde leží řešení

Jedná se o poměrně složitou otázku. Zcela jistě nemůžeme v obecném případě využít postupy známé pro jednu nelineární rovnici. Můžeme vycházet ze zkušenosti, resp. zkoušet různé počáteční aproximace.

V případě, že máme soustavu dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých, je úloha podobně jako při separaci kořenů jedné nelineární rovnice výrazně jednodušší. Úloha je ekvivalentní hledání průsečíku dvou křivek v rovině. Tyto křivky můžeme (nechat) vykreslit.

Jinými postupy se zabývat nebudeme – budeme řešit buď soustavy dvou rovnic o dvou neznámých nebo větší soustavy ale takové, u nichž bude počáteční aproximace zadána.

Jednoduchý příklad

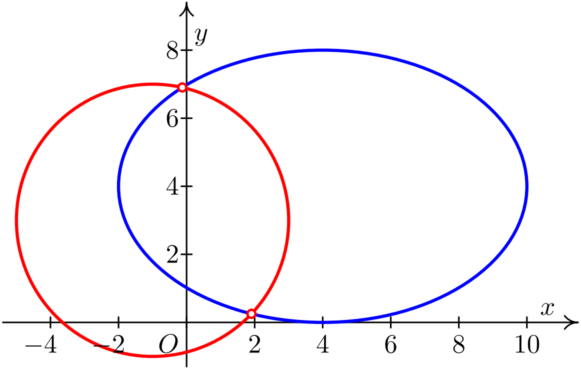
Example

Určete oblast, kde leží řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 6y &= 6 \\ 4x^2 - 32x + 9y^2 - 72y &= -64 \end{aligned}$$

Obě rovnice převedeme na úplný čtverec a pomocí středoškolských znalostí určíme, že máme za úkol najít průsečík kružnice a elipsy.

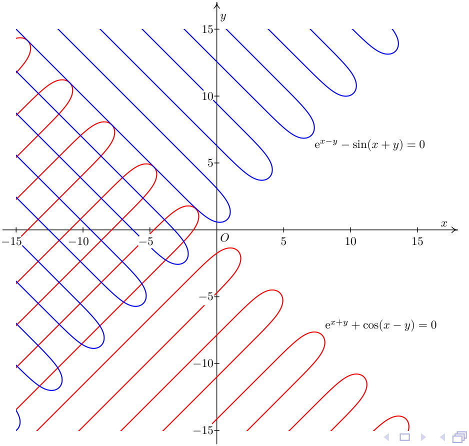
Jednoduchý příklad



Počáteční aproximaci tedy můžeme volit např. $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 7)^T$, resp. např. $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 0)^T$.

Náročnější příklad

Řešení soustavy $e^{x+y} + \cos(x-y) = 0$, $e^{x-y} - \sin(x+y) = 0$.



Nástin metody

Budeme modifikovat Newtonovu metodu pro jednu nelineární rovnici $f(x) = 0$. Připomeňme, že jsme používali vzorec

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

resp. jsme řešili rovnici $f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$.

Využijeme podobné myšlenky, ale musíme si uvědomit, že:

- máme soustavu rovnic, nikoliv jednu rovnici,
- musíme najít ekvivalent derivace $f'(x)$ pro více neznámých.

Odvození vzorce

Známe-li aproximaci $\mathbf{x}^{(k)}$, pak aproximaci $\mathbf{x}^{(k+1)}$ určíme ze vztahu

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})\right)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Vzorec je analogií vzorce pro Newtonovu metodu pro jednu nelineární rovnici, přičemž

- pracujeme nikoliv s čísly ale s maticemi a vektory,
- výraz $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})$ je matice (ne číslo), proto nemůže být ve jmenovateli zlomku; ve vzorci se vyskytuje inverzní matice *(to je ale problém!)*.

Význam $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})$

Místo hodnot derivace $f(x_k)$ v případě jedné nelineární rovnice pracujeme s maticí parciálních derivací $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})$.

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^{(k)}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^{(k)}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ & & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}^{(k)}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^{(k)}) \end{pmatrix}$$

Hledáme hodnoty všech parciálních derivací v bodě, resp. vektoru, $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T$.

Odvození vzorce (pokr.)

Vzorec musíme upravit do vhodnějšího tvaru.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})\right)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$
$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$
$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Označíme-li $\delta^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = (\delta_1^{(k)}, \ldots, \delta_n^{(k)})^T$, pak řešíme soustavu rovnic, jejíž maticový zápis je

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \delta^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Postup

- Odhadneme počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$.
- Podmínky konvergence neověřujeme (ověřování přesahuje rámec předmětu).
- Počítáme podle vzorce

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta^{(k)},$$

  kde $\delta^{(k)}$ je řešením soustavy n lineárních rovnic o n neznámých

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \delta^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

- Výpočet ukončíme, jestliže pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $||\delta^{(k)}|| < \varepsilon$.

Problémy

- Určení oblasti, kde leží řešení, tj. volba vhodné počáteční aproximace, je komplikované.
- Musíme určit všechny parciální derivace a jejich hodnoty v příslušných bodech.
- V každém kroku algoritmu řešíme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých. Ta může mít žádné, právě jedno nebo nekonečně mnoho řešení. *(Jak, tj. jakou metodou, budeme hledat její řešení? Najdeme přesné nebo jen přibližné řešení? Jak zaručíme konvergenci? Jak poznáme, že se vyskytl problém?)*
- V průběhu odvozování vzorce jsme násobili inverzní maticí k matici $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})$ – ta ale vůbec nemusí existovat.

Metoda prosté iterace

Podobně jako u Newtonovy metody postupujeme analogicky jako v případu jedné rovnice. Soustavu $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ upravíme na tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

kde $\mathbf{G} = (g_1, \dots, g_n)^T$, což můžeme rozepsat jako

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2}$$

Metoda prosté iterace

Opět zvolíme počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$ a počítáme posloupnost postupných aproximací z iteračního vztahu

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{3}$$

Podobně jako v případě jedné rovnice musíme ověřit podmínky konvergence pro zvolený iterační tvar. Ověřujeme skutečnosti o řádkové nebo sloupcové normě matice, která popisuje chování parciálních derivací funkcí g_i, $i = 1, \ldots, n$ na oblasti, na které hledáme řešení soustavy rovnic.

(podrobnosti viz plná verze skript)

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Možnosti opakování

Pomocí následujících mapletů si můžete usnadnit některé dílčí výpočty, zkontrolovat jejich správnost, případně si připomenout teoretické poznatky potřebné pro aplikaci numerických metod probíraných v této kapitole.

1. Parciální derivace
2. Analytické řešení soustavy lineárních rovnic

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

Před spuštěním tohoto souboru je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks. Nezapomínejte, že tyto aplikace nemohou (a ani to nedělají!) postihnout všechny nuance probírané látky!

1. Numerické metody řešení soustavy nelineárních rovnic

Příklady pro samostatnou práci

Při řešení následujících příkladů zkuste aplikovat různé strategie řešení. Všímejte si, jaká je jejich časová náročnost. Můžete využívat výpočetní techniku. Sami zvažte, nakolik při řešení těchto zadání využijete numerické metody, a jakou roli při řešení hrají teoretické poznatky získané v jiných předmětech.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Chcete najít průsečík dvou kružnic: jedné, která má střed v bodě $[3, 3]$ a poloměr $r = 2$, a druhé, která má střed v bodě $[1, 1]$ a poloměr $r = 3$. Hledáte ten z průsečíků, jehož x–ová souřadnice je větší. Zvolte si vhodnou počáteční aproximaci a proveďte několik kroků Newtonovy metody. Poté zkuste najít počáteční aproximaci takovou, že příslušná soustava lineárních rovnic nemá právě jedno řešení.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Pro $z = x + jy$ hledáte řešení rovnice $jz^2 + |z|^2 - \Im z + j\Re z = 3 + 2j$. Proveďte několik kroků Newtonovy metody pro počáteční aproximaci $z_0 = 1 + j$. Poté zkuste najít počáteční aproximaci takovou, že příslušná soustava lineárních rovnic nemá právě jedno řešení.

Aproximace funkcí: interpolace

Matematika 3

Obsah

Formulace problému

1. Je dána množina bodů $[x_i, y_i]$, $i \geq 2$.
   Najděte funkci $f(x)$, která prochází zadanými body.
2. *(alternativně)* Je dána funkce $f(x)$ a interval $I = \langle a, b \rangle$.
   Na intervalu I nahraďte funkci $f(x)$ funkcí, která je „jednodušší“.

Formulace problému

V dalším textu budeme zadané body místo $[x_i, y_i]$ označovat jako $[x_i, f_i]$, resp. $[x_i, f(x_i)]$, kde

- f_i bude značit hodnotu hledané funkce f v bodě x_i, tj. zde předpokládáme, že hledáme neznámou funkci $f(x)$,
- $f(x_i)$ bude značit funkční hodnotu funkce f v bodě x_i, tj. zde předpokládáme, že ke známé funkci $f(x)$ hledáme nějakou jinou, „jednodušší".

Body x_i budeme nazývat *uzlové body* nebo také *uzly* interpolace.

Dosud známé vs. nový pohled

V 1. ročníku jste se naučili nahrazovat funkce v okolí nějakého bodu. Znáte pojmy *Taylorova řada* a *MacLaurinova řada*. Rozvoj funkcí do těchto řad však předpokládá, že známe funkční předpis rozvíjené funkce. Navíc pracujeme jen *v okolí* nějakého bodu (*středu*), nikoliv obecně na intervalu.

Nyní si ukážeme, jak najdeme *neznámou* funkci, která prochází předem danými body.

Otázky

Nejprve musíme znát odpovědi na důležité otázky:

1. Je tato úloha vůbec obecně řešitelná?
2. Pokud je obecně řešitelná, dostaneme dostatečně „jednoduchou“ funkci $f(x)$?

Teprve poté se můžeme zabývat otázkou:

3. Jak funkci $f(x)$ najít?

Obsah

Interpolace algebraickými polynomy

Problém přeformulujeme do „ambicióznějšího“ tvaru:

Je dána množina bodů $[x_i, f_i]$, $i \geq 2$. Najděte **polynom** $P_n(x)$, který prochází zadanými body, tj. takový polynom, že $P_n(x_i) = f_i$ pro $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Připomeňme, že body x_i nazýváme *uzlové body* nebo *uzly interpolace*.

Proč polynom?

- Polynomy lze jednoduše zapsat – stačí pracovat pouze s koeficienty (polynom lze chápat jako vektor koeficientů).
- Polynom lze jednoduše (algoritmicky) derivovat a integrovat.
- Pro polynomy existuje celá řada metod nalezení jejich kořenů (analytické i numerické metody).
- Existuje celá řada metod (analytických i numerických) na odhad polohy řešení.
- atd. atd.

Existence a jednoznačnost řešení

Theorem

Nechť jsou dány body $[x_i, f_i]$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Pak existuje právě jeden polynom stupně nejvýše n takový, že $P_n(x_i) = f_i$ pro $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

- Úloha tedy řešitelná je – polynom navíc najdeme jednoznačně.
- Stupeň polynomu závisí na počtu bodů – „nejvýše“ n.

(důkaz jednoznačnosti viz plná verze skript)

Obsah

Konstrukce interpolačního polynomu v Lagrangeově tvaru

Předpokádejme, že polynom $P_n(x)$ hledáme ve tvaru

$$P_n(x) = \sum_{i=0,\dots,n} f_i l_i(x),$$

kde $l_i(x_j) = 1$ pro $i = j$ a $l_i(x_j) = 0$ pro $i \neq j$. Tím bude zcela jistě splněna podmínka $P_n(x_i) = f_i$. Polynomy $l_i(x)$ pak mohou být následujícího tvaru:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0,\dots,n;\ j\neq i} (x - x_j)}{\prod_{j=0,\dots,n;\ j\neq i} (x_i - x_j)}$$

Poznámky

- Ve jmenovateli polynomů $l_i(x)$ násobíme čísla. Výsledný polynom $P_n(x)$ je proto tvaru

$$P_n(x) = \sum_{i=0,1,\ldots,n} \left(\frac{f_i}{jmenovatel\ l_i} \prod_{j=0,\ldots,n;\ j\neq i} (x - x_j) \right)$$

- Polynom musíme převést do tvaru $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.
- Pokud chceme interpolaci zpřesnit a přidáme další bod, „znehodnotíme“ celý výpočet.

Konstrukce interpolačního polynomu v Newtonově tvaru

Předpokládejme, že polynom $P_n(x)$ hledáme ve tvaru

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

- Jak určit koeficienty a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$?

Poměrné diference

Nechť jsou dány body $[x_i, f(x_i)]$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$ nazveme podíly

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

  poměrnými diferencemi prvního řádu.

- Pro $i = 0, \ldots, n-k$ nazveme podíly

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

  poměrnými diferencemi k–tého řádu.

Poměrné diference - příklad výpočtu

V tabulce je dáno pět uzlových bodů a funkčních hodnot v nich, tj. dvojic $[x_i, f(x_i)]$. V dalších sloupcích jsou vypočteny poměrné diference prvního až čtvrtého řádu.

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_0, \dots, x_4]$
0	1	1	$\frac{0,5-1}{2-1}$	$\frac{-0,2-(-0,5)}{2,5-1}$	$\frac{0,0625-0,2}{3,2-1}$	$\frac{-0,015625-(-0,0625)}{4-1}$
1	2	$0,5$	$\frac{0,4-0,5}{2,5-2}$	$\frac{-0,125-(-0,2)}{3,2-2}$	$\frac{0,03125-0,0625}{4-2}$	
2	$2,5$	$0,4$	$\frac{0,3125-0,4}{3,2-2,5}$	$\frac{-0,078125-(-0,125)}{4-2,5}$		
3	$3,2$	$0,3125$	$\frac{0,25-0,3125}{4-3,2}$			
4	4	$0,25$				

Využití poměrných diferencí při konstrukci interpolačního polynomu

Nechť jsou dány body $[x_i, f_i]$, $i = 0, 1, \ldots, n$ a polynom $P_n(x)$ takový, že $P_n(x_i) = f_i$. Je-li polynom $P_n(x)$ zapsán ve tvaru

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

pak platí, že

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f[x_0, x_1] \\ &\vdots \\ a_n &= f[x_0, x_1, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Příklad

Mějme následující tabulku poměrných diferencí:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_0, \ldots, x_4]$
0	*1*	**1**	$\mathbf{-0,5}$	$\mathbf{0,2}$	$\mathbf{-0,0625}$	$\mathbf{-0,015625}$
1	*2*	$0,5$	$-0,2$	$0,0625$	$-0,15625$	
2	*2,5*	$0,4$	$-0,125$	$0,03125$		
3	*3,2*	$0,3125$	$-0,078125$			
4	4	$0,25$				

Pak hledaný interpolační polynom je

$$P_n(x) = 1 - 0,5(x-1) + 0,2(x-1)(x-2) - 0,0625(x-1)(x-2)(x-2,5) + \\ +0,015625(x-1)(x-2)(x-2,5)(x-3,2)$$

- Polynom musíme opět převést do tvaru $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Speciální případ: ekvidistantní uzly

V obecném případě nemusejí uzlové body interval $\langle x_0, x_n \rangle$ dělit na stejně velké části. Pokud jej však na stejně velké části dělí, mluvíme o tzv. *ekvidistantních uzlech* (a vzdálenost mezi uzly nazýváme *krok*). Vztahy pro výpočet diferencí jsou v tomto případě jednodušší.

(podrobněji viz skripta plná verze skript)

Obsah

Využití interpolačního polynomu

1. Jsou dány body $[x_i, f_i]$. Najděte polynom, který těmito body prochází.
2. Funkci $f(x)$ aproximujte na intervalu I polynomem.
3. Jsou dány body x_i a funkční hodnoty f_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ v těchto bodech. Určete přibližnou hodnotu v bodě x takovém, že $x \neq x_i$ pro $\forall i$.

Příklad

Example

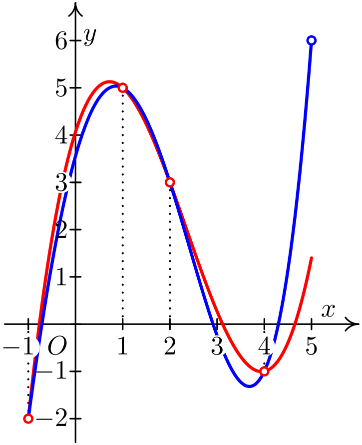
Jsou dány následující dvojice bodů:

1. $[-1,-2], [1,5], [2,3], [4,-1]$
2. tytéž body a navíc bod $[5,6]$

Proložte jimi interpolační polynom.

Příklad – řešení

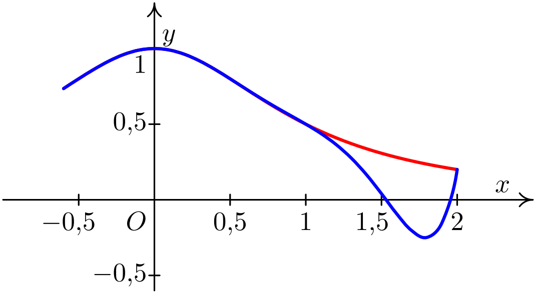
Červeně je zobrazen polynom ze zadání 1, modře polynom ze zadání 2.



Více uzlů $\stackrel{?}{=}$ přesnější výsledky

Example

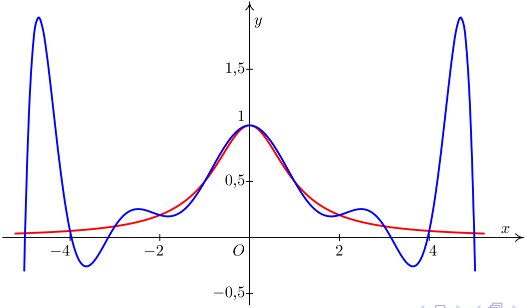
Aproximujte funkci $y = \frac{1}{x^2+1}$ polynomem v uzlech $x_0 = -0,6$, $x_1 = -0,4$, $x_2 = -0,2$, $x_3 = 0,1$, $x_4 = 0,4$, $x_5 = 0,5$, $x_6 = 1$, $x_7 = 2$.



Více uzlů $\stackrel{?}{=}$ přesnější výsledky

Example

Aproximujte funkci $y = \frac{1}{x^2+1}$ polynomem v uzlech $x_0 = -5$, $x_1 = -4$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, $x_7 = 2$, $x_8 = 3$, $x_9 = 4$, $x_{10} = 5$.



Obsah

Splajn vs. interpolační polynom

Stejnou výchozí situaci – je dáno několik bodů $[x_i, f_i]$, $i = 0, 1, \ldots, n$ nebo funkce $f(x)$, kterou máme nahradit – budeme nyní řešit jiným způsobem.

Hledáme-li interpolační polynom, hledáme *jeden* polynom, který nahrazuje (neznámou) funkci na *celém* intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$.

Nyní však budeme hledat *sadu* polynomů, z nichž každý bude nahrazovat (hledanou) funkci jen na intervalu mezi dvěma sousedními uzly.

Definice

Definition

Splajnem řádu k pro uzly $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ nazveme funkci, která

1. je v každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots n-1$ polynom $S_i(x)$ stupně k takový, že $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$ a
2. má v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace až do řádu $k-1$ včetně.

Podle hodnoty k mluvíme o lineárním, kvadratickém, kubickém atd. splajnu.

Definice

Definition

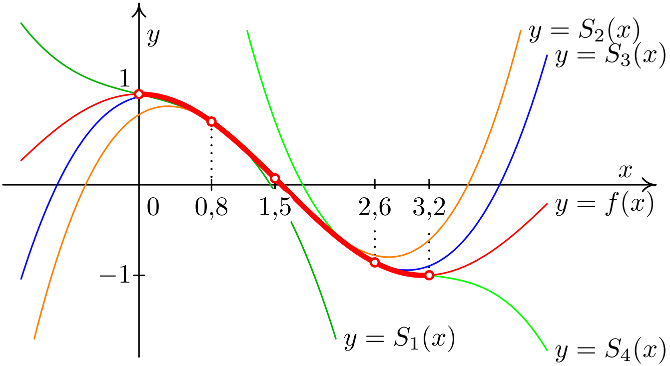
Přirozeným kubickým splajnem pro uzly $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ nazveme funkci, která

1. je v každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots n-1$ kubickým polynom $S_i(x)$ takový, že $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$,
2. má v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité první a druhé derivace a
3. vyhovuje okrajovým podmínkám (viz skripta).

Splajn

Example

V bodech $x_0 = 0$, $x_1 = 0,8$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 2,6$, $x_4 = 3,2$ nahraďte funkci $y = \cos x$ přirozeným kubickým splajnem.



Důležité

Splajn je soustava polynomů, jejíž každý polynom nahrazuje hledanou funkci jen na jedné části intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$.

Proto musíme vždy uvést, na jakém intervalu je příslušný polynom $S_i(x)$ „platný".

Obsah

Hledaný tvar splajnu

Předpokládejme, že hledáme splajn na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ a že máme uzlové body $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. Na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $i = 0, 1, \ldots n-1$ budeme hledat polynom

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$

- Hledáme tedy tolik polynomů, kolik je počet uzlů –1.
- V každém polynomu musíme vypočítat 4 koeficienty.
- Některé koeficienty (včetně d_i) mohou být rovné nule.

Výpočet koeficientů

Pro koeficienty platí následující vztahy:

- $a_i = f(x_i)$, resp. $a_i = f_i$ pro $\forall i \in \{0, 1, \dots n-1\}$,
- $c_0 = 0$, $c_n = 0$ (koeficient c_n se v polynomech $S_i(x)$ nevyskytuje, ale jeho hodnotu budeme potřebovat v dalších výpočtech).

Výpočet koeficientů

Výsledný splajn závisí na vzdálenosti uzlů a rozdílech funkčních hodnot v sousedních uzlových bodech. Označíme proto $h_i = x_{i+1} - x_i$ a $\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, resp. $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Pro koeficienty dále platí následující

vztahy:

- $h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(\frac{\Delta f_i}{h_i} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_{i-1}})$ pro $i = 1, \ldots n-1$,
- $b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3} h_i$, resp. místo $f(x_i)$ podle zadání f_i, pro $i = 0, 1, \ldots n-1$,
- $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$ pro $i = 0, 1, \ldots n-1$.

Výpočet koeficientů – shrnutí

1. Koeficienty a_i píšeme přímo ze zadání.
2. Pro výpočet ostatních koeficientů potřebujeme znát hodnoty h_i a Δf_i.
3. Koeficienty c_i, $i = 1, \dots n - 1$ určíme jako řešení soustavy lineárních rovnic (*jak?*), přičemž $c_0 = 0$ a $c_n = 0$.
4. Koeficienty b_i a d_i dopočítáme pomocí dříve vypočtených koeficientů.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Možnosti opakování

Pomocí následujících mapletů si můžete usnadnit některé dílčí výpočty, zkontrolovat jejich správnost, případně si připomenout teoretické poznatky potřebné pro aplikaci numerických metod probíraných v této kapitole.

1. Výpočet funkčních hodnot
2. Úprava algebraických výrazů
3. Grafy funkcí

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

Před spuštěním tohoto souboru je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks. Nezapomínejte, že tyto aplikace nemohou (a ani to nedělají!) postihnout všechny nuance probírané látky!

1. Interpolační polynom a splajn

Příklady pro samostatnou práci

Při řešení následujících příkladů zkuste aplikovat různé strategie řešení. Všímejte si, jaká je jejich časová náročnost. Můžete využívat výpočetní techniku. Sami zvažte, nakolik při řešení těchto zadání využijete numerické metody, a jakou roli při řešení hrají teoretické poznatky získané v jiných předmětech.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Jsou dány tyto body v rovině:

x	-1	1	2	a
y	-0,364	4,356	22,016	0

Doplňte a (s přesností na 2 desetinná místa) tak, aby polynom $P_3(x) = x^3 + 3,1x^2 + 1,36x - 1,104$ byl interpolačním polynomem pro výše uvedené body. *Hodnoty v řádku x přitom nemusejí být uspořádány vzestupně!*

Příklady pro samostatnou práci

Example

Jsou dány tyto body:
$A = [0,4; -2,8], B = [0,9; -1,3], C = [2; 2], D = [3,1; 5,3]$.
Proložte jimi interpolační polynom. Výsledek udejte ve tvaru
$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Okomentujte získaný polynom. Pak určete
$P_n(0)$.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Najděte polynom, který na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ nahradí funkci $y = \sin x$. Ke konstrukci polynomu využijte uzlové body $x_i \in \{0,2; 1; 1,7; 2,4; 3\}$. Polynom zapište ve tvaru $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Aproximace funkcí: metoda nejmenších čtverců

Matematika 3

Obsah

Dosud známé vs. nový pohled

Již víme, jak najít interpolační polynom, resp. splajn. Ukázali jsme si, jaký je mezi těmito koncepty rozdíl: interpolační polynom je jedno vyjádření platné pro celý interval $I = \langle x_0, x_n \rangle$, zatímco splajn je soustava polynomů, kde každý polynom nahrazuje hledanou funkci jen na části intervalu I mezi dvěma sousedními uzly.

V obou úlohách byly funkční hodnoty v uzlových bodech směrodatné – interpolační polynom i splajn jsme konstruovali tak, aby procházely zadanými body $[x_i, f_i]$, resp. $[x_i, f(x_i)]$.

Dosud známé vs. nový pohled

Tento požadavek však v praxi nemusí být vůbec vhodný.

- Můžeme mít velkou sadu výsledků (řádově tisíce nebo více) hodnot vycházejících z téže (např. lineární) závislosti.
- Hodnoty f_i mohou být získané experimentálně (např. měřením) nebo zjištěny nějakým numerickým výpočtem, tj. mohou být zatížené chybou. Pokud bychom hledali vyjádření, které body $[x_i, f_i]$, resp. $[x_i, f(x_i)]$ v takovém případě prochází, chybu bychom kopírovali, resp. zvětšovali.
- Může se stát, že měření v některém uzlovém bodě zopakujeme a získáme jinou hodnotu f_i (zachytit skutečnost, že je dáno $[x_i, f_i]$ a $[x_i, f_j]$, kde $j \neq i$, interpolačním polynomem ani splajnem nelze).
- Typ závislosti sice neznáme, ale problém chceme zjednodušit (např. *linearizovat*)

Dosud známé vs. nový pohled

Jestliže tedy víme, že hodnoty f_i jsou nepřesné, příp. je zjevně nevhodné konstruovat interpolační polynom nebo splajn (mnoho bodů a známý typ závislosti), musíme při hledání neznámé funkce $f(x)$ postupovat jinak.

Formulace problému

Je dána množina bodů $[x_i, y_i]$, $i = 0, \ldots, n, n \geq 1$. Je známo, že hodnoty y_i jsou nepřesné. Najděte funkci $y = f(x)$, která „co nejlépe“ vystihuje skutečnou závislost proměnné y na proměnné x.

Otázky

1. V jakém tvaru budeme danou funkci hledat, resp. jak se ve výsledném tvaru aproximace promítne naše zkušenost? (*Vysvětlení:* Z teoretických poznatů např. plyne, že v dané situaci je hledaná závislost lineární. Jak zajistíme, že závislost, kterou najdeme, bude také lineární?)
2. Co znamená „co nejlépe“?
3. Jak budou vypadat vlastní vzorce pro výpočet, resp. jaké další vstupní údaje budeme potřebovat znát?

Označení

Budeme používat následující označení:

- $[x_i, y_i]$ bude značit dvojici [*uzlový bod*, *naměřená hodnota v uzlovém bodě*],
- skutečnou (tj. neznámou) závislost budeme hledat jako funkci $y = f(x)$, tj. skutečné, resp. analyticky získané, hodnoty v uzlových bodech x_i budeme označovat jako $y(x_i)$,
- ve vzorcích budeme předpokládat, že $i = 0, \dots n$, $n \geq 1$,
- chybou aproximace v uzlovém bodě x_i budeme rozumět rozdíl $e_i = y_i - y(x_i)$.

Typ hledané závislosti

Zmiňovanou „co nejlepší“ závislost hledáme v takovém tvaru, jaký odpovídá teoretickým poznatkům.

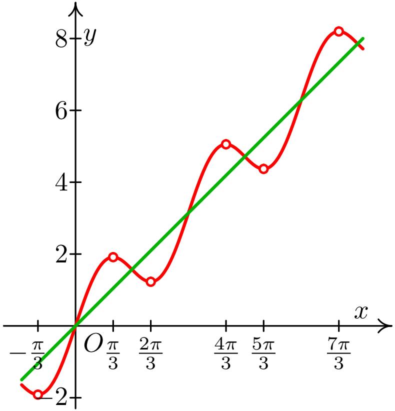
Může se jednat o závislost polynomiální (lineární, kvadratickou, kubickou atd.), o závislost exponenciální, hledaná funkce může být periodická (tj. lze ji dobře popsat pomocí funkcí sinus a kosinus) apod.

- Ze zkušenosti víme, jaký typ závislosti máme v dané situaci hledat. Podle toho postupujeme dále.

Mluvíme o *aproximaci metodou nejmenších čtverců pomocí přímky, pomocí paraboly, pomocí křivky* $y = ka^x$ atd.

Typ hledané závislosti

Při nějakém měření jsme získali vyznačené body. Je skutečná závislost *y* na *x* lineární nebo periodická?



Určení „co nejlepší“ aproximace

Jsou dány body $[x_i, y_i]$. Hledáme závislost y na x. Za „nejlepší“ aproximaci považujeme takovou, kde výsledná odchylka $\rho^2 = \sum_{i=0}^{n} e_i^2$ je minimální.

Vzorce, které budeme odvozovat, budou prostředky matematické analýzy hledat minimum funkce ρ^2.

Lze postupovat i jiným způsobem. *(viz plná verze skript, kap. „Jiný způsob odvození vzorců“)*

Obsah

Myšlenka

Rovnice přímky je

$$y = c_0 + c_1 x,$$

tedy tvar funkce ρ^2 je

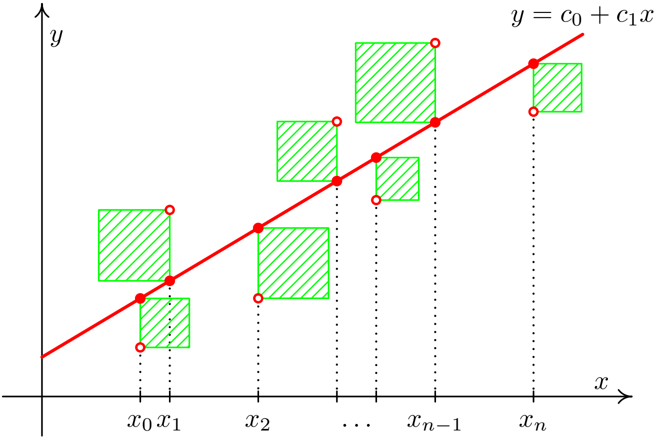
$$\rho^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - c_0 - c_1 x_i)^2.$$

Jedná se o funkci dvou proměnných c_0, c_1 – proto označení ve skriptech jako $\rho^2(c_0, c_1)$. Minimum funkce více proměnných určíme pomocí parciálních derivací podle všech proměnných.

(odvození vzorce)

Geometrická interpretace

Hledáme přímku, pro niž je součet obsahů čtverců minimální.



Vzorec

Hledáme přímku $y = c_0 + c_1 x$, kde c_0 a c_1 jsou řešením soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
c_0(n+1) + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i &= \sum_{i=0}^{n} y_i \\
c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i
\end{aligned}
$$

v níž $n+1$ je počet uzlů a příslušné sumy jsou čísla, která plynou ze znalosti hodnot $[x_i, y_i]$.

Obsah

Myšlenka

Uvažme obecný polynom druhého stupně, tj. polynom

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2,$$

tedy tvar funkce ρ^2 je

$$\rho^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - c_0 - c_1 x_i - c_2 x_i^2)^2.$$

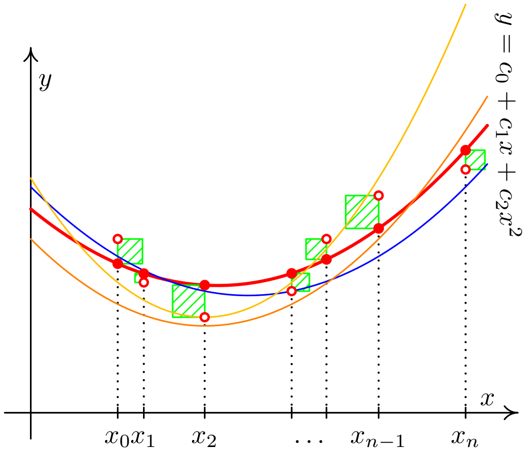
Minimum této funkce určíme analogicky jako v případě přímky. O parabole mluvíme proto, že vyjádření funkce y lze upravit na tvar

$$y = c_2 \left[\left(x + \frac{c_1}{2c_2} \right)^2 - \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \right],$$

což je rovnice paraboly.

Geometrická interpretace

Hledáme parabolu, pro niž je součet obsahů čtverců minimální.



Vzorec

Hledáme parabolu $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, kde c_0, c_1 a c_2 jsou řešením soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
c_0(n+1) + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=0}^{n} y_i \\
c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 &= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\
c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 &= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i
\end{aligned}
$$

v níž $n+1$ je počet uzlů a příslušné sumy jsou čísla, která plynou ze znalosti hodnot $[x_i, y_i]$.

Obsah

Myšlenka

- V případě aproximace pomocí přímky (= polynomu stupně 1) hledáme minimum funkce dvou proměnných.
- V případě aproximace pomocí paraboly (= polynomu stupně 1) hledáme minimum funkce tří proměnných.

V případě aproximace pomocí polynomů vyšších stupňů postupujeme analogicky. Dostáváme analogické vzorce.

Vzorec

Hledáme polynom $P_m(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$, kde

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_0(n+1) & + & c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i & + & \dots & + & c_m \sum_{i=0}^{n} x_i^m & = & \sum_{i=0}^{n} y_i \\
c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i & + & c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & + & \dots & + & c_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & = & \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\
 & & & & & & & \vdots & \\
c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^m & + & c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & + & \dots & + & c_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} & = & \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i
\end{array}$$

Obsah

Příklad

Zkoumaná závislost nemusí být polynomiální (viz úvodní obrázek).

Example

Jestliže hodnoty vykazují periodické chování, můžeme aproximaci hledat např. ve tvaru

$$y = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x .$$

Formulace problému

Jsou dány body $x_i, \ i = 0, \ldots n$, a funkční hodnoty v nich označené y_i. Dále jsou dány funkce $\varphi_i, i = 0, \ldots, m, \ m < n$. (Pro přímku by to byly funkce $\varphi_0(x) = 1$ a $\varphi_1(x) = x$, pro parabolu $\varphi_0(x) = 1 \ \varphi_1(x) = x$ a $\varphi_2(x) = x^2$.) Mezi všemi funkcemi tvaru

$$P_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x),$$

kde $c_0, \ldots, c_m$ jsou reálná čísla, hledáme takovou, pro niž kvadratická odchylka

$$\rho^2(c_0, \ldots c_m) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P_m(x_i))^2$$

nabývá minimální hodnoty. Takovou funkci pak nazýváme *nejlepší aproximací* experimentálních dat $y_0, \ldots y_n$ v dané třídě funkcí *ve smyslu metody nejmenších čtverců*.

Obsah

Nelineární případy

Dosud jsme mluvili pouze o tzv. *lineární* aproximaci, kdy hledaná funkce byla lineární kombinací známých funkcí $\varphi_i(x)$.

V praxi se však můžeme setkat i s nelineárními případy.

Example

- $y = c_0 + c_1 \cos c_2(x + c_3)$

Příkladem je aproximace pomocí křivky $y = ac^x$.

Aproximace pomocí křivky $y = a\mathrm{e}^{bx}$, resp. $y = ac^x$

Protože platí

$$ac^x = a\mathrm{e}^{\ln c^x} = a\mathrm{e}^{x \ln c} = a\mathrm{e}^{bx},$$

kde $b = \ln c$, budeme se zabývat jen aproximací pomocí křivky $y = a\mathrm{e}^{bx}$ nebo $y = ac^x$.

Aproximace pomocí křivky $y = ac^x$

Uvažme funkci tvaru

$$y = ac^x,$$

tedy tvar funkce $\rho^2(a, c)$ je

$$\rho^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - ac^{x_i})^2.$$

Pokud bychom postupovali analogicky jako v předcházejících případech, získáme soustavu dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých a, c *(ukázka)*.

Úlohu tedy převedeme na případ aproximace přímkou.

Aproximace pomocí křivky $y = ac^x$

Rovnici $y = ac^x$ zlogaritmujeme a dostáváme

$$\ln y = \ln a + x \ln c.$$

Po substituci $c_0 = \ln a$, $c_1 = \ln c$ řešíme stejnou úlohu jako u aproximace přímkou.

Ve vzorcích se místo y_i bude vyskytovat $\ln y_i$. Příslušné logaritmy samozřejmě musejí existovat! Jestliže pracujeme s vyjádřením $y = a\mathrm{e}^{bx}$, získáme tvar $\ln y = \ln a + bx$.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Možnosti opakování

Pomocí následujících mapletů si můžete usnadnit některé dílčí výpočty, zkontrolovat jejich správnost, případně si připomenout teoretické poznatky potřebné pro aplikaci numerických metod probíraných v této kapitole.

1. Analytické řešení soustavy lineárních rovnic
2. Výpočet determinantu
3. Úprava algebraických výrazů
4. Grafy funkcí

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

Před spuštěním tohoto souboru je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks. Nezapomínejte, že tyto aplikace nemohou (a ani to nedělají!) postihnout všechny nuance probírané látky!

1. Metoda nejmenších čtverců

Příklady pro samostatnou práci

Při řešení následujících příkladů zkuste aplikovat různé strategie řešení. Všímejte si, jaká je jejich časová náročnost. Můžete využívat výpočetní techniku. Sami zvažte, nakolik při řešení těchto zadání využijete numerické metody, a jakou roli při řešení hrají teoretické poznatky získané v jiných předmětech.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je dána elipsa se středem v bodě $[0, 0]$, hlavní poloosou délky 5 a vedlejší poloosou délky 2. V bodech s x–ovými souřadnicemi $-2, -1, 0, 1, 2$ aproximujte část elipsy ležící nad osou x nejvhodnější parabolou (ve smyslu metody nejmenších čtverců).

Příklady pro samostatnou práci

Example

Zvolte si sami 6 bodů v rovině rozložených kolem nějaké přímky. Metodou nejmenšch čtverců najděte nejvhodnější přímku, kterou lze těmito body proložit. Poté udělejte totéž pro body rozložené kolem paraboly a kolem vhodné exponenciální křivky.

Numerické derivování

Matematika 3

Obsah

Formulace problému

- Je dána množina bodů $[x_i, f_i]$, $i \geq 2$. Najděte derivaci neznámé funkce $f(x)$, pro kterou platí $f(x_i) = f_i$ pro $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$.
- *(alternativně)* Je dána taková funkce $f(x)$, že určit její derivaci analyticky by bylo obtížné. Najděte její derivaci $f'(x)$.

V dalším textu budeme podobně jako ve skriptech používat označování $[x_i, f(x_i)]$. Dále budeme předpokládat, že vzdálenost mezi každými dvěma sousedními uzly je konstantní – budeme ji označovat h a nazývat *krok*.

Dosud známé vs. nový pohled

Z prvního ročníku znáte základní věty o derivování. „Složitá“ funkce většinou znamená totéž co několikanásobně složená funkce. Ty umíme derivovat pomocí věty o derivaci složené funkce. V některých případech může být výpočet nicméně velmi pracný.

Hledat derivaci funkce v situaci, kdy neznáme funkční předpis ale jen několik bodů, jimiž neznámá funkce prochází, však neumíme. Umíme ovšem těmito body proložit interpolační polynom, resp. splajn, resp. najít nejvhodnější závislost metodou nejmenších čtverců.

Nástin metody

Zadanými body proložíme interpolační polynom $P_n(x)$. Derivaci tohoto polynomu prohlásíme za přibližně rovnou derivaci hledané funkce.

Je zřejmé, že s čím větším počtem uzlů budeme pracovat, tím může být vyšší stupeň interpolačního polynomu. Tj. tím komplikovanější vzorce pro numerickou derivaci budeme dostávat. Dále je zřejmé, že budeme-li interpolační polynom derivovat vícekrát, získáme přibližné vyjádření derivací vyšších řádů. Interpolační polynom ale v tom případě musí být dostatečného stupně – tj. musíme pracovat s dostatečným počtem uzlů.

Nástin metody

Interpolační polynom umíme hledat v Lagrangeově a v Newtonově tvaru. Pro účely numerického derivování budeme pracovat s interpolačními polynomy v Lagrangeově tvaru.

Vycházíme ze dvou uzlů

Jsou dány dva body $[x_i, f(x_i)]$, $[x_i + h, f(x_i + h)]$. Interpolační polynom danými těmito body je

$$L_1(x) = f(x_i)\frac{x - x_i - h}{x_i - x_i - h} + f(x_i + h)\frac{x - x_i}{x_i + h - x_i},$$

tj.

$$L_1(x) = \frac{1}{h}\left[f(x_i + h)(x - x_i) - f(x_i)(x - x_i - h)\right]$$

Po zderivování podle x dostáváme

$$L_1'(x) = \frac{1}{h}(f(x_i + h) - f(x_i)),$$

tedy

$$f'(x_i) = f'(x_i + h) = \frac{1}{h}\left(f(x_i + h) - f(x_i)\right).$$

Přesná formulace vzorců

Má-li funkce f druhou derivaci na intervalu $\langle x_i, x_i + h\rangle$, pak existují body $\xi_0, \xi_1 \in \langle x_i, x_i + h\rangle$ tak, že platí

$$\begin{aligned} f'(x_i) &= \frac{1}{h}(f(x_i + h) - f(x_i)) - \frac{h}{2} f''(\xi_0) \\ f'(x_i + h) &= \frac{1}{h}(f(x_i + h) - f(x_i)) - \frac{h}{2} f''(\xi_1) \end{aligned}$$

Členy $\frac{h}{2} f''(\xi_0)$, resp. $\frac{h}{2} f''(\xi_1)$ jsou tzv. *chybové členy*.

V našich výpočtech a úvahách je budeme zanedbávat.

Vycházíme ze dvou uzlů

Je zřejmé, že pomocí interpolačního polynomu daného dvěma uzly nemůžeme takto vypočítat jinou než první derivaci. Navíc nelze očekávat, že derivace získaná tímto postupem bude příliš přesná.

Vycházíme ze tří uzlů

Jsou dány tři body $[x_i - h, f(x_i - h)]$, $[x_i, f(x_i)]$, $[x_i + h, f(x_i + h)]$. Opět sestavíme interpolační polynom v Lagrangeově tvaru a opět jej zderivujeme. Interpolační polynom bude druhého stupně, tj. po zderivování bude na rozdíl od předchozí situace obsahovat x. Dosazením po řadě $x = x_i - h$, $x = x_i$ a $x = x_i + h$ získáme tři vzorce pro první derivaci.

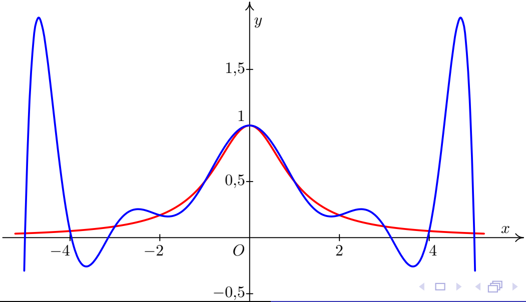
Pokud bychom interpolační polynom zderivovali dvakrát, získali bychom vzorce pro druhou derivaci neznámé funkce f.

Otázky

1. Platí vždy, že derivace hledané funkce se přibližně rovná derivaci interpolačního polynomu?
2. Jaká je přesnost uvedených vzorců?
3. Jakým způsobem lze výsledky zpřesňovat?
4. Jak postupovat v situaci, která odpovídá použití metody nejmenších čtverců namísto interpolačního polynomu, tj. jestliže víme, že hodnoty $f(x_i)$ jsou nepřesné?

Problém využití interpolačního polynomu

Některé interpolační polynomy (zejména vyšších stupňů) neposkytují dobré aproximace hledaných funkcí. Pak neplatí, že $f'(x) \doteq P_n'(x)$. Srovnejte např. hodnotu derivace v bodě $x = 4$ u hledané funkce (červeně) s hodnotou derivace interpolačního polynomu sestaveného z hodnot v uzlech $x_0 = -5, x_1 = -4, \ldots, x_{11} = 5$ (modře).



Příklad

Example

Je dána funkce $y = \frac{1}{x}$. Určete $y'(2)$.

Přesná hodnota je $y'(2) = -0,25$. Jestliže použijeme $h = 0,2$, pak získáme tyto výsledky:

- $y'(2) = -0,2273$ podle vzorce vycházejícího z interpolačního polynomu pro dva uzly a $x_0 = 2, x_1 = 2,2$,
- $y'(2) = -0,2778$ podle vzorce vycházejícího z interpolačního polynomu pro dva uzly a $x_0 = 1,8, x_1 = 2$,
- $y'(2) = -0,2525$ podle vzorce vycházejícího z interpolačního polynomu pro tři uzly a $x_0 = 1,8, x_2 = 2,2$.

Zpřesňování výsledků

- Ve vzorcích pro numerické derivace se ve jmenovateli objevuje krok h. Zmenšováním kroku h tedy větší přesnosti nedosáhneme, protože budeme dělit malým číslem a při zaokrouhlování se můžeme dopustit velkých chyb.
- Vzorce vycházející z interpolačních polynomů pro velký počet uzlů naopak budou příliš složité. Navíc, interpolační polynom vysokého stupně nemusí dobře aproximovat neznámou funkci (viz výše).

Když interpolační polynom není vhodný

Jestliže víme, že hodnoty $f(x_i)$ jsou zatížené chybou, a tedy není vhodné použít interpolační polynom (ani splajn), zderivujeme vyjádření neznámé funkce získané metodou nejmenších čtverců.

Numerické integrování

Matematika 3

Obsah

Formulace problému

Je dána funkce $f(x)$ a čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a < b$.

Určete $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Problém

Při integrování jste v 1. ročníku využívali hodnoty *primitivní funkce* v integračních mezích, tj. řekli jste, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

kde $F'(x) = f(x)$. Avšak:

- Existují funkce, k nimž primitivní funkce neexistuje.
- I když primitivní funkce k dané funkci existuje, může být její nalezení velmi obtížné.
- Funkce $f(x)$ nemusí být zadána předpisem ale např. výčtem dvojic $[x_i, f_i]$ (viz kapitola o numerickém derivování).

V těchto případech je použití analytických postupů integrování nemožné, příp. velmi náročné.

Příklady problémů

Následující výsledky byly získány v softwaru Maple. Sami si dohledejte v nápovědě, co přesně znamenají.

Example

- $\int \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x)$
- $\int \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\mathrm{x}}\right)$
- $\int \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + x \ln\left(1 - \mathrm{e}^x\right) + \mathrm{polylog}(2, \mathrm{e}^x)$

Příklady problémů

Navíc bylo pro dané typy funkcí nutné znát vhodnou strategii integrování.

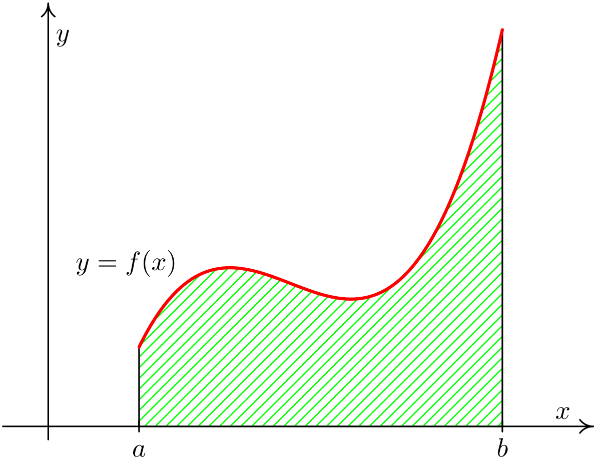
Example

- $\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ integrujeme pomocí *metody per partes*
- $\int 4\sin 2x + 3\mathrm{d}x$ lze integrovat *přímo*
- $\int \frac{x}{x^2+3x+4}\mathrm{d}x$ je racionální lomená funkce, tedy lze buď provést rozklad na parciální zlomky (pokud je to možné) a pak integrovat nebo podle známých pravidel zvolit vhodnou *substituci*
- $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ řešíme pomocí *substituce* $\mathrm{e}^x = t$
- atd.

Nástin metod

Při numerické integraci nebudeme k zadané funkci hledat primitivní funkci, ale využijeme skutečnosti, že $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ je roven obsahu plochy vymezené funkcí $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.

Připomenutí významu určitého integrálu



Nástin metod

Podobně jako u numerického derivování řekneme, že numericky získaný určitý integrál je přibližně roven příslušnému integrálu z interpolačního polynomu, tj. že platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x.$$

Alespoň dva uzlové body, z nichž budeme sestavovat interpolační polynom, známe vždy – jedná se o body $x_0 = a$, $x_n = b$. Další uzly můžeme doplnit podle potřeby.

Budeme pracovat s interpolačním polynomem v Lagrangeově tvaru, který budeme značit $L_n(x)$.

Úmluva

Z důvodu snadné algoritmizace budeme uzlové body x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, volit tak, aby tvořily *pravidelnou síť*, tj. aby

$$x_i - x_{i-1} = h,$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Přitom h budeme nazývat *krok*.

- Toto ale není nezbytně nutné, v reálných případech můžeme postupovat i jinak.

Obsah

Odvození vzorce

Jsou dány body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$. Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy můžeme funkci $f(x)$ přibližně vyjádřit interpolačním polynomem

$$L_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a},$$

tj.

$$L_1(x) = \frac{1}{(a-b)}\Big[f(a)(x-b) - f(b)(x-a)\Big].$$

Odvození vzorce

Po zintegrování podle x dostáváme

$$\int_a^b L_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\left[f(a)\left(\frac{x^2}{2} - bx\right) + f(b)\left(\frac{x^2}{2} - ax\right)\right]_a^b,$$

tj.

$$\int_a^b L_1(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\Big(f(b) + f(a)\Big) \doteq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(úprava podrobně)

Obsah

Odvození vzorce

Jsou dány body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$. K nim doplníme třetí uzel – střed intervalu $\langle a, b\rangle$, který označíme c, tj. $c = \frac{a+b}{2}$. Ze znalosti funkce $f(x)$ dopočítáme hodnotu $f(c) = f(\frac{a+b}{2})$. Z těchto tří bodů poté sestavíme interpolační polynom

$$L_2(x) = f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$

Vzhledem k tomu, že $c = \frac{a+b}{2}$, označme $h = c - a = b - c$. Dále místo a pišme $c - h$ a místo b pišme $c + h$. Označení $f(a)$, resp. $f(b)$ ponecháme. Interpolační polynom je potom tvaru

$$L_2(x) = f(a)\frac{(x-c)(x-c-h)}{2h^2} + f(c)\frac{(x-c+h)(x-c-h)}{-h^2} + f(b)\frac{(x-c+h)(x-c)}{2h^2}$$

Odvození vzorce

Polynom $L_2(x)$ upravíme do tvaru vhodného pro integraci a zintegrujeme podle x. Dostaneme, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \int_a^b L_2(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\Big[f(a) + 4f(c) + f(b)\Big],$$

kde c je střed intervalu $\langle a, b\rangle$.

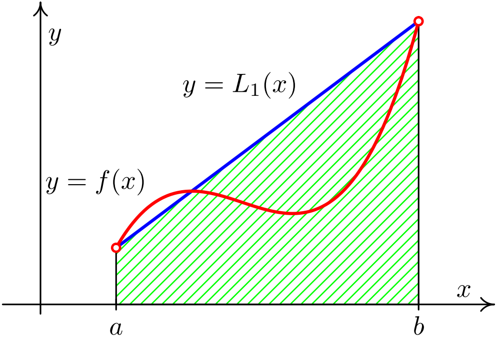
Obsah

Lichoběžníková metoda

Když zadanou funkci $f(x)$ nahrazujeme interpolačním polynomem $L_1(x)$ ve dvou bodech a když říkáme, že $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \int_a^b L_1(x)\mathrm{d}x$, pak za integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ prohlašujeme obsah lichoběžníka s vrcholy $[a, 0], [b, 0], [a, f(a)], [b, f(b)]$.

Geometrická interpretace lichoběžníkové metody

Aproximace interpolačním polynomem (tj. v tomto případě přímkou) však nemusí být vůbec vhodná.



Lichoběžníková metoda

Example

Lichoběžníkovou metodou vypočtěte $\int_2^3 \cos 6x + \ln x \mathrm{d}x$.

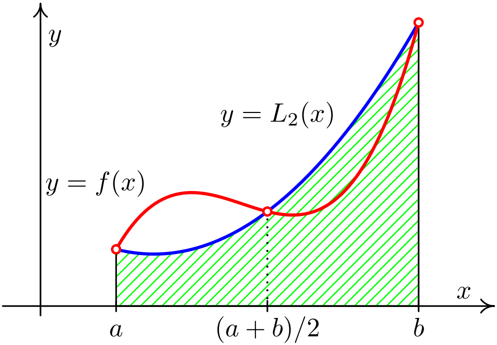
Lichoběžníkovou metodou dostáváme $\int_2^3 \cos 6x + \ln x \mathrm{d}x \doteq 1,65$, zatímco výsledek získaný analyticky je po zaokrouhlení $\int_2^3 \cos 6x + \ln x \mathrm{d}x \doteq 0,87$.

Simpsonova metoda

Když zadanou funkci $f(x)$ nahrazujeme interpolačním polynomem $L_2(x)$ v bodech $a, b, \frac{a+b}{2}$ a když říkáme, že $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \int_a^b L_2(x)\mathrm{d}x$, pak za integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ prohlašujeme plochu omezenou parabolou $L_2(x)$, osou x a přímkami $x = a, x = b$.

Polynom je sice vyššího stupně, ale i v této situaci může docházet k problémům. Numerické řešení předcházejího příkladu získané Simpsonovou metodou je $\int_2^3 \cos 6x + \ln x\mathrm{d}x \doteq 0,65$.

Geometrická interpretace Simpsonovy metody



Červeně je znázorněna funkce, modře interpolační polynom.

Obsah

Newton–Cotesovy vzorce

Přesnějších výsledků lze dosáhnout tím, že budeme brát v úvahu funkční hodnoty ve více uzlových bodech. Z přednášky o aproximaci funkcí víme, že lze postupovat dvěma způsoby:

- hledat *jeden polynom pro celý interval* $\langle a, b\rangle$ nebo
- hledat *sadu polynomů* takovou, že každý z polynomů nahrazuje hledanou funkci jen na části intervalu $\langle a, b\rangle$ mezi dvěma sousedními uzly.

Oba tyto přístupy nyní aplikujeme na numerické integrování. V obou situacích budeme předpokládat, že interval $\langle a, b\rangle$ dělíme na stejné části takové, že interval mezi sousedními uzly x_i, x_{i+1} je délky h. Tomuto číslu budeme říkat *krok*.

Obsah

Newton–Cotesovy vzorce

Jestliže hledanou funkci na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ nahradíme interpolačním polynomem $L_n(x)$ takovým, že k uzlům a, b přidáme další uzly s krokem h, a poté řekneme, že $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x$, dostaneme tzv. *Newton–Cotesovy vzorce*.

- Lichoběžníková i Simpsonova metoda jsou speciální případy Newton–Cotesových vzorců.
- Tento způsob nebudeme dále používat.

(podrobnosti viz plná verze učebního textu)

Obsah

Složené metody

Z 1. ročníku víte, že pro integrování platí věta:

Theorem

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a < c < b$. *Dále nechť* $f(x)$ *je reálná funkce integrovatelná na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Můžeme tedy interval $\langle a, b\rangle$ rozdělit s krokem h a na každou takto vzniklou část aplikovat některou (vždy tutéž) jednoduchou metodu (lichoběžníkovou, Simpsonovu, resp. jinou danou Newton–Cotesovými vzorci). Pak mluvíme o *složené lichoběžníkové metodě*, *složené Simpsonově metodě* apod.

Složená lichoběžníková metoda

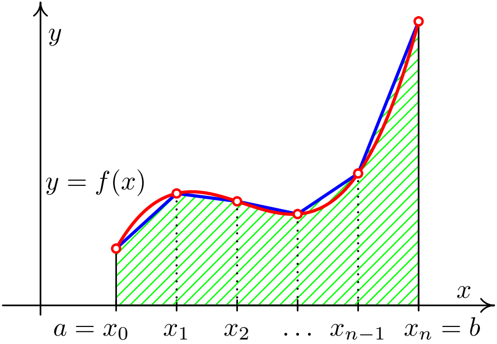
Mějme uzly $a = x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = b$, tj. krok $h = \frac{b-a}{m}$. Pak

$$L_m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2}f(x_m)\right)$$

Dalšího zpřesnění výsledku můžeme dosáhnout jemnějším dělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Nejefektivnější je ze znalosti L_m určit rovnou L_{2m}, protože v takovém případě můžeme většinu hodnot $f(x_i)$ znovu použít. Platí

$$L_{2m} = \frac{1}{2}L_m + \frac{b-a}{2m}\Big(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2m-1})\Big)$$

Geometrická interpretace složené lichoběžníkové metody



Požadujeme-li přesnost výpočtu ε, výpočet nejčastěji ukončujeme, jestliže pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ platí $|L_{2m} - L_m| < \varepsilon$.

Složená lichoběžníková metoda

Example

Složenou lichoběžníkovou metodou pro různá dělení intervalu $\langle 2, 3\rangle$ vypočtěte

$$\int_2^3 \cos 6x + \ln x \mathrm{d}x$$

Dostáváme $L_1 = 1,6480$, $L_2 = 0,9023$, $L_4 = 0,8799$, $L_5 = 0,8776, \ldots, L_8 = 0,8753$. Přitom analyticky získaný výsledek je po zaokrouhlení $\int_2^3 \cos 6x + \ln x \mathrm{d}x \doteq 0,87$.

Složená Simpsonova metoda

Mějme uzly $a = x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = b$, tj. krok $h = \frac{b-a}{m}$.
Dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ volme tak, aby m bylo sudé. Pak

$$S_m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq$$
$$\doteq \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)\Big)$$

(odhad chyby viz skripta)

Obsah

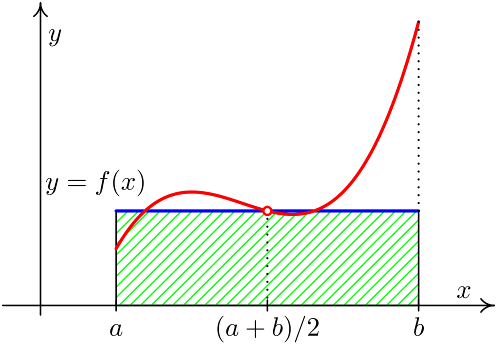
Otevřené metody

Společným rysem všech výše zmiňovných metod je to, že krajní body intervalu $\langle a, b\rangle$ považujeme za uzly kvadratury. Další dělící body dostáváme tak, že interval $\langle a, b\rangle$ dělíme s krokem h. Takovým metodám říkáme *uzavřené*.

Pokud bychom krajní body intervalu $\langle a, b\rangle$ nepovažovali za uzly kvadratury a uzlové body by byly symetricky rozloženy podle středu intervalu $\langle a, b\rangle$, hovořili bychom o tzv. *otevřených metodách*. Dále bychom postupovali stejně jako u uzavřených metod.

Nejjednodušším příkladem otevřených metod je tzv. obdélníková metoda. Otevřenými metodami se nebudeme zabývat.

Geometrická interpretace obdélníkové metody



Otevřené metody

Otevřenými metodami se nebudeme zabývat.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Možnosti opakování

Pomocí následujících mapletů si můžete usnadnit některé dílčí výpočty, zkontrolovat jejich správnost, případně si připomenout teoretické poznatky potřebné pro aplikaci numerických metod probíraných v této kapitole.

1. Výpočet funkčních hodnot
2. Integrování: výpočet určitého integrálu
3. Integrování: hledání primitivní funkce

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

Před spuštěním tohoto souboru je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks. Nezapomínejte, že tyto aplikace nemohou (a ani to nedělají!) postihnout všechny nuance probírané látky!

1. Numerický výpočet určitého integrálu

Příklady pro samostatnou práci

Při řešení následujících příkladů zkuste aplikovat různé strategie řešení. Všímejte si, jaká je jejich časová náročnost. Můžete využívat výpočetní techniku. Sami zvažte, nakolik při řešení těchto zadání využijete numerické metody, a jakou roli při řešení hrají teoretické poznatky získané v jiných předmětech.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je dána funkce $f(x) = 3\cos 2x$. Numericky určete $\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}7} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pracujte různými metodami pro různá dělení. Výsledky srovnávejte s přesným analyticky získaným řešením.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Najděte funkci $f(x)$ a vhodný interval $\langle a, b \rangle$ tak, aby pro výpočet $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ pro dělení intevalu na 2 části

- postačovalo použít lichoběžníkovou metodu,
- bylo naprosto nevhodné použít lichoběžníkovou metodu,
- výsledky získané Simpsonovou a lichoběžníkovou metodou byly zásadně odlišné, avšak právě jeden z nich byl dostatečně přesný.

Za „dostatečnou“ přesnost přitom považujte stav, kdy se numerický výsledek od přesného analyticky získaného výsledku neliší o více než 5%.

Numerické řešení diferenciálních rovnic

Matematika 3

Obsah

Dosud známé vs. nový pohled

Doposud jsme partikulární řešení diferenciálních rovnic hledali ve dvou krocích:

1. Našli jsme obecné řešení zadané diferenciální rovnice.
2. S jeho pomocí a s pomocí zadanách podmínek (počátečních nebo okrajových) jsme našli příslušné partikulární řešení.

Přitom obecné řešení zadané diferenciální rovnice jsme hledali postupem, který závisel na typu zadané rovnice.

Příklady hledání obecného řešení

Example

- Rovnici $y''(x) = x^2$ řešíme *dvojí integrací pravé strany*.
- Rovnice $y'(x) = x \sin(y+1)$ je rovnice se *separovanými proměnnými* $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$, při jejímž řešení využíváme integrování $\int f(x)\mathrm{d}x$ a $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$.
- Lineární diferenciální rovnici $y'(x) + y(x)\sin x = \cos x$ řešíme metodou *variace konstanty*.
- Homogenní diferenciální rovnice řešíme pomocí *vhodné substituce*.
- Bernoulliho rovnici (která je speciálním případem Riccatiho rovnice) řešíme pomocí *jiné vhodné substituce*.

Dosud známé vs. nový pohled

Nyní se nebudeme zabývat řešením konkrétních typů rovnic, ale budeme se věnovat hledání *partikulárního* (tj. jednoho konkrétního) řešení *libovolné* diferenciální rovnice daného řádu.

Omezíme se přitom na obyčejné diferenciální rovnice *prvního řádu*, resp. na tyto rovnice se zadanou *počáteční podmínkou*.

Formulace problému

Najděte řešení počáteční úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, kde y je funkce proměnné x.

- Toto lze např. zapsat také jako $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$.
- V reálných aplikacích se používají i jiné zápisy, např. se uvažuje proměnná t místo x. Místo „generického" matematického x, y se používá označení platné pro daný inženýrský kontext, tj. např. $I(t)$, $v(t)$ apod. Často se místo $y'(x)$ používá zápis $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Otázky

Kromě nalezení vlastního řešení zadané počáteční úlohy musíme vždy umět odpovědět na mnohem důležitější otázky:

1. Je, příp. na jakém intervalu je, zadaná úloha (jednoznačně) řešitelná? Jinými slovy, kdy a za jakých podmínek má vůbec smysl úlohu řešit?
2. Je získané řešení stabilní? Jinými slovy, je řešení, které získáme, relevantní?

(Na otázku 1 odpovíme jen velmi stručně, odpověď na otázku 2 překračuje rámec Bc. studia.)

Existence a jednoznačnost řešení

Velmi důležitou součástí řešením problému, jehož matematickým zápisem je diferenciální rovnice, je otázka *existence a jednoznačnosti řešení*. Tato otázka by měla být zodpovězena vždy, než začneme zadanou diferenciální rovnici, resp. počáteční úlohu, řešit. Problematikou existence a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ se podrobně zabývat nebudeme. Nebudeme dokonce ani definovat, co znamená *jednoznačné řešení* – tento pojem budeme chápat intuitivně. Rovnice, které budeme řešit, budou mít jednoznačné řešení ve smyslu běžně používané definice.

Existence a jednoznačnost řešení

Uvedeme pouze následující větu:

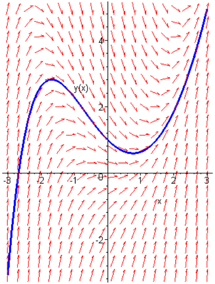
Theorem

Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá na obdélníku $R = \{(x, y) : \ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, \ a > 0, b > 0\}$, pak existuje řešení počáteční úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ na intervalu $\langle x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\rangle$, kde $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$, kde $M = \max_R |f(x, y)|$. Je-li dále funkce $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ohraničená na obdélníku R, pak je toto řešení jediné.

- Testujeme spojitost a ohraničenost funkcí. Jak přesně budeme při tomto ověřování postupovat?
- Věta je implikací, tj. nepopisuje případ, kdy předpoklady splněny nejsou.
- Pro speciální kontexty zadání existují speciální podmínky.

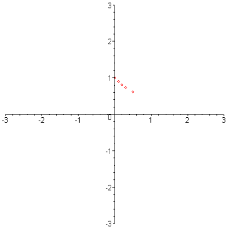
Analytické řešení...

Řešíme-li diferenciální rovnici analyticky, získáme obecné řešení, tj. sadu nekonečně mnoha funkcí (červeně). Z něj vybereme jedno partikulární řešení, tj. jednu konkrétní funkci (modře). *Zobrazena je situace pro rovnice 1. řádu;* $y(0) = 1$.



. . . vs. numerické řešení

Při numerickém řešení získáme pouze *přibližné* hodnoty partikulárního řešení v *předem daných bodech*. Místo funkce, resp. obecného návodu, jak vybrat vhodnou funkci v závislosti na dodatečných podmínkách kladených na řešení, získáme pouze konečný počet dvojic *bod – přibližná hodnota řešení v něm*. *Zobrazena je situace pro stejnou rovnici jako na předcházející obrazovce, podmínka* $y(0) = 1$*, výpočet ukončujeme pro* $x = 0,5$*.*



. . . vs. numerické řešení

Získanými body $[x_i, y_i]$ pak můžeme proložit např. interpolační polynom nebo splajn, abychom získali přibližné vyjádření hledaného řešení zadané počáteční úlohy, resp. hodnoty řešení v jiných než uzlových bodech.

Výhody a nevýhody numerického řešení

Výhody:

- Numerické metody jsou aplikovatelné na libovolný typ rovnice prvního řádu.
- Odpadá nutnost derivování a integrování.
- Algoritmizovatelné.

Nevýhody (= cena za výhody):

- Numericky *nenalezneme funkci*, ale přibližné hodnoty řešení v izolovaných bodech.
- Nutnost interpolace; problém extrapolace.
- Problém výběru vhodné metody, délky kroku, šíření chyb apod. *(později)*

Nástin metod

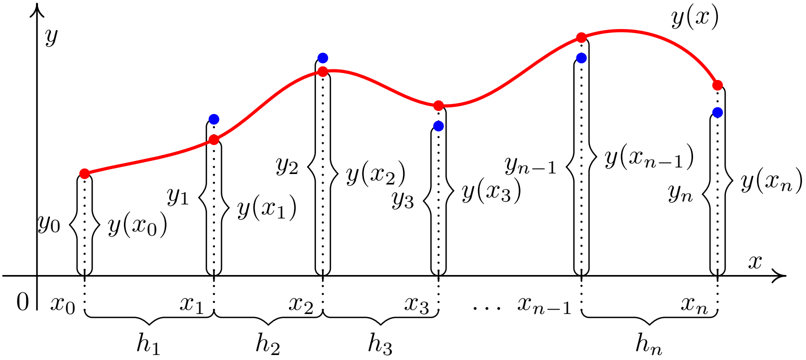
Vyjdeme z formulace úlohy, tj. ze zápisu $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Předem si stanovíme, na jakém intervalu $I = \langle x_0, b\rangle$ budeme hledat řešení. Interval I rozdělíme s krokem h. Tak získáme tzv. *pravidelnou síť* $\{x_0, x_1 \dots, x_n\}$. Dále budeme hledat hodnoty y_i v bodech x_i, $i = 1, \dots, n$.

i	0	1	2	...	n
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_0	**?**	**?**	...	**?**

Jednotlivé metody se budou lišit ve způsobu hledání hodnot označených otazníkem.

Princip numerického řešení

Princip numerického řešení počáteční úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$; $y(x)$ je přesné řešení (červeně), numericky získáme přibližné hodnoty y_i v bodech x_i (modře), které se ovšem neshodují s hodnotami $y(x)$ v bodech x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ (červeně).



Obsah

Eulerova metoda

V zadání úlohy $y' = f(x, y)$ nahradíme derivaci y' numerickou derivací podle jednoho ze vzorců, které jsme odvodili na přednášce o numerickém derivování. Dostáváme

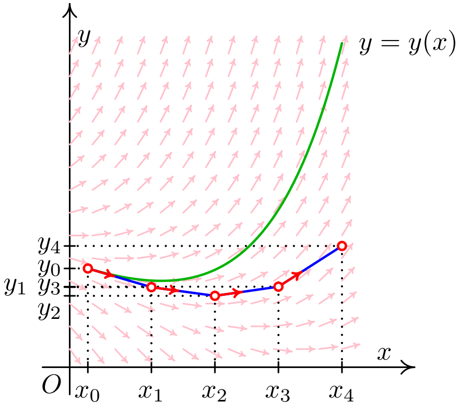
$$\frac{1}{h}\Big[y(x_{i+1}) - y(x_i)\Big] \doteq f(x_i, y(x_i)),$$

tj. nahradíme-li hodnotu $y(x_i)$ přibližnou hodnotou y_i

$$y_{i+1} \doteq y_i + hf(x_i, y_i)$$

pro $i = 1, \dots, n-1$, přičemž y_0 známe z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$.

Eulerova metoda



Funkce $y(x)$ (zeleně) je hledaným analytickým řešením zadané počáteční úlohy, světle červeně je zakresleno směrové pole. Bod $[x_0, y_0]$ viz počáteční podmínka, body x_i jsou uzly sítě, hodnoty y_i získány Eulerovou metodou.

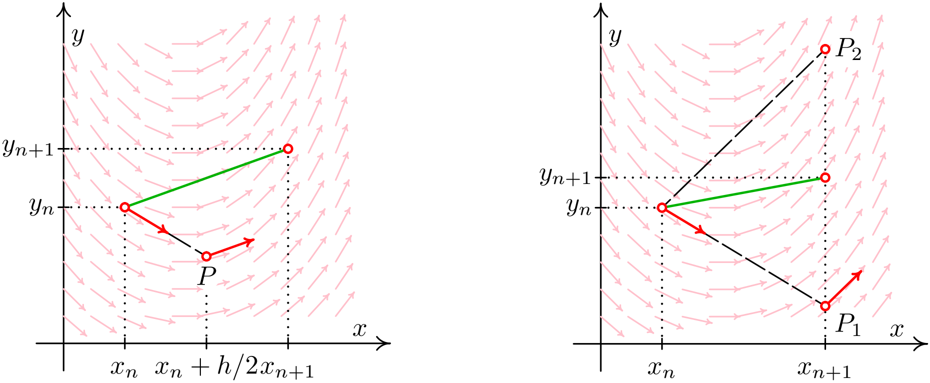
Nástin metod

U Eulerovy metody postupujeme tak, že hodnotu y_{i+1} získáme z numerického vyjádření hodnoty první derivace v bodě x_i.

Mezi uzly x_i a x_{i+1} se však hodnota derivace hledané funkce (a tedy i řešení dané počáteční úlohy) může dost podstatně změnit. To hrozí zejména v případech velkého h.

Budeme proto hledat způsoby, jak hodnotu y_{i+1} získat „sofistikovaněji“.

Geometická interpretace



Modifikace Eulerovy metody

Výše uvedeným obrázkům odpovídají následující vzorce.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1) \\ y_{i+1} &= y_i + hk_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + hk_1) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Mluvíme o tzv. *první* a *druhé modifikaci Eulerovy metody*.

Metoda Rungeho–Kutty

Dalšími, ještě „sofistikovanějšími“, postupy bychom dostávali podobně vypadající vzorce. Všechny by byly tvaru

$$y_{i+1} = y_i + h(w_1 k_1 + \ldots + w_s k_s),$$

kde $k_1 = f(x_i, y_i)$, čísla k_i, $i = 2, \ldots, s$ jsou funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ ve vhodných bodech a číslo s je předem dané.

Tyto vzorce se souhrnně nazývají *metoda Rungeho–Kutty*. Eulerova metoda a její modifikace jsou speciálním případem metody Rungeho–Kutty.

Metoda Rungeho–Kutty

Nejčastěji se v praxi používá metoda Rungeho–Kutty 4. řádu.

Vzorce a definice pojmu „řád metody“ viz skripta.
(u zkoušky bude vyžadováno)

Obsah

Nástin metod

U všech dosavadních metod jsme postupovali tak, že jsme hodnotu y_{i+1} určili ze znalosti y_i, tj. v následující tabulce jsme hledali hodnoty označené otazníkem.

i	0	1	2	...	n
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_0	**?**	**?**	...	**?**

Nástin metod

Hodnotu y_{i+1} je však možné (a přesnější) určit ze znalosti více (v tabulce $k+1$) předcházejících hodnot. Příslušná tabulka tedy může vypadat takto:

i	0	1	...	k	$k+1$	...	n
x_i	x_0	x_1	...	x_k	x_{k+1}	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_k	**?**	...	**?**

Problém

Jak získat hodnoty $y_0, \ldots, y_k$?

Řešení

Jestliže hledáme řešení počáteční úlohy, resp. diferenciální rovnice prvního řádu, můžeme dodat pouze jednu počáteční podmínku. Nelze tedy udávat hodnoty řešení v dalších bodech, tj. úlohu **nelze** zformulovat ve znění: „*Najděte řešení diferenciální rovnice* $y' = f(x, y)$*, kde* $y(x_0) = y_0, \dots, y(x_k) = y_k$."

Chybějící hodnoty proto musíme dopočítat nějakou jednokrokovou metodou. Nejčastěji volíme metodu Rungeho–Kutty 4. řádu.

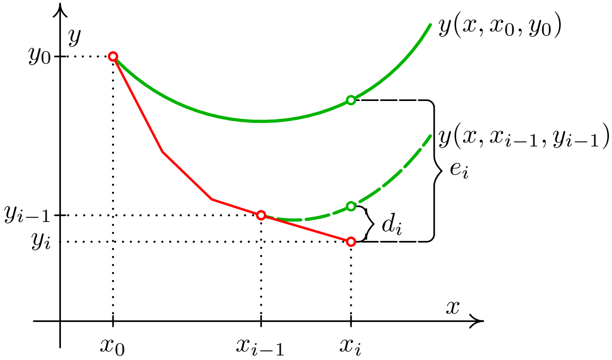
Podrobnosti

(podrobnosti viz plná verze skript).

Obsah

Šíření chyb

V každém kroku každé z metod se dopouštíme lokální chyby d_i, protože derivaci y' nahrazujeme nepřesnou hodnotou. Chyby se tak ve výpočtu mohou šířit (globální chyba e_i).



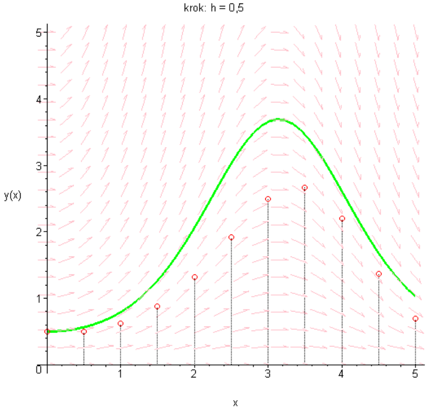
Chyba souvisí s délkou kroku h

Example

Řešením počáteční úlohy $y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$ je funkce $y = 2 - 2x + x^2 - e^{-x}$. Numerické řešení na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ bylo získáno Eulerovou metodou s krokem $h = 1$, $h = 0,5$ a $h = 0,25$.

Řešení je zobrazeno na následující obrazovce.

Chyba souvisí s délkou kroku h



Obsah

Něco za něco...

- Řešit diferenciální rovnice prvního řádu analyticky je sice pracné, ale získáme obecné řešení, resp. libovolné partikulární řešení. Řešení získáme jako *funkci*. Pokud chceme zjistit hodnotu řešení v libovolném bodě nějakého přípustného intervalu, stačí dosadit do funkčního předpisu.

Něco za něco...

- Řešit diferenciální rovnice prvního řádu numericky může být relativně jednoduché (Eulerova metoda) nebo sice pracné (ne však obtížné) ale jednoduše algoritmizovatelné (metody Rungeho–Kutty, vícekrokové metody). Získáme však pouze přibližné hodnoty řešení v předem daných bodech.
- Čím delší je interval, na němž chceme znát řešení, tím více kroků dané metody musíme provést. Velký krok totiž znamená velké šíření velkých chyb.
- Chceme-li zjistit předpokládanou hodnotu řešení v jiném než uzlovém bodě, musíme získaným numerickým řešením proložit interpolační polynom nebo splajn.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Možnosti opakování

Pomocí následujících mapletů si můžete usnadnit některé dílčí výpočty, zkontrolovat jejich správnost, případně si připomenout teoretické poznatky potřebné pro aplikaci numerických metod probíraných v této kapitole.

1. Výpočet funkčních hodnot
2. Určení typu diferenciální rovnice
3. Separovatelné diferenciální rovnice
4. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu
5. Rozhodnutí, zda funkce je nebo není řešením dané diferenciální rovnice
6. Derivování
7. Integrování

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

Před spuštěním tohoto souboru je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks. Nezapomínejte, že tyto aplikace nemohou (a ani to nedělají!) postihnout všechny nuance probírané látky!

1. Jednokrokové numerické metody řešení počátečních úloh

Příklady pro samostatnou práci

Při řešení následujících příkladů zkuste aplikovat různé strategie řešení. Všímejte si, jaká je jejich časová náročnost. Můžete využívat výpočetní techniku. Sami zvažte, nakolik při řešení těchto zadání využijete numerické metody, a jakou roli při řešení hrají teoretické poznatky získané v jiných předmětech.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je dána počáteční úloha $y' = e^{3x} + y$, $y(0{,}2) = 0{,}8$. Způsobem známým z předmětu *Matematika 2* najděte hodnotu $y(0{,}8)$. Poté hodnotu $y(0{,}8)$ určete numericky takovou metodou s takovým krokem, aby se výsledky nelišily o více než 10%.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je dána diferenciální rovnice $y' + xy = x^3$ a počáteční podmínka $y(0) = 2$. Srovnejte hodnoty $y(0{,}4)$ získané s krokem $h = 0{,}1$ dvěma různými libovolně zvolenými numerickými metodami. Metody mohou být jak jednokrokové, tak i vícekrokové.

Základy statistického zpracování dat

Matematika 3

Obsah

Základní informace

Ve druhé části předmětu se budeme věnovat *zcela jiné* oblasti matematiky – *pravděpodobnosti a statistice*. Budeme používat *naprosto odlišný* styl výkladu. Zatímco základním rysem numerické matematiky byla *nepřesnost* (kterou jsme často přenášeli i na teoretické odvozování a praktická zadání), základním rysem dalšího výkladu z pravděpodobnosti bude naopak *nutnost být naprosto exaktní*.

V předmětu se budeme věnovat *úvodu* do teorie pravděpodobnosti a statistiky. V této kapitole budeme definovat některé z pojmů, které se běžně používají i mimo kontext odborné matematiky. Budeme se v ní zabývat zejména popisem dat. V dalších kapitolách, ve kterých se již budeme věnovat teorii pravděpodobnosti, budeme s některými z těchto pojmů běžně pracovat.

Obsah

Statistika a popisná statistika

Popisná statistika se zabývá shromažďováním, tříděním a popisem souborů dat. Někdy se pod pojmem *statistika* myslí přímo nashromážděná data, jindy spíše činnost spojená s jejich získáváním a zpracováním. Předmětem statistiky je také hledání zákonitostí v těchto datech a předpověď budoucího vývoje.

Statistické jednotky / soubory / znaky

- Zkoumané objekty nazýváme *statistickými jednotkami*. Množinu všech statistických jednotek nazveme *statistickým souborem*.
- Vlastnosti statistických jednotek vyjadřují *statistické znaky*.
- Zjišťujeme-li u každé statistické jednotky pouze jeden statistický znak, získáváme tak soubor *jednorozměrný*. Zjišťujeme-li dva nebo více znaků a zkoumáme-li jejich vzájemné vztahy, hovoříme o souborech *dvourozměrných*, resp. *vícerozměrných*.

Statistické jednotky / soubory / znaky

Podle rozsahu zkoumané soubory dělíme na:

- *Základní soubor* (populace) – obsahuje všechny vymezené jednotky.
- *Výběrový soubor* (výběr) – obsahuje pouze některé jednotky.

Z vlastností výběrového souboru se snažíme zobecnit závěry na celý základní soubor. Proto si při výběru prvků musíme počínat opatrně, výběrový soubor by měl být reprezentativní.

Statistické jednotky / soubory / znaky

Statistické znaky dělíme na:

- *Kvantitativní* – jsou popsané číselnou hodnotou. Tyto znaky můžeme dále rozdělit na
  - *spojité* – mohou nabývat kterékoli hodnoty z určitého intervalu (např. spotřeba elektřiny),
  - *nespojité (diskrétní)* – mohou nabývat pouze hodnot z určité konečné nebo spočetné množiny , často se jedná o celočíselné hodnoty (např. počet dětí v rodině).
- *Kvalitativní* – jsou popsány slovně.

Zabývat se budeme převážně znaky kvantitativními.

Vymezení problému

V dalším textu budeme zkoumat *jednorozměrný* statistický soubor o celkovém rozsahu n statistických jednotek.

Obsah

Účel

Budeme chtít popsat, *jakých hodnot* zkoumaný znak nabývá.

Absolutní četnost diskrétních znaků

Definition

Předpokládejme, že v souboru o rozsahu n může sledovaný znak x nabývat k různých hodnot (variant) $x_1, x_2, \dots, x_k$. *Četnost* varianty x_i je počet výskytů této hodnoty ve sledovaném souboru a označíme ji n_i, $i = 1, \dots, k$. Pak platí

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

- Místo *četnosti* mluvíme také o *absolutní četnosti*, abychom ji odlišili od tzv. *relativní* četnosti.

Relativní četnost diskrétních znaků

Definition

Relativní četnost varianty x_i zavedeme jako

$$f_i = \frac{n_i}{n}.$$

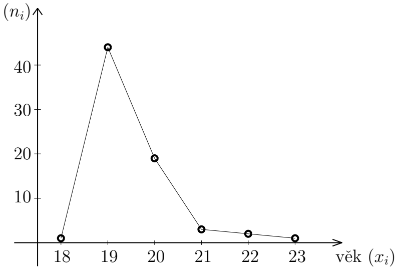
Pro relativní četnosti platí

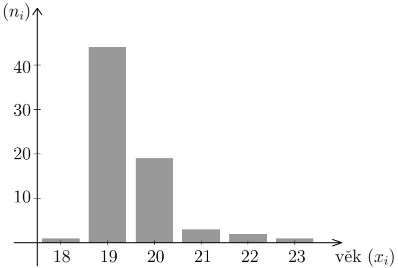
$$f_1 + \cdots + f_k = \frac{n_1}{n} + \cdots \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + \cdots + n_k}{n} = 1.$$

- Relativní četnost se často vyjadřuje v procentech.

Grafické znázornění

Četnosti graficky vyjadřujeme např. *spojnicovým* (vlevo) nebo *sloupcovým* grafem (vpravo).





Tyto grafy jsou vhodné zejména pro nízké počty variant.

Kumulativní četnost

Definition

Kumulativní četnost varianty x_i udává, kolik jednotek má hodnotu znaku menší nebo rovnou vybrané variantě x_i. Rozlišujeme *kumulativní absolutní četnost* a *kumulativní relativní četnost*.

Četnosti spojitých znaků

Pro spojité znaky a pro diskrétní znaky s vysokými počty variant používáme tzv. *intervalové rozdělení četností*. Interval, do něhož všechny získané znaky spadají, rozdělíme na několik částí a všímáme se četností (relativních i absolutních) hodnot z daného subintervalu.

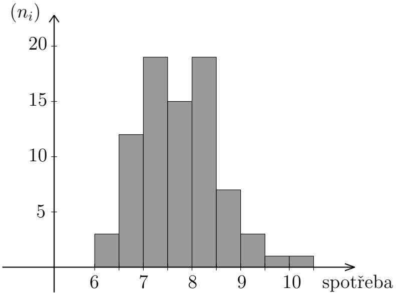
Počet částí intervalu často určujeme podle vzorce

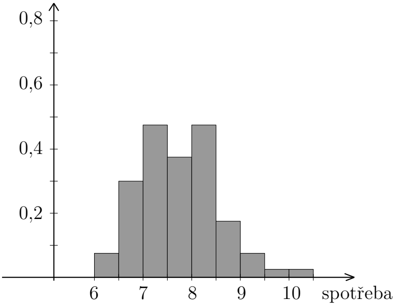
$$k \doteq 1 + \log_2 n \doteq 1 + 3{,}3 \log n,$$

kde n je rozsah souboru.

Grafické znázornění

Ke grafickému znázornění intervalového rozdělení četnosti používáme např. *histogram* (vlevo), příp. *normovaný histogram*, kde součet obsahů obdélníků je 1 (vpravo).





Příklady

Example

Příklady 10.2 a 10.3 z plné verze skript.

Obsah

Účel

Budeme chtít popsat, *kolem jakých hodnot* se zkoumaný znak zhruba pohybuje.

Aritmetický průměr

Definition

Máme-li soubor rozsahu n a zjištěné hodnoty znaku jsou $x_1, \dots, x_n$, pak jejich *aritmetický průměr* je

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Jestliže sledovaný znak x může nabývat k různých hodnot $x_1, x_2, \dots, x_k$ a pro každou hodnotu x_i, $i = 1, \dots, k$, známe její četnost n_i, resp. relativní četnost f_i, pak

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i.$$

Modus

Definition

Modus statistického znaku je hodnota, která se v souboru vyskytuje nejčastěji. Modus značíme $\hat{x}$.

- U spojitých znaků – známe-li intervalové rozdělení četností – stanovujeme tzv. *modální* (nejčetnější) *interval*. Za přibližnou hodnotu modu pak můžeme brát střed modálního intervalu.

Medián

Definition

Medián statistického znaku je prostřední hodnota ze souboru uspořádaného podle velikosti. Značíme jej $\tilde{x}$ nebo též $\tilde{x}_{0,5}$.

Označíme-li prvky uspořádané podle velikosti jako $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a počet prvků n je

- liché číslo, pak je medián přímo prostřední hodnota, tj.

$$\tilde{x} = x_{(n+1)/2}\,.$$

- sudé číslo, je medián průměr ze dvou prostředních prvků, tj.

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{n/2} + x_{(n/2)+1}\right).$$

p–kvantil

Definition

Pro $p \in (0, 1)$ je *kvantil* $\tilde{x}_p$ neboli *p–kvantil* takové číslo, které odděluje nejmenších $p \cdot 100$ % hodnot statistického znaku od největších $(1 - p) \cdot 100$ % hodnot.

Každý software určuje kvantily podle svého vlastního algoritmu. Výsledky získané v různých programech se proto pro daný statistický soubor mohou lišit!

Speciální případy kvantilů

- *Medián* $\tilde{x}_{0,5}$ – dělí soubor seřazený podle velikosti zkoumaného znaku na poloviny.
- *Kvartily* $\tilde{x}_{0,25}, \tilde{x}_{0,5}, \tilde{x}_{0,75}$ – dělí soubor na čtvrtiny. Hodnotu $\tilde{x}_{0,25}$ nazýváme první kvartil, druhý kvartil splývá s mediánem a hodnotu $\tilde{x}_{0,75}$ nazýváme třetí kvartil.
- *Decily* $\tilde{x}_{0,1}, \ldots, \tilde{x}_{0,9}$ – dělí soubor na desetiny. Mluvíme o prvním, druhém, až devátém decilu.
- *Percentily* $\tilde{x}_{0,01}, \ldots, \tilde{x}_{0,99}$ – dělí soubor na setiny.

Obsah

Účel

Budeme chtít popsat, *jak jsou hodnoty ve statistickém souboru rozptýleny*. Zejména nás zajímá, jak jsou hodnoty rozptýleny kolem aritmetického průměru.

Variační rozpětí

Definition

Variační rozpětí je rozdíl největší a nejmenší hodnoty znaku:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Mezikvartilové rozpětí

Definition

Mezikvartilové rozpětí je rozdíl třetího a prvního kvartilu:

$$\tilde{x}_{0,75} - \tilde{x}_{0,25}.$$

Rozptyl a směrodatná odchylka

Definition

Rozptyl statistického znaku *v populaci* označíme σ^2 a definujeme jej jako

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Směrodatnou odchylku definujeme jako

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Rozptyl a směrodatná odchylka

Rozptyl udává, jak se hodnoty statistického znaku průměrně liší od průměrné hodnoty, ovšem ve druhé mocnině. Proto pracujeme se směrodatnou odchylkou. Rozptyl často určujeme pomocí následujícího vztahu:

Theorem

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \overline{x}^2$$

Rozptyl a směrodatná odchylka

Theorem

Rozptyl znaku, který nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_k$ s četnostmi n_i a relativními četnostmi f_i, $i = 1, \ldots, k$, lze vypočítat jako

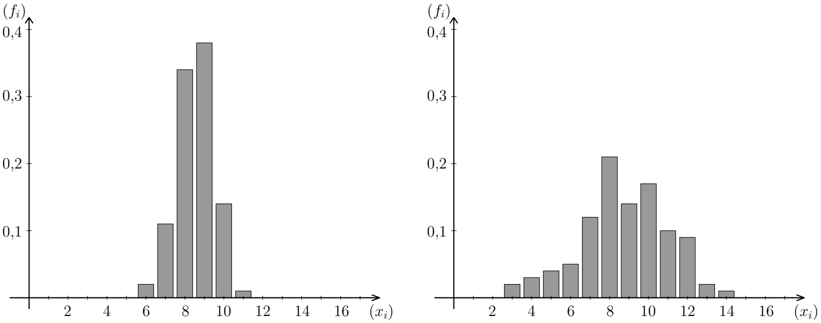
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i\right) - \overline{x}^2,$$

případně jako

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot f_i\right) - \overline{x}^2. \quad (1)$$

Grafické znázornění

Následující dva soubory mají stejný průměr, ale liší se v rozptylu. Na obrázku vlevo je rozptyl menší, na obrázku vpravo větší. Pro ilustraci používáme normovaný histogram.



Populační vs. výběrový rozptyl

Máme-li k dispozici data pouze pro výběrový soubor (ne populaci), mluvíme o tzv. *výběrovém rozptylu* a *výběrové směrodatné odchylce*. Příslušné vzorce jsou mírně odlišné.

Definition

Výběrový rozptyl definujeme jako

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2. \tag{2}$$

Značíme jej jako s^2. *Výběrovou směrodatnou odchylku* definujeme jako odmocninu z výběrového rozptylu,

$$s = \sqrt{s^2} \tag{3}$$

a značíme ji jako s.

Populační vs. výběrový rozptyl

Theorem

Platí

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\,\sigma^2.$$

Tedy

$$s^2 = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \frac{n}{n-1}\,\overline{x}^2.$$

Pravděpodobnostní modely

Matematika 3

Obsah

Obsah

Obsah

Dosud známe vs. nový pohled

O pravděpodobnosti dosud pravděpodobně víte, že:

- věci se dějí s jistou pravděpodobností, která často vyjadřuje subjektivní míru jistoty („Přijdu asi na 80%.“),
- pravděpodobnost se vyjadřuje procenty v rozsahu $0 - 100\%$,
- „vědecky pojatá“ pravděpodobnost příliš nesouvisí s reálným světem a životem (např. pravděpodobnost výhry prvního pořadí ve Sportce),
- s pravděpodobností nějak souvisí statistika,
- statisticky lze dokázat naprosto cokoliv,
- „Věřím jen té statistice, kterou jsem sám zfalšoval.“ (*Winston Churchill*)

Dosud známe vs. nový pohled

Ukážeme si, že pravděpodobnost a statistika mají důležité místo v nejrůznějších oborech lidské činnosti. Budeme přesně definovat základní pojmy pravděpodobnosti a statistiky a ukážeme jejich použití v praxi.

Protože jste se ve svém studiu s teorií pravděpodobnosti dosud nesetkali, budeme se věnovat jen *naprostému úvodu* do této matematické disciplíny. Na různých příkladech budeme

ukazovat rozpor mezi závěry učiněnými na základě intuitivního chápání pravděpodobnosti a závěry podloženými přesným rozborem situace a výpočty.

Intuitivní vs. přesné

Example

Jaká je pravděpodobnost, že hodíme-li kostkou, padne 6?

Intuitivní odpověď: $\frac{1}{6}$

Tato odpověď může ale také nemusí být správná.

Intuitivní vs. přesné

Výsledek $\frac{1}{6}$ ohlásíme, protože předpokládáme, že

- házeme šestistěnnou kostkou (ale existují i dvanáctistěnné nebo dvacetistěnné – např. ve hrách typu „Dračí doupě“),
- uvažujeme kostku, na jejíž každé stěně je uvedeno právě jedno z čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (ale na kostkách např. pro dětské hry mohou být obrázky)
- kostka je dobře vyvážená, tj. všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné,
- kostka nedopadne na hranu, po hodu se neztratí, číslo budeme schopni přečíst a podobné „nepravděpodobnosti“.

Můžeme to ale vždy předpokládat?

Intuitivní vs. přesné

Example

Jaká je pravděpodobnost, že se v běžném platebním styku setkám s něčím podobným jako na obrázku?

Intuitivní odpověď: malá

Správná odpověď: nelze určit

Intuitivní vs. přesné

Protože reálnou situaci převádíme na matematický model, musí být každá úloha vždy přesně zadaná. Na co přesně se v zadání ptáme?

Předpokládejme, že úlohu definujeme jako např.: „Jaká je pravděpodobnost, že *já* dostanu do rukou pětistovku s pěti stejnými číslicemi v sériovém čísle?"

- Víme, kolik bylo vytištěno sérií, v jakém rozsahu, a jaká část z tohoto objemu byla uvolněna do oběhu?
- Víme, jaký objem nominálu byl stažen z oběhu? (opotřebení)
- Jak zohledníme skutečnost, že lidé většinou vybírají peníze ze stejných bankomatů (přitom každý přednostně nabízí jiné bankovky)? Jsem *já* reprezentativní vzorek?

Některé z těchto informací lze (s různou obtížností) dohledat. Některé jsou ovšem tajné. Proto ani na zpřesněnou formulaci zadání odpovědět nelze.

Obsah

Problém

V teorii pravděpodobnosti *konáme pokusy*, všímáme si jejich *výsledků* a ptáme se, jaká je pravděpodobnost, že některé z těchto výsledků nastanou.

Abychom na tuto otázku mohli smysluplně odpovědět, musíme zejména

- vědět, co rozumíme pokusem,
- zajistit, aby pokus byl „náhodný“,
- umět popsat možné výsledky pokusu, zajistit, aby byly „náhodné“, a popsat případné vazby mezi jednotlivými výsledky,
- přesně definovat ty výsledky, které nás zajímají,

a to vše pomocí matematického aparátu v situaci, kdy se zabýváme úlohou z reálného života.

Řešení

Proto se nyní budeme věnovat tzv. *axiomatické teorii pravděpodobnosti*. Ukážeme, že intuitivně chápaný pojem pravděpodobnosti (viz příklad o kostce s výsledkem $\frac{1}{6}$) je jen jednou z možných podob pojmu *pravděpodobnost*.

Kontext zadání

Příklady z pravděpodobnosti často využívají šablonovitá zadání. Hovoří se např. o házení kostkou nebo mincí, tahání karet, kuliček z urny apod. To umožňuje soustředit se na *matematickou podstatu* problému a nerozptylovat pozornost studiem vnějších projevů jednotlivých reálií.

Velmi často se v příkladech hovoří o „výrobcích“ a „zmetcích“. Tato slova jsou synonymem pro slova „pokus“ a „neúspěch“.

V reálných aplikacích jsou ovšem reálie velmi důležité, protože mají vliv na vlastnosti matematického modelu zadání! Znalost reálií však získáte v odborných předmětech.

Kontext zadání

Example

- Jedenkrát hodíme běžnou šetistěnnou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne trojka?
- Malému dítěti, které *čerstvě pozná písmena*, napíšeme šest zkratek: USA, ČR, SRN, EU, IBM, UK. Požádáme jej, aby označilo tu zkratku, která mezi ostatní nepatří. Jaká je pravděpodobnost, že vyřadí zkratku IBM?
- Dítěti, které *právě začalo chodit do školy*, napíšeme šest zkratek: USA, ČR, SRN, EU, IBM, UK. Požádáme jej, aby označilo tu zkratku, která mezi ostatní nepatří. Jaká je pravděpodobnost, že vyřadí zkratku IBM?

Základní prostor

Definition

Předpokládejme, že provádíme náhodný pokus. Označme Ω množinu všech možných výsledků tohoto pokusu. Množinu Ω nazveme *základní prostor*.

Example

Házíme kostkou, dokud nepadne šestka. Určete základní prostor.

$$\Omega = \{[6], [1,6], \dots, [5,6], [1,2,6], \dots [1,5,6],$$
$$[2,1,6], \dots, [5,1,6], \dots, [5,5,6], [1,1,1,6], \dots\}$$

Jevové pole

Definition

Buď $\Omega \neq \emptyset$ a $\mathcal{S}$ systém podmnožin množiny Ω, který má tyto vlastnosti

1. $\Omega \in \mathcal{S}$,
2. jestliže $A \in \mathcal{S}$, pak také $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{S}$,
3. jestliže $A_k \in \mathcal{S}$, $k = 1, 2, \ldots$, pak také $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$.

Pak $\mathcal{S}$ nazveme množinovou σ-algebrou a dvojici $(\Omega, \mathcal{S})$ nazveme *jevovým polem*.

Jestliže má základní prostor alespoň dva prvky, není $\mathcal{S}$, a tedy ani jevové pole, určeno jednoznačně. *(ukázka pro $\Omega = \{1, 2, 3\}$ viz plná verze skript)*

Náhodné jevy

Definition

Množinu $A \subseteq \Omega$ nazveme *náhodným jevem*, jestliže $A \in \mathcal{S}$.

Náhodné jevy budeme většinou označovat počátečními písmeny abecedy. Některé náhodné jevy mají význačné postavení:

- Náhodný jev Ω nazýváme *jistý jev*.
- Náhodný jev $\emptyset$ nazýváme *nemožný jev*.
- Je-li $\omega \in \Omega$, pak náhodný jev $\{\omega\}$ nazýváme *elementární jev*.

Další základní pojmy

Nechť I je libovolná indexová množina. Pak

- $\bigcap_{i \in I} A_i$ nazýváme *společné nastoupení jevů* A_i, $i \in I$,
- $\bigcup_{i \in I} A_i$ nazýváme *nastoupení alespoň jednoho z jevů* A_i, $i \in I$,
- $\overline{A}_i = \Omega \setminus A_i$ nazýváme *opačný jev k jevu* A_i, $i \in I$,
- skutečnost, že pro $\omega \in \Omega$ platí, že $\omega \in A_i$, $i \in I$, znamená, že *možný výsledek náhodného pokusu* ω *je příznivý jevu* A_i, $i \in I$.

Další základní pojmy

Nechť $1, 2 \in I$, kde I je indexová množina. Pak

- symbolem $A_1 \setminus A_2$ označujeme *nastoupení jevu A_1 za nenastoupení jevu A_2*,
- jestliže $A_1 \subseteq A_2$, řekneme, že *jev A_1 má za důsledek jev A_2*,
- jestliže $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, řekneme, že *jevy A_1, A_2 jsou neslučitelné*.

Příklad

Example

Házíme kostkou, dokud nepadne šestka. Vypište všechny možné výsledky příznivé nastoupení jevu *A pokus skončí při třetím hodu*, jevu *B pokus skončí při třetím hodu, přičemž v prvních dvou hodech padlo vždy sudé číslo* a jevu *C pokus skončí při třetím hodu, přičemž v prvním hodu padlo liché číslo*.

$$
\begin{aligned}
A &= \Big\{[x, y, 6] : \; x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\Big\} \\
B &= \Big\{[x, y, 6] : \; x, y \in \{2, 4\}\Big\} \\
C &= \Big\{[x, y, 6] : \; x \in \{1, 3, 5\}, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\Big\}
\end{aligned}
$$

Definice pravděpodobnosti

Definition

Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je jevové pole. *Pravděpodobností* nazveme reálnou množinovou funkci $P: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, která splňuje následující axiomy:

1. nezápornosti, tj. $P(A) \geq 0$ pro každé $A \in \mathcal{S}$
2. normovanosti, tj. $P(\Omega) = 1$
3. spočetné aditivity, tj. jestliže je každá dvojice jevů A_i, A_j, $i \neq j$ neslučitelná, pak

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Trojici $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ nazýváme *pravděpodobnostní prostor*.

Vlastnosti pravděpodobnosti

Z výše uvedených axiomů vyplývá několik více či méně zřejmých, resp. známých, vlastností pravděpodobnosti. Pro každé $A, B \in \mathcal{S}$ platí:

1. $P(\emptyset) = 0 \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. jestliže $A \subseteq B$, pak $P(A) \leq P(B)$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Pravidlo součtu

Pokud bychom chtěli vlastnost 2 zobecnit na n jevů, dostali bychom:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+2}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Obsah

Definice klasické pravděpodobnosti

Definition

Nechť základní prostor Ω je **konečná** neprázdná množina a nechť $\mathcal{S}$ obsahuje **všechny** podmnožiny základního prostoru. Označme $|\Omega|$ počet všech možných výsledků nějakého náhodného pokusu a pro libovolný jev $A \in \mathcal{S}$ označme $|A|$ počet možných výsledků příznivých jevu A. *Klasickou pravděpodobností* nazýváme reálnou množinovou funkci $P: \ \mathcal{S} \to R$ definovanou pro všechna $A \in \mathcal{S}$ vztahem

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

přičemž každému elementárnímu jevu přiřazujeme **stejnou** pravděpodobnost $\frac{1}{|\Omega|}$.

Klasická pravděpodobnost

Example

V osudí je pět míčků - červený, modrý, bílý, černý, zelený. Náhodně vybíráme jeden z nich. Pravděpodobnost, že vybereme zelený, je $\frac{1}{5}$.

Odpověď $\frac{1}{5}$ dáváme proto, že jsou splněny všechny předpoklady definice a úloha je zadána korektně.

Klasická pravděpodobnost

Example

V osudí je pět míčků. Náhodně vybíráme jeden z nich. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme zelený?

Na tuto otázku nelze odpovědět.

Example

V osudí je pět míčků, které představují uchazeče o veřejnou zakázku. Zástupce magistrátu náhodně vybírá jeden míček. Jaká je pravděpodobnost, že vybere firmu XY?

Opravdu se jedná o příklad na klasickou pravděpodobnost?

Obsah

Nekonečné množiny

Nekonečné množiny můžeme klasifikovat.

Definition

- Nekonečnou množinu, jejíž prvky lze uspořádat do posloupnosti, nazveme *spočetnou* a řekneme, že má *spočetně mnoho prvků*.
- Nekonečnou množinu, jejíž prvky nelze uspořádat do posloupnosti, nazveme *nespočetnou* a řekneme, že má *nespočetně mnoho prvků*.
- Množinu, která je konečná nebo spočetná, nazveme *nejvýše nespočetnou*.

Nekonečné množiny

Example

Spočetnými množinami jsou např. množina všech sudých čísel, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Example

Každý interval $I \subseteq \mathbb{R}$ je nespočetný.

Lze ukázat, že zatímco všechny spočetné množiny mají stejný počet prvků, nespočetné množiny mají více prvků než spočetné.

Obsah

Definice diskrétní pravděpodobnosti

Definition

Nechť základní prostor Ω je **nejvýše spočetná**, tj. *konečná* nebo *spočetná*, neprázdná množina a nechť $\mathcal{S}$ obsahuje všechny podmnožiny základního prostoru. Předpokládejme, že jednotlivým elementárním jevům $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ přiřadíme **navzájem obecně různé** pravděpodobnosti $P(\{\omega_i\})$, tak, že součet pravděpodobností všech elementárních jevů $\{\omega_i\}$ je roven 1. Pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ definujeme jako

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

Příklad

Příklad na užití klasické pravděpodobnosti:

Example

S jakou pravděpodobností padne na *běžné* šestistěnné kostce liché číslo?

Příklad na užití diskrétní pravděpodobnosti:

Example

S jakou pravděpodobností padne liché číslo na šestistěnné kostce, která *má posunuté těžiště* tak, aby šestka padala s pravděpodobností $0,79$, jednička s pravděpodobností $0,01$ a ostatní čísla každé se stejnou pravděpodobností?

Obsah

Míra množiny

V matematické analýze, resp. ve formálně přesně budované teorii pravděpodobnosti, se zavádí pojem *míra množiny*, resp. *objem borelovské množiny*. Zavedení těchto pojmů výrazně přesahuje možnosti našeho předmětu.

Pro dvourozměrné množiny G proto označme symbolem $\mu(G)$ intuitivně chápaný obsah oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pro trojrozměrné množiny G budeme symbolem $\mu(G)$ chápat objem množiny, pro jednorozměrné pak délku příslušné úsečky.

Definice geometrické pravděpodobnosti

Definition

Je-li dán základní prostor jako *oblast* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ takový, že každý výsledek pokusu nastává **se stejnou pravděpodobností**, pak pravděpodobnost, že výsledek pokusu bude ležet v *oblasti* $A \subseteq \Omega$, definujeme vztahem

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

- Ve skutečnosti předpokládáme, že Ω je libovolná **nespočetná** množina. *(Požadavek „oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$" je sice velkým zjednodušením, avšak pro naše účely postačuje.)*
- K určení čísel $\mu(A)$, resp. $\mu(\Omega)$, je velmi často nutné využít integrování.

Příklad

Example

Vezmeme špejli a náhodně ji rozřízneme na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že z nich složíme trojúhelník?

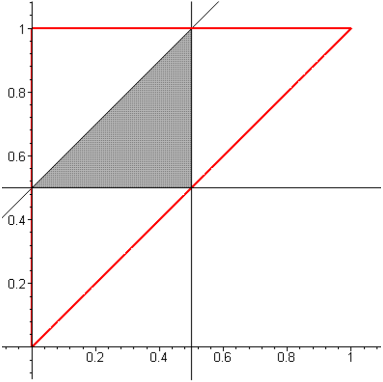
- Uvažujeme v řeči intervalů a nekonečných množin, proto otázka, které řezy jsou technicky proveditelné, je irelevantní!

Příklad

Uvážíme jednotkovou špejli a *řezy* x, y tak, že $x < y$. Základní prostor Ω je

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x, y \in (0, 1), x < y\}.$$

Trojúhelníková nerovnost platí pro $[x, y]$ ležící v šedé oblasti.



Obsah

Obsah

Motivace

Nyní se budeme zabývat situacemi, kdy pravděpodobnost námi zkoumaného jevu závisí na tom, jaké byly výchozí podmínky pokusu. Budeme si také všímat situací, kdy pracujeme s více jevy, přičemž ty se mohou (ale také nemusejí) nějakým způsobem ovlivňovat.

Motivace

Zadání 1: Na 10 lístcích jsou napsány číslice 0,1,. . . ,9. Náhodně vybereme jeden lístek, poznamenáme číslici a lístek odložíme stranou. Toto opakujeme ještě dvakrát. Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme číslo 125?

Zadání 2: Linka A vyrobí denně x výrobků, z toho m zmetků, linka B vyrobí denně y výrobků, z toho n zmetků. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je zmetek?

Zadání 3: Linka A vyrobí denně x výrobků, z toho m zmetků, linka B vyrobí denně y výrobků, z toho n zmetků. Náhodně vybraný výrobek z denní produkce je zmetek. Jaká je pravděpodobnost, že pochází z linky A?

Intuitivní „definice“ a označování

Definition

Pravděpodobnost jevu B za podmínky, že nastal jev A, nazveme *podmíněnou pravděpodobností* a označíme ji

$$P(B|A).$$

Definice

Definition

Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $B \in \mathcal{S}$ jev s nenulovou pravděpodobností. Pro každé $A \in \mathcal{S}$ definujeme *podmíněnou pravděpodobnost* vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Víme, že jev B nastal, a počítáme pravděpodobnost toho, že v takové situaci nastane i jev A.

Příklad zadání

Example

Ze vzorku 1000 finančních poradců doporučovalo v roce 2007 investici do akcií 800. Přitom 900 finančních poradců z uvedeného vzorku nemělo v roce 2007 dostatečné zkušenosti, které by je opravňovaly k poskytování finančních rad. Z nich 750 doporučovalo investovat do akcií. Pan Hrabivý investoval na základě rady jednoho z uvedeného 1000 poradců do akcií islandských bank. Jaká je pravděpodobnost, že mu poradil poradce s dostatečnými zkušenostmi?

- V zadáních je často přemíra informací. Zadání proto musíme správně dekódovat a označit příslušné jevy.
- Konkrétní zadání rychle zastarávají, „genericky matematická“ ne. Zadání je z roku 2009. Má fráze „islandská banka“ v této souvislosti nějaký speciální význam?

Věta o násobení pravděpodobností

Jestliže zobecníme a upravíme vztah z definice podmíněné pravděpodobnosti, dostáváme *větu o násobení pravděpodobností*.

Theorem

Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor,* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ *takové jevy, že* $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$*. Pak platí*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Obsah

Nezávislost dvou jevů

Definition

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a jevy A, B. Jestliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, říkáme, že jevy A, B jsou *nezávislé*.

- Intuitivně lze nezávislost chápat jako stav, kdy skutečnost, že nastal jev A nijak neovlivní pravděpodobnost jevu B (a naopak), tj. současnou platnost podmínek $P(B|A) = P(B)$ a $P(A|B) = P(A)$.

Příklady nezávislých jevů

Example

- Dvojice čísel, která padnou při současném hodu dvěma šestistěnnými kostkami.
- Číslo, které padne při opakovaném hodu kostkou.
- Pohlaví dětí různých rodičů.

Příklady závislých jevů

Example

- Jestliže současně hodíme dvěma kostkami, jevy *na jedné kostce padlo sudé číslo* a *padl součet 10*.
- Jevy *tažená karta z balíčku karet je eso* a *tažená karta z balíčku je král* za předpokladu, že první kartu nevrátíme zpět a balíček nezamícháme.
- Možné výsledky různých rozhodovacích strategií.

Příklad

Example

Z běžného balíčku karet vytáhneme postupně dvě karty. Jaká je pravděpodobnost, že obě tažené karty budou esa?

- Závislost, resp. nezávislost jevů nemusí být na první pohled zřejmá!
  (řešení příkladu viz sbírka příkladů, př. 2.10.)

Nezávislost n jevů

Pojem nezávislosti lze rozšířit i na případ n jevů. Pak bychom ověřovali platnost *všech* vztahů

$$
\begin{array}{rl}
\forall i < j & P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \\
\forall i < j < k & P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \\
\dots & \dots \\
 & P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)
\end{array}
$$

Příklad

Example

V urně jsou čtyři lístky s čísly 000, 110, 101 a 011, přičemž je stejná šance vytáhnout kterýkoliv z nich. Označme A_i jev *náhodně vytažený lístek má jedničku na i–tém místě*. Jsou jevy A_1, A_2, A_3 nezávislé?

Řešení přesahuje rámec předmětu, protože se jedná o nezávislost více jevů. Ověřte si sami, že jevy nezávislé nejsou.

Obsah

Rozklad na množině

Definition

Rozkladem na množině M nazýváme systém množin $R_i \subseteq M$, $i \in I$, kde I je nějaká indexová množina, který splňuje následující podmínky:

1. $R_i \cap R_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in I$ takové, že $i \neq j$
2. $\bigcup_{i \in I} R_i = M$

Úplný systém hypotéz

Definition

Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a nechť je dán rozklad H_i, $i \in I$ základního prostoru Ω na nejvýše spočetně mnoho jevů H_i o nenulových pravděpodobnostech $P(H_i)$. Pak říkáme, že je dán *úplný systém hypotéz.*

Úplný systém hypotéz

Example

Uvážíme-li možné výsledky hodu šestistěnnou kostku, pak

1. $\big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\big\}$ je úplný systém hypotéz,
2. $\{H_1, H_2, H_3\}$, kde H_1 je jev *padne sudé číslo*, H_2 je jev *padne číslo větší než 4*, H_3 je jev *padne číslo 1 nebo 3* není úplný systém hypotéz,
3. jevy H_1 a H_2 z bodu 2 netvoří úplný systém hypotéz,
4. jev H_1 z bodu 2 a jev H_4 *padne liché číslo* tvoří úplný systém hypotéz.

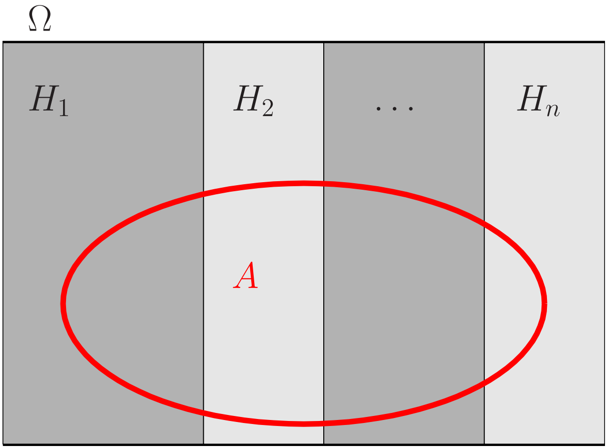
Věta o úplné pravděpodobnosti

Theorem

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *a úplný systém hypotéz* $H_i, i \in I$*. Pak pro libovolný jev* $A \in \mathcal{S}$ *platí*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Věta o úplné pravděpodobnosti – intuitivní znázornění



Věta o úplné pravděpodobnosti

Example

Zkoušku úspěšně složilo 60 studentů ze skupiny A, která má 100 studentů, 150 studentů ze skupiny B, která má 200 studentů a 40 studentů ze skupiny C, která má 80 studentů. Náhodně vybereme studenta, který patří do jedné ze skupin A, B, C. Jaká je pravděpodobnost, že úspěšně složil zkoušku?

- Abychom mohli použít větu o úplné pravděpodobnosti, musíme ověřit, že skupiny A, B, C tvoří rozklad množiny všech uvažovaných studentů.
- Pozor na označení jevů!

1. Bayesův vzorec

Theorem

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a úplný systém hypotéz $H_i, i \in I$. Pak pro libovolný jev $A \in \mathcal{S}$ s nenulovou pravděpodobností a pro libovolný jev H_k z úplného systému hypotéz platí

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum\limits_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

1. Bayesův vzorec

Example

Zkoušku úspěšně složilo 60 studentů ze skupiny A, která má 100 studentů, 150 studentů ze skupiny B, která má 200 studentů a 40 studentů ze skupiny C, která má 80 studentů. Náhodně vybereme studenta, který *úspěšně složil zkoušku. Jaká je pravděpodobnost, že pochází ze skupiny A?*

- Abychom mohli použít 1. Bayesův vzorec, musíme ověřit, že skupiny A, B, C tvoří rozklad množiny všech uvažovaných studentů.
- Pozor na označení jevů!

2. Bayesův vzorec

1. Bayesův vzorec používáme v situaci, kdy hledáme pravděpodobnost jevu, který je totožný s jednou z hypotéz (v textu zadání *že student pochází ze skupiny A*).

Pokud bychom se ptali na pravděpodobnost jevu, který je zcela nový a nesouvisí s ostatními jevy v úloze popsanými, použili bychom tzv. *2. Bayesův vzorec*. Tyto úvahy však přesahují rámec našeho předmětu.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

1. Kombinatorika – zjištění počtu a výpis všech variací, kombinací, atd.

Náhodná veličina

Matematika 3

Obsah

Obsah

Dosud známe vs. nový pohled

Prozatím jsme definovali základní pojmy z teorie pravděpodobnosti a zavedli mj. pojmy *klasická* a *geometrická* pravděpodobnosti.

Víme, že klasickou pravděpodobnost lze použít v situaci, kdy základní prostor Ω je konečný. Geometrickou pravděpodobnost používáme tehdy, je-li základní prostor Ω nespočetná množina. Oba pravděpodobnostní modely navíc platí pouze za předpokladu, že všechny výsledky náhodného pokusu nastávají se *stejnou* pravděpodobností.

Dosud známe vs. nový pohled

Motivací k pojmu *diskrétní* pravděpodobnost byla snaha popsat situace, kdy jednotlivé elementární jevy nastávají s *obecně různou* pravděpodobností. Tuto situaci budeme od nynějška studovat podrobněji, a to i v kontextu geometrické pravděpodobnosti, tj. pravděpodobnosti, jejíž základní prostor je nespočetná množina.

K popisu těchto situací však nejprve musíme definovat vhodné pojmy a ukázat si jejich základní vlastnosti.

Obsah

Definice

Definition

Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Funkce $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \le x\} \in \mathcal{S}$, se nazývá náhodná veličina na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.

- Zjednodušeně lze říci, že náhodná veličina je funkce, která prvkům základního prostoru Ω přiřazuje reálná čísla.
- Jedná se o veličinu, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem nějakého náhodného pokusu.
- Náhodné veličiny obvykle značíme velkými písmeny, nejčastěji X.

Označení

Je-li dána nějaká množina B, pak symbol $[X \in B]$ označuje množinu takových možných výsledků ω nějakého náhodného pokusu, pro které platí, že $X(\omega) \in B$, tj.

$$[X \in B] := \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in B\}.$$

Symbol $[X \in B]$ čteme „náhodná veličina X se realizuje v množině B“.

- Zápis $P(X \in B)$ čteme „pravděpodobnost, že se náhodná veličina realizuje v množině B“.

Označení

Jestliže je množina B jednoprvková, tj. např. $B = \{x\}$, pak místo $[X \in B]$ píšeme $[X = x]$ a říkáme, že „náhodná veličina X se realizuje hodnotou x.“ Symbolicky

$$[X = x] := \{\omega \in \Omega : \; X(\omega) = x\}.$$

- Pozor na rozlišování X *(náhodná veličina)* a x *(reálné číslo, konkrétní realizace náhodné veličiny)*!
- Podobně můžeme zavést symboly $[X < x]$ („náhodná veličina se realizuje hodnotou menší než x“), $[X \leq x]$, $[X > x]$, $[X \geq x]$, $[x < X < y]$ a další.
- Vyjádření výše uvedených podmínek může obsahovat logické spojky $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Příklad

Example

Náhodná veličina X udává číslo, které padne při hodu kostkou. Zapište „pravděpodobnost, že padne sudé číslo".

Požadavek můžeme zapsat např. jako $P(X \in \{2, 4, 6\})$ nebo $P(X = 2 \vee X = 4 \vee X = 6)$. Protože podmínky $[X = 2]$, $[X = 4]$ a $[X = 6]$ jsou neslučitelné, můžeme hledanou pravděpodobnost určit jako součet $P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6)$.

Typy náhodných veličin

K nejčastějším typům náhodných veličin patří:

1. *diskrétní náhodné veličiny* – ty, které mohou nabývat pouze hodnot z určité konečné nebo spočetné množiny
2. *spojité náhodné veličiny* – ty, které mohou nabývat kterékoli hodnoty z určitého intervalu

Poznámka: nejedná se o přesné definice.

- U některých z dále uváděných pojmů, resp. vzorců, budou nutné rozlišovat typ náhodné veličiny, kterou uvažujeme.

Obsah

Definice

Definition

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a náhodná veličina X. Funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = P(X \leq x)$$

se nazývá *distribuční funkce* náhodné veličiny X vzhledem k pravděpodobnosti P.

Poznámky k definici

- Někdy se v definici distribuční funkce používá ostrá nerovnost (viz např. stará verze skript). To však má vliv na formu vzorců a na veškeré výpočty!
- I když je oborem hodnot distribuční funkce celé $\mathbb{R}$, ve skutečnosti nabývá distribuční funkce jen hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
- Pojem *distribuční funkce* se váže ke všem typům náhodných veličin. To je odlišnost od některých dalších pojmů (např. *pravděpodobnostní funkce* nebo *hustota pravděpodobnosti*), které jsou definovány jen pro určité typy náhodných veličin.

Vlastnosti distribuční funkce

Distribuční funkce má následující vlastnosti:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
2. F je neklesající, tj. když $a < b$, pak $F(a) \leq F(b)$,
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$,
4. $P(X > a) = 1 - F(a)$ pro každé $a \in \mathbb{R}$,
5. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
6. F je zprava spojitá, tj. $\lim\limits_{t \to x^+} F(t) = F(x)$.

Dále budeme rozlišovat diskrétní a spojité náhodné veličiny. Bude-li náhodná veličina spojitá, bude vlastnost 6 modifikována na „funkce je **spojitá**."

Existenční věta

Theorem

Má-li nějaká funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vlastnosti 2, 6 a 3, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a na něm definovaná náhodná veličina X tak, že F je distribuční funkce této náhodné veličiny X.

Příklady

Konrétní příklady uvedeme v dalších kapitolách pro jednotlivé typy náhodných veličin.

Diskrétní náhodná veličina

Matematika 3

Obsah

Obsah

Definice (intuitivně a zjednodušeně)

Definition

Náhodnou veličinu X nazýváme *diskrétní*, jestliže jejím oborem hodnot je množina, která je konečná nebo spočetná.

- Hodnoty, kterých může diskrétní náhodná veličina nabývat, značíme většinou $x_1, x_2, \ldots$.
- Počet možných výsledků pokusu většinou značíme n. Přitom může být také $n = \infty$.

Příklady

Example

- Náhodným pokusem rozumíme střílení do terče, dokud se netrefíme. Počet spotřebovaných nábojů je diskrétní náhodná veličina.
- Náhodným pokusem rozumíme hod kostkou. Pokus několikrát opakujeme. Diskrétní náhodnou veličinou je např. celkový počet šestek nebo celkový počet lichých / sudých čísel, která padnou.
- Náhodným pokusem rozumíme narození dítěte. Diskrétní náhodnou veličinou je počet narozených chlapců (tj. 0 nebo 1).

Obsah

Definice

Jestliže možné výsledky pokusu nastávají s obecně různou pravděpodobností, potřebujeme nástroj, jak tuto „obecně různou“ pravděpodobnost popsat.

Definition

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a *diskrétní* náhodná veličina X. Funkce $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$p(x) = P(X = x)$$

se nazývá *pravděpodobnostní funkce* náhodné veličiny X.

Poznámky k definici

- Podobně jako u distribuční funkce, i zde je sice formálně vzato oborem hodnot množina celá $\mathbb{R}$, avšak ve skutečnosti je to jen interval $\langle 0, 1 \rangle$.
- Někdy se místo názvu *pravděpodobnostní* funkce používá označení *frekvenční* funkce. Tu značíme f.

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce

Theorem

Pravděpodobnostní funkce má následující vlastnosti:

1. *je všude nulová s výjimkou nejméně jednoho a nejvýše spočetně mnoha bodů,*
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ *platí, že* $0 \leq p(x) \leq 1$,
3. $\sum\limits_{x_i : p(x_i) > 0} p(x_i) = 1$.

- Vlastnost 3 lze zapsat také jako $\sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$.

Existenční věta

Theorem

Jestliže nějaká funkce $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má následující vlastnosti:*

- $\forall x \in \mathbb{R}$ *platí, že* $p(x) \geq 0$*, tj. mírně modifikovaná vlastnost 2, a*
- $\sum\limits_{x_i : p(x_i) > 0} p(x_i) = 1$*, tj. vlastnost 3,*

pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *a na něm definovaná diskrétní náhodná veličina* X *taková, že* $p(x)$ *je její pravděpodobnostní funkcí.*

Příklad

Example

Taháme vždy jednu kartu z běžné karetní hry 32 karet (4 bravy po 8 kartách). Když vybereme eso, zapíšeme na papír číslo 1 a „hra“ končí. Když vytáhneme figuru, zapíšeme na papír číslo 2 a „hra“ končí. Když vytáhneme něco jiného, kartu vrátíme a balíček promícháme. Táhneme znovu. Když nyní vytáhneme eso, zapíšeme na papír číslo 3 a „hra“ končí. Když vytáhneme figuru, zapíšeme číslo 4 a „hra“ končí. Když vytáhneme něco jiného, zapíšeme číslo 5 a „hra“ končí.

Náhodná veličina X udává číslo, které jsme si zapsali. Určete její pravděpodobnostní funkci.

Řešení

Předně si musíme uvědomit, jakých hodnot může náhodná veličina nabývat. Zde máme $X \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Proto také

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ ? & \text{pro } x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$$

Hodnoty označené otazníkem budou nenulové. Určíme je pomocí klasické pravděpodobnosti. Zde zřejmě $p(1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $p(2) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. Díky tomu, jak je situace popsána, můžeme psát, že $p(3) = \frac{32-4-12}{32} \cdot \frac{4}{32} = \frac{1}{16}$, $p(4) = \frac{32-4-12}{32} \cdot \frac{12}{32} = \frac{3}{16}$.
Vzhledem k tomu, že $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$, je

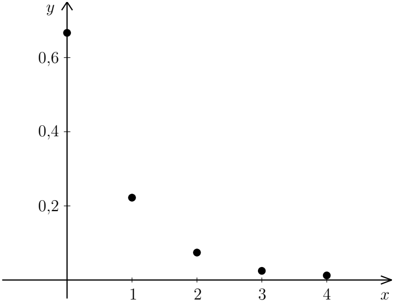
$$p(5) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{4}.$$

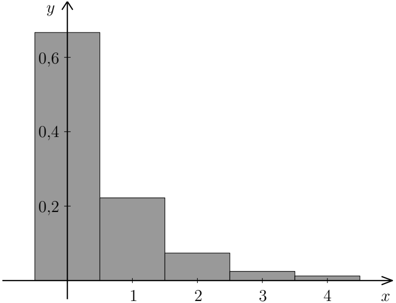
Problém

Zadání je poměrně podrobné. Jak jej můžeme upravit, aniž bychom změnili platnost výpočtu? Přitom chceme, aby pokus zůstal stejný.

Znázornění pravděpodobnostní funkce

Na obrázcích je $p(0) = \frac{2}{3}$, $p(1) = \frac{2}{9}$, $p(3) = \frac{2}{27}$, $p(4) = \frac{1}{81}$, $p(x) = 0$ pro $x \notin \{0, 1, 2, 3, 4\}$.





Příklad

Example

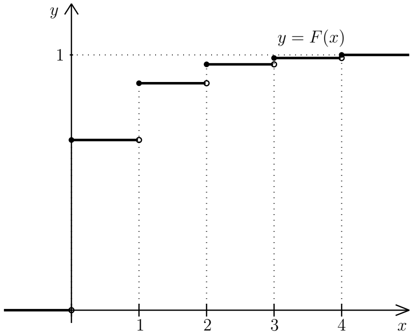
Házíme kostkou, dokud nepadne šestka. Hodit můžeme nejvýše pětkrát. Náhodná veličina X udává počet hodů. Určete její pravděpodobnostní funkci.

- Chceme-li určovat pravděpodobnostní, musí být zřejmé, co popisuje náhodná veličina!

Obsah

Definice

Definici distribuční funkce a její vlastnosti jsme uváděli v minulé kapitole. Ve speciálním případě, kdy je náhodná veličina X diskrétní, má distribuční funkce schodovitý tvar.



Vztah distribuční a pravděpodobnostní funkce

Theorem

Je-li X diskrétní náhodná veličina, F její distribuční funkce a p její pravděpodobnostní funkce nabývající nenulových hodnot v bodech t_i, $i = 1, 2, \ldots$, pak platí

$$F(x) \stackrel{def}{=} P(X \leq x) = \sum_{t_i \leq x} p(t_i)$$

- Příslušnou hodnotu pravděpodobnostní funkce získáme jako „výšku schodu“, tj.

$$p(x_1) = F(x_1), p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \text{ pro } i = 2, 3, \ldots, n.$$

Příklad

Example

Jsou známy následující hodnoty pravděpodobnostní funkce nějaké náhodné veličiny X, o níž víme, že nenulových hodnot nabývá pro $x \in \mathbb{N}$ taková, že $1 \leq x \leq 6$.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,1	0,3	0,05	0,1	0,2

Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

(řešení)

Obsah

V této části budeme definovat tři základní pojmy, s nimiž budeme dále pracovat. Nejprve uvedeme znění příslušných definic pro diskrétní náhodnou veličinu. V případě spojité náhodné veličiny budou definice pojmů a postupy výpočtu příslušných hodnot sice jiné, avšak myšlenky uvedených pojmů budou stejné.

Obsah

Motivace

Máme-li dán nějaký datový soubor, který se skládá z číselných hodnot, můžeme snadno vypočítat průměr těchto hodnot.

Example

Desetkrát za sebou jsme hodili běžnou šestistěnnou kostkou. Padla tato čísla: 2,4,6,6,6,3,2,1,5,1. Určete průměr z těchto hodnot.

Motivace

V mnoha případech ale umíme určit hodnoty pravděpodobnostní funkce příslušné náhodné veličiny (která může být definována až pro spočetně mnoho hodnot), tj. určit totéž, avšak bez toho, aby pokus fyzicky proběhl. Zkusme v tomto případě určit nějakou analogii pojmu *průměr*.

Example

Kdybychom spočetněkrát házeli běžnou šestistěnnou kostkou a ze získaných výsledků poté vypočetli průměr, jakou hodnotu bychom získali?

Zde náhodná veličina určuje číslo, které na kostce padne.

Definice

Definition

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, diskrétní náhodná veličina X a její pravděpodobnostní funkce $p(x)$. Pak číslo

$$\mathrm{E}X = \sum_{x_i : p(x_i) > 0} x_i \cdot p(x_i)$$

nazýváme *střední hodnotou* náhodné veličiny X vzhledem k pravděpodobnosti P.

- Budeme také používat časté (a vhodnější) označení $\mathrm{E}(X)$.
- Místo $\sum\limits_{x_i : p(x_i) > 0}$ lze psát také $\sum\limits_{i=1}^{n}$.

Poznámka

- V uvedené definici předpokládáme, že řadu lze sečíst. Pokud tomu tak není, řekneme, že *střední hodnota neexistuje*.
- Řada v definici střední hodnoty může být konečná i nekonečná (se spočetně mnoha členy).

Příklad

Example

Kdybychom spočetněkrát házeli běžnou šestistěnnou kostkou a ze získaných výsledků poté vypočetli průměr, jakou hodnotu bychom získali?

Příklad

Řešení:

- Náhodná veličina X udává číslo, které může padnout na šestistěnné kostce, tj. nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X je

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & pro\ x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & jinak \end{cases}$$

- Střední hodnota $\mathrm{E}X$ tedy je

$$\mathrm{E}X = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Počítání se střední hodnotou

- Jestliže X, Y jsou náhodné veličiny (ne nutně diskrétní), $\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y$ jejich střední hodnoty a $a, b, c \in \mathbb{R}$ libovolné, pak
  1. $\mathrm{E}(a) = a$
  2. $\mathrm{E}(cX) = c \cdot \mathrm{E}X$
  3. $\mathrm{E}(X \pm Y) = \mathrm{E}X \pm \mathrm{E}Y$
  4. $\mathrm{E}(a + bX + cY) = a + b \cdot \mathrm{E}X + c \cdot \mathrm{E}Y$
  5. $\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X) = 0$
- Jestliže X, Y jsou diskrétní náhodné veličiny takové, že pro každou dvojici hodnot $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x) \cdot P(Y = y),$$

  tj. náhodné veličiny X, Y jsou *nezávislé*, pak
  6. $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$

Obsah

Motivace

Máme-li dán nějaký datový soubor, který se skládá z číselných hodnot, můžeme snadno vypočítat průměr těchto hodnot. MImo to můžeme chtít určit např. charakteristiky variability – a z nich např. chtít *jedním číslem* vyjádřit „globální" odchylku v celém datovém souboru, tj. rozptyl, resp. směrodatnou odchylku.

Motivace

Example

Ve skupině xx byly získány následující bodové výsledky písemky (seřazeno vzestupně):

0 – 0 – 1 – 2 – 2 – 3 – 4 – 4 – 4 – 5 – 5 – 6 – 7 – 8 – 8 – 8 – 8 – 9 – 9 – 10 – 10

Najděte průměr těchto hodnot a poté určete, jak se výsledky písemky průměrně liší od průměru.

Motivace

V mnoha případech ale umíme určit hodnoty pravděpodobnostní funkce příslušné náhodné veličiny (která může být definována až pro spočetně mnoho hodnot). Zkusme určit nějakou analogii pojmu *rozptyl statistického znaku*, resp. *směrodatná odchylka statistického znaku*, podobně jako jsme to udělali u pojmu *průměr*.

Definice

Definition

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, diskrétní náhodná veličina X, její střední hodnota $\mathrm{E}X$. Pak číslo

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)^2]$$

nazýváme *rozptylem* náhodné veličiny X vzhledem k pravděpodobnosti P a kladnou hodnotu $\sqrt{\mathrm{D}X}$ nazýváme *směrodatnou odchylkou* náhodné veličiny X vzhledem k pravděpodobnosti P.

- Budeme také používat časté (a vhodnější) označení $\mathrm{D}(X)$.

Poznámky k definici

- V uvedené definici předpokládáme, že střední hodnota náhodné veličiny $(X - \mathrm{E}X)^2$ existuje.

Vzorec pro výpočet rozptylu

Vzorec

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)^2]$$

lze upravit do tvaru

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2,$$

kde $\mathrm{E}(X^2)$ je střední hodnota náhodné veličiny X^2, tj.

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{x_i : p(x_i) > 0} x_i^2 \cdot p(x_i)$$

Příklad

Example

Kdybychom spočetněkrát házeli běžnou šestistěnnou kostkou, ze získaných výsledků poté vypočetli průměr a poté náhodně vybrali výsledek jednoho hodu, o jakou hodnotu by se od tohoto průměru s největší pravděpodobností nejvýše lišil?

Příklad

- Náhodná veličina X udává číslo, které může padnout na šestistěnné kostce, tj. nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X je

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \textit{pro } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

- Střední hodnotu náhodné veličiny X jsme určili jako $\mathrm{E}X = \frac{7}{2}$.
- *V zadání se ptáme na směrodatnou odchylku*, tedy kladnou odmocninu z rozptylu. Nejprve musíme najít náhodnou veličinu X^2 a její střední hodnotu $\mathrm{E}X^2$.

$$\mathrm{E}(X^2) = 1.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 9.\frac{1}{6} + 16.\frac{1}{6} + 25.\frac{1}{6} + 36.\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{13}{2}$$

- Proto rozptyl $\mathrm{D}X = \frac{13}{2} - (\frac{7}{2})^2 = \frac{35}{12}$ a směrodatná odchylka $\sqrt{DX} = \sqrt{\frac{35}{12}} \doteq 1.71$.

Počítání s rozptylem

- Jestliže X, Y jsou náhodné veličiny (ne nutně diskrétní), $\mathrm{D}X, \mathrm{D}Y$ jejich rozptyly a $a, b, c \in \mathbb{R}$ libovolné, pak
  1. $\mathrm{D}(a) = 0$
  2. $\mathrm{D}(a + bX) = b^2 \cdot \mathrm{D}X$
- Jestliže X, Y jsou náhodné veličiny (ne nutně diskrétní) takové, že pro každou dvojici hodnot $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x) \cdot P(Y = y),$$

  tj. náhodné veličiny X, Y jsou *nezávislé*, pak
  3. $\mathrm{D}(X \pm Y) = \mathrm{D}X \pm \mathrm{D}Y$

Obsah

Nástin

Se znalostí střední hodnoty a rozptylu můžeme v určitých případech odhadnout jisté pravděpodobnosti. Tyto odhady překračují rámec našeho předmětu a uvádíme je jen pro zajímavost.

Markovova nerovnost

Theorem

Jestliže je dána náhodná veličina (ne nutně diskrétní) taková, že $P(X > 0) = 1$, a jestliže existuje její střední hodnota $\mathrm{E}X$, pak pro všechna $t > 0$, $t \in \mathbb{R}$ platí

$$P(X > t \cdot \mathrm{E}X) \leq \frac{1}{t}$$

Čebyševova nerovnost

Theorem

Jestliže je dána náhodná veličina X a jestliže existují její střední hodnota $\mathrm{E}X$ a rozptyl $\mathrm{D}X$, pak pro všechna $t > 0$, $t \in \mathbb{R}$ platí

$$P(|X - \mathrm{E}X| > t \cdot \sqrt{\mathrm{D}X}) \leq \frac{1}{t^2}$$

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je dána pravděpodobnostní funkce nějaké náhodné veličiny X

$$p(x) = \begin{cases} k \cdot 0,8^x & \text{pro } x \in \{1, 2, 3, \ldots\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

desetinným číslem vyjádřete $P(X > 4)$ a určete $F(3{,}5)$.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Šestkrát za sebou náhodně najednou vybereme 5 karet z běžného balíčku 32 karet. Po každém výběru karty vrátíme a balíček promícháme. Náhodná veličina X udává, kolikrát takto vybereme alespoň jedno eso nebo alespoň jednu dámu nebo alespoň jednoho krále. Nakreslete graf distribuční funkce náhodné veličiny X. Najděte $\mathrm{E}X$ a $\mathrm{D}X$.

Významná rozdělení diskrétních náhodných veličin

Matematika 3

Obsah

Obsah

Nástin

Jestliže máme za úkol určit hodnoty pravděpodobnostní funkce nějaké náhodné veličiny, resp. její střední hodnotu a rozptyl, musíme zvážit

- co rozumíme pojmem *pokus*,
- co popisuje náhodná veličina,
- jakých může náhodná veličina nabývat hodnot

a poté

- s přihlédnutím k dalším okolnostem

vypočítat jednotlivé hodnoty pravděpodobnostní funkce, resp. pomocí těchto hodnot určit střední hodnotu a rozptyl.

V mnoha případech se přitom jednotlivá zadání liší pouze ve slovním vyjádření a jejich *matematická podstata* je stejná.

Nástin

Nyní proto – pro určité *typové* situace – ukážeme, jakých hodnot nabývá pravděpodobnostní funkce příslušné náhodné veličiny. To nám umožní v těchto typových situacích vypočítat hodnoty $\mathrm{E}X$, $\mathrm{D}X$ (a $\sqrt{\mathrm{D}X}$), resp. jiné číselné charakteristiky.

Jestliže poté zjistíme, že zadaný problém splňuje charakteristiky dané typové situace, budeme schopní ihned psát hodnoty pravděpodobnostní funkce příslušné náhodné veličiny (a pomocí ní určovat potřebné pravděpodobnosti) a bez větších problémů určit hodnoty $\mathrm{E}X$, $\mathrm{D}X$ (a $\sqrt{\mathrm{D}X}$), resp. dalších číselných charakteristik.

Nástin

Pro tyto typové situace budeme používat označení *rozdělení pravděpodobnosti* nebo *rozdělení náhodné veličiny*. Protože se nyní budeme věnovat rozdělení pravděpodobnosti v situacích, kdy budeme pracovat s diskrétní náhodnou veličinou, budeme mluvit o *diskrétních rozděleních pravděpodobnosti*, resp. *rozděleních diskrétní náhodné veličiny*.

Místo pojmu „rozdělení“ se často používá termín „rozložení“.

Označení

Každé rozdělení pravděpodobnosti, které má svůj název, má určité význačné parametry. Skutečnost, že náhodná veličina X má toto rozdělení s těmito parametry zapisujeme jako

$$X \sim zkratka(parametr\ 1, \ldots, parametr\ n)$$

Obsah

Obsah

Degenerované rozdělení: $X \sim \mathrm{Dg}(\rho)$

Popis:
Náhodná veličina X nabývá pouze konstantní hodnoty ρ.

Označení: $X \sim \mathrm{Dg}(\rho)$

Pravděpodobnostní funkce:

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } x = \rho \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl: $\mathrm{E}X = \rho$, $\mathrm{D}X = 0$

Alternativní rozdělení: $X \sim \mathrm{A}(\vartheta)$

Popis:
Náhodná veličina X nabývá pouze hodnot 0 nebo 1, znamenající např. absenci nebo přítomnost úspěchu, jehož pravděpodobnost je ϑ, kde $\vartheta \in (0, 1)$.

Označení: $X \sim \mathrm{A}(\vartheta)$

Pravděpodobnostní funkce:

$$p(x) = \begin{cases} 1 - \vartheta & \textit{pro } x = 0 \\ \vartheta & \textit{pro } x = 1 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl: $\mathrm{E}X = \vartheta$, $\mathrm{D}X = \vartheta(1 - \vartheta)$

Obsah

Popis a označení

Definition

Náhodná veličina X udává celkový počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakováních téhož pokusu, přičemž v každém opakování tohoto pokusu nastává buď úspěch s pravděpodobností p nebo neúspěch s pravděpodobností $1 - p$.

Označení: $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$

Jednoduché příklady

Example

- Dvacetkrát za sebou hodíme kostkou. Náhodná veličina X udává, kolikrát padne 4.
- V testu je deset otázek, každá nabízí odpovědi a) – d). Náhodně tipujeme správné odpovědi. Náhodná veličina X udává, kolik otázek tipneme správně.
- Stokrát za sebou hodíme mincí. Náhodná veličina X udává, kolikrát padne panna.
- Máme vzorek 100 dětí, každé od jiných rodičů z jiného státu světa. Náhodná veličina X udává počet chlapců v tomto vzorku.

Složitější příklady

Example

- Podle rozsáhlého průzkumu veřejného mínění věří 90% občanů USA, že jestliže byl Jára Cimrman geniálním vynálezcem, pak to byl Američan. Náhodně vybereme 500 občanů USA. Náhodná veličina X udává počet Američanů z těchto 500, kteří věří, že jestliže byl Jára Cimrman geniálním vynálezcem, pak to byl Američan.
- Šestkrát za sebou náhodně najednou vybereme 4 karty z běžného balíčku 32 karet. Po každém výběru karty vrátíme a balíček promícháme. Náhodná veličina X udává, kolikrát takto vybereme alespoň jedno eso nebo alespoň dva krále.

Důležité

- Vždy musí být jasné, co je pokus a co považujeme za úspěch!
- Vždy také musíme ověřit, zda jsou opakování pokusu nezávislá!

Matematické, avšak téměř reálné zadání

Example

Šestkrát za sebou náhodně najednou vybereme 4 karty z běžného balíčku 32 karet. Po každém výběru karty vrátíme a balíček promícháme. Jaká je pravděpodobnost, že takto právě třikrát vybereme alespoň jedno eso nebo alespoň dva krále?

- Reálné zadání se nebude týkat tahání karet z balíčku – jeho matematická podstata však může být úplně stejná.
- V reálném zadání budou vystupovat skutečné objekty – skutečnost, že se jedná o *nezávislá* opakování téhož pokusu nebude tak zřejmá jako v „matematickém zadání“.
- V reálném zadání nebude věta: „Náhodná veličina X popisuje. . . “

Binomické rozdělení: $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$

Pravděpodobnostní funkce:

$$p(r) = \begin{cases} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} & \text{pro } r = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl: $\mathrm{E}X = np$, $\mathrm{D}X = np(1-p)$

Poznámka

V kapitole „Normální rozdělení“ ukážeme, že pro velká n lze diskrétní náhodnou veličinu $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$ nahradit spojitou náhodnou veličinou *(pojem bude definován později)*.

Obsah

Geometrické rozdělení: $X \sim \mathrm{Ge}(\tau)$

Popis:
Náhodná veličina X udává celkový počet neúspěchů, které v nekonečné posloupnosti nezávislých opakování nějakého pokusu předcházejí prvnímu úspěchu. Přitom v každém opakování může nastat buď úspěch s pravděpodobností τ nebo neúspěch s pravděpodobností $1 - \tau$.

Označení: $X \sim \mathrm{Ge}(\tau)$

Pravděpodobnostní funkce:

$$p(x) = \begin{cases} (1-\tau)^x \tau & \textit{pro } x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl: $\mathrm{E}X = \frac{1-\tau}{\tau}$, $\mathrm{D}X = \frac{1-\tau}{\tau^2}$

Jednoduchý příklad

Example

Házeme kostkou, dokud nepadne pětka nebo šestka. Po kolika hodech lze očekávat, že pokus skončí?

Jestliže náhodná veličina X označuje počet neúspěchů předcházejících prvnímu úspěchu a jestliže za úspěch považujeme, že padne pětka nebo šestka, pak

$$\mathrm{E}X = \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 2.$$

Lze tedy očekávat, že pokus skončí ve druhém hodu.

Obsah

Hypergeometrické rozdělení: $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$

Popis:
Máme množinu o N prvcích, z nichž M má sledovanou vlastnost a zbývajících $N - M$ ji nemá. Náhodně vybereme (najednou nebo postupně, ale bez vracení) n prvků. Náhodná veličina X udávající, kolik z vybraných n prvků má sledovanou vlastnost, má hypergeometrické rozdělení pravděpodobnosti.

Označení: $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$

Pravděpodobnostní funkce:

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = \max\{0, n - (N - M)\}, \dots, \min\{n, M\}$$

Střední hodnota a rozptyl: $\mathrm{E}X = n\frac{M}{N}$, $\mathrm{D}X = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

Jednoduchý příklad

Example

Máme 50 výrobků, z nichž 6 je vadných. Náhodně vybereme 8 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou $2 - -4$ vadné?

Náhodná veličina X udává počet vadných výrobků ve výběru 8 výrobků. Je zřejmé, že $X \sim \mathrm{Hg}(50, 6, 8)$. Ptáme se na $P(X \in \{2, 3, 4\})$, tj. hledáme $p(2) + p(3) + p(4)$. Po dosazení

$$p(2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{50-6}{8-2}}{\binom{50}{8}} \doteq 0,1972.$$

Podobně $p(3) \doteq 0,0405$ a $p(4) \doteq 0,0038$. Hledaná pravděpodobnost je tedy celkem cca $0,2415$.

Vztah hypergeometrického a normálního rozdělení

Theorem

Jestliže náhodná veličina X má hypergeometrické rozdělení $X \sim Hg(N, M, n)$, kde n je v porovnání s N velmi malé ($N > 20n$), pak se pro popis X může využít binomické rozdělení s parametry n a $p = M/N$.

Jednoduchý příklad

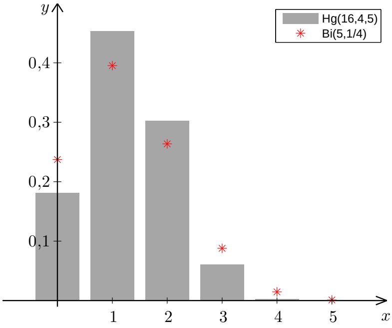
Example

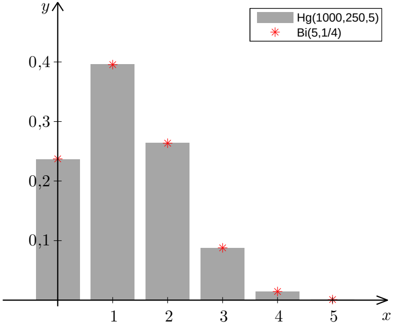
- V balíčku je 16 oříšků, z nichž 4 jsou kešu. Odsypeme 5 oříšků.
- V přepravce je 1000 oříšků, z nichž 250 je kešu. Nabereme 5 oříšků.

V obou případech popište rozdělení náhodné veličiny X, která udává počet kešu oříšků ve výběru. Porovnejte situaci, kdy $X \sim \mathrm{Bi}$ a $X \sim \mathrm{Hg}$. Předpokládáme, že obě směsi jsou dobře promíchané a že náš výběr je náhodný.

Jednoduchý příklad

V prvním případě (vlevo) je $N = 16$ a $n = 5$, tj. $N = 3,2n$, zatímco ve druhém je $N = 1000$ a $n = 5$, tj. $N = 200n$.





Obsah

Poissonovo rozdělení: $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$

Označení: $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$

Toto významné diskrétní rozdělení úzce souvisí s exponenciální rozdělením pravděpodobnosti, které je spojité. Oběma rozdělením současně se budeme věnovat v kapitole *Významná spojitá rozdělení pravděpodobnosti*.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

1. Binomické rozdělení
2. Aproximace binomického rozdělení normálním (teoretický základ je až v kapitole „Normální rozdělení a statistické testy“)
3. Geometrické rozdělení
4. Hypergeometrické rozdělení
5. Poissonovo rozdělení (je uvedeno spolu s exponenciálním rozdělením v kapitole „Významná spojitá rozdělení pravděpodobnosti“)

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je dána pravděpodobnostní funkce nějaké náhodné veličiny X

$$p(x) = \begin{cases} k \cdot 0,8^x & \text{pro } x \in \{1, 2, 3, \ldots\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

desetinným číslem vyjádřete $P(X > 4)$ a určete $F(3{,}5)$.

Příklady pro samostatnou práci

Následující příklad jste řešili v předcházející kapitole. Nyní jej řešte pomocí teoretického aparátu, se kterým jste se právě seznámili.

Example

Šestkrát za sebou náhodně najednou vybereme 5 karet z běžného balíčku 32 karet. Po každém výběru karty vrátíme a balíček promícháme. Náhodná veličina X udává, kolikrát takto vybereme alespoň jedno eso nebo alespoň jednu dámu nebo alespoň jednoho krále. Nakreslete graf distribuční funkce náhodné veličiny X. Najděte $\mathrm{E}X$ a $\mathrm{D}X$.

Příklady pro samostatnou práci

Znění příkladu z předchozí obrazovky upravte tak, aby bylo náhodná veličina, která v příkladu vystupuje, měla jiná rozdělení pravděpodobnosti než v původním znění – avšak taková, která jsou probírána v této kapitole.

Spojitá náhodná veličina

Matematika 3

Obsah

Obsah

Definice (zjednodušeně)

Definition

Náhodnou veličinu nazýváme *spojitá*, jestliže jejím oborem hodnot je *nespočetná* množina (typicky interval).

Příklady

Example

Jestliže předpokládáme přesné měření, pak např.

- doba čekání na nějakou událost nebo
- životnost nějakého výrobku nebo
- délka, výška, teplota, tlak, napětí, odpor, atd.

jsou spojité náhodné veličiny.

Obsah

Definice hustoty pravděpodobnosti

Definition

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a *spojitá* náhodná veličina X. Po částech spojitá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná pro každé $x \in \mathbb{R}$ a libovolnou dvojici $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ takovou, že $a < b$, předpisem

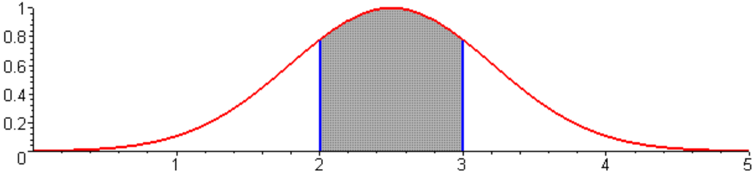
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

se nazývá *hustota pravděpodobnosti* náhodné veličiny X.

V plné verzi skript je uvedena alternativní ekvivalentní definice.

Geometrický význam

Červeně je znázorněna hustota pravděpodobnosti $f(x)$ nějaké náhodné veličiny X. Pravděpodobnost $P(2 < X < 3) = P(X \in (2, 3))$ je znázorněna šedě.



Geometrický význam

Protože $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$, platí pro spojitou náhodnou veličinu $P(X = a) = 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$!

Example

Doba životnosti nového plazmového televizoru je náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$. Výrobce udává: „*Životnost*: 100.000 hodin“. Určete $P(X \in \{1, 2, \ldots, 100.000\})$.

$$P(X \in \{1, 2, \ldots, 100.000\}) = \sum_{i=1}^{100.000} \int_i^i f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Hustota pravděpodobnosti v bodě

Theorem

Pro malé hodnoty $\Delta x > 0$ *platí:*

$$P(x < X < x + \Delta x) \doteq f(x) \cdot \Delta x$$

Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti

Theorem

Hustota pravděpodobnosti má následující vlastnosti:

1. $f(x) \geq 0$ *pro* $\forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$,

- Hustota pravděpodobnosti nemusí být spojitá funkce! Musí však být po částech spojitá.

Existenční věta

Theorem

Má-li nějaká po částech spojitá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vlastnosti 1 a 2, pak existuje pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *a na něm definovaná spojitá náhodná veličina* X *tak, že* f *je hustotou pravděpodobnosti této náhodné veličiny* X.

Příklad

Example

Je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle 0, 1) \\ x + a & x \in \langle 1, 2) \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

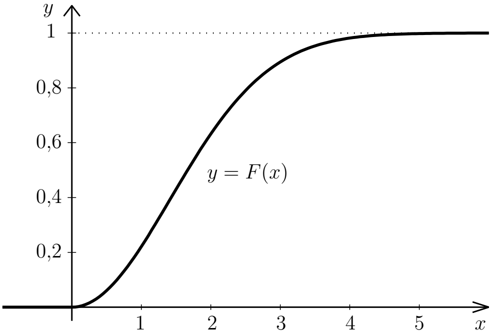
Určete parametr a tak, aby funkce $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X.

(řešení sami)

Obsah

Definice

Definici distribuční funkce a její vlastnosti jsme již uváděli. Ve speciálním případě, kdy je náhodná veličina X spojitá, je distribuční funkce spojitá funkce.



Příklad

Example

Můžeme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{x^2}{3} & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$

prohlásit za distribuční funkci nějaké spojité náhodné veličiny? Odpověď zdůvodněte. Pokud ano, vypočtěte $P(X \in \langle 0,5; 1 \rangle)$.

(řešení sami)

Vztah distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti

Je-li X spojitá náhodná veličina, F její distribuční funkce a f její hustota pravděpodobnosti, pak

a) pro každé $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ platí

$$F(x) \overset{def\ F}{=} P(X \leq x) \overset{def\ f}{=} \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

b) v bodech, kde je definována derivace distribuční funkce, platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vztah distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti

Example

Chování spojité náhodné veličiny X je popsáno hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 8 \\ \frac{x}{4} - 2 & 8 < x \leq 10 \\ -\frac{x}{4} + 3 & 10 < x \leq 12 \\ 0 & x > 12 \end{cases}$$

Najděte distribuční funkci této náhodné veličiny.

Vztah distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti

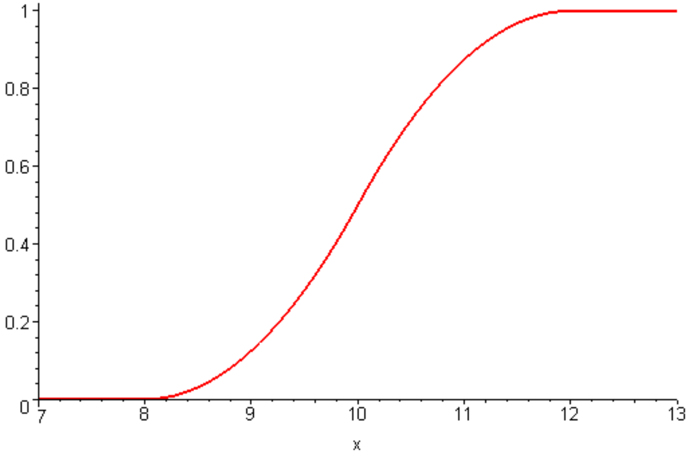
Řešení:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 8 \\ \int\limits_8^x \frac{t}{4} - 2\mathrm{d}t = \frac{x^2}{8} - 2x + 8 & 8 < x \le 10 \\ \frac{1}{2} + \int\limits_{10}^x -\frac{t}{4} + 3 = -\frac{x^2}{8} + 3x - 17 & 10 < x \le 12 \\ 1 & x > 12 \end{cases}$$

- Distribuční funkce je spojitá, proto $\frac{1}{2} + \int\limits_{10}^x \dots$

$$\frac{1}{2} = \frac{10^2}{8} - 2 \cdot 10 + 8.$$

Graf získané distribuční funkce



Obsah

Nástin

Již dříve jsme pro diskrétní náhodnou veličinu definovali pojmy *střední hodnota*, *rozptyl* a *směrodatná odchylka*.

Myšlenka těchto pojmů je pro spojitou náhodnou veličinu stejná. Liší se však vzorce pro jejich výpočet.

Obsah

Připomenutí

Střední hodnota je analogií průměru číselných hodnot získaných opakováním nějakého pokusu. Na rozdíl od průměru se jedná o *očekávaný* průměr.

V případě diskrétní náhodné veličiny počítáme střední hodnotu pomocí hodnot pravděpodobnostní funkce pomocí vztahu

$$\mathrm{E}X = \sum_{x_i : p(x_i) > 0} x_i \cdot p(x_i)$$

Definice

Definition

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, spojitá náhodná veličina X a její hustota $f(x)$. Pak číslo

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

nazýváme *střední hodnotou* náhodné veličiny X vzhledem k pravděpodobnosti P.

Poznámky k definici

- V uvedené definici předpokládáme, že nevlastní integrál konverguje. Pokud tomu tak není, řekneme, že střední hodnota neexistuje.
- Budeme také používat časté (a vhodnější) označení $\mathrm{E}(X)$.

Počítání se střední hodnotou

Pro počítání se střední hodnotou platí vztahy, které jsme si uváděli v kapitole *Diskrétní náhodná veličina*.

Obsah

Připomenutí

Rozptyl diskrétní náhodné veličiny X se ukázal být nejvhodnější analogií jakési „globální“ odchylky číselných hodnot získaných opakováním nějakého pokusu od průměru těchto hodnot.

V případě diskrétní náhodné veličiny *počítáme* (nikoliv *definujeme*) rozptyl pomocí hodnot pravděpodobnostní funkce a vztahu

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2,$$

kde $\mathrm{E}(X^2)$ je střední hodnota náhodné veličiny X^2, tj.

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{x_i : p(x_i) > 0} x_i^2 \cdot p(x_i)$$

Připomenutí

Směrodatnou odchylku jsme definovali jako kladnou odmocninu z rozptylu.

Definice

Definition

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, spojitá náhodná veličina X, její střední hodnota $\mathrm{E}X$. Pak číslo

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)^2]$$

nazýváme *rozptylem* náhodné veličiny X vzhledem k pravděpodobnosti P a kladnou hodnotu $\sqrt{\mathrm{D}X}$ nazýváme *směrodatnou odchylkou* náhodné veličiny X vzhledem k pravděpodobnosti P.

Poznámky k definici

- V uvedené definici předpokládáme, že střední hodnota náhodné veličiny $(X - \mathrm{E}X)^2$ existuje.
- Budeme také používat časté (a vhodnější) označení $\mathrm{D}(X)$.

Vzorec pro výpočet rozptylu

Vzorec

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)^2]$$

lze upravit do tvaru

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2,$$

kde $\mathrm{E}(X^2)$ je střední hodnota náhodné veličiny X^2, tj.

$$\mathrm{E}(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

Počítání s rozptylem

Pro počítání s rozptylem platí vztahy, které jsme si uváděli v kapitole *Diskrétní náhodná veličina*.

Příklad

Example

Chování spojité náhodné veličiny X je popsáno hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 8 \\ \frac{x}{4} - 2 & 8 < x \leq 10 \\ -\frac{x}{4} + 3 & 10 < x \leq 12 \\ 0 & x > 12 \end{cases}$$

Najděte střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny.

(řešení sami)

Obsah

Připomenutí

Jako jednu z číselných charakteristik statistického souboru jsme si uváděli i *kvanitl*. V případě náhodné veličiny je myšlenka vedoucí k tomuto pojmu analogická.

Definice

Definition

Nechť X je spojitá náhodná veličina a $\alpha \in (0, 1)$ je libovolné. Pak α–kvantilem spojité náhodné veličiny X nazýváme takové číslo x_α, pro které platí

$$\alpha = F(x_\alpha)$$

- Protože $F(x_\alpha) \overset{def}{=} P(X \leq x_\alpha)$, je α–kvantil hraniční hodnota, pod kterou zůstane $\alpha \cdot 100\%$ hodnot náhodné veličiny X.

„Praktický“ výpočet

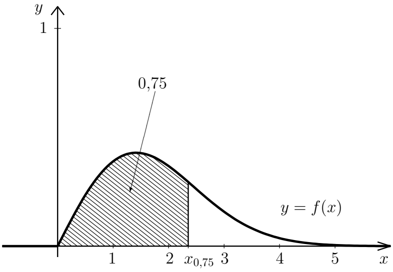
Vzhledem ke vztahu distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny platí

$$\alpha = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)\mathrm{d}x.$$

Tento integrál ovšem mnohdy nelze vypočítat analyticky. Kvantily některých spojitých rozdělení pravděpodobnosti proto bývají tabelovány.

Geometrické znázornění α–kvantilu

Na obrázcích vidíme myšlenku $0,75$ kvantilu dané náhodné veličiny zobrazenou pomocí funkce hustoty pravděpodobnosti (vlevo) a pomocí distribuční funkce (vpravo).



Významné kvantily

Podobně jako u statistických souborů, mají i u náhodných veličin některé významné α–kvantily svá jména.

- Kvantil $x_{0,5}$ nazýváme *medián*.
- Kvantil $x_{0,75}$ nazýváme *horní kvartil*.
- Kvantil $x_{0,25}$ nazýváme *dolní kvartil*.
- Rozdíl $x_{0,75} - x_{0,25}$ nazýváme *mezikvartilové rozpětí*.

Mluvíme také o *decilech* a *percentilech*.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Příklady pro samostatnou práci a možnosti opakování

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

1. Výpočet distribuční funkce z hustoty
2. Výpočet neurčitého integrálu
3. Výpočet určitého integrálu
4. Integrování metodou per partes
5. Substituce v integrálu

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{pro } x \in \langle 0, 1) \\ \frac{x^2}{2} + b & \text{pro } x \in \langle 1, 2) \\ x + c & \text{pro } x \in \langle 2, 3) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Zvolte konstanty a, b, c tak, aby funkce $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. *Volbu konstant zdůvodněte.* Dále určete $P(X \in \langle 1, \frac{5}{2} \rangle)$. *Odpověď je možno vyjádřit buď desetinným číslem nebo pomocí konstant* a, b, c.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Jedna z následujících funkcí je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Určete $\mathrm{E}X$ a $\mathrm{D}X$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ 0{,}04x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, 5 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x > 5, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in \langle 0, 10\pi \rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{pro } x = 0, \\ 0{,}8 & \text{pro } x = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Významná rozdělení spojitých náhodných veličin

Matematika 3

Obsah

Obsah

Rovnoměrné rozdělení: $X \sim \mathrm{Ro}(a, b)$

Popis:
Náhodná veličina X nabývá se stejnou pravděpodobností kterékoliv hodnoty z intervalu $\langle a, b \rangle$.

Označení: $X \sim \mathrm{Ro}(a, b)$, někdy $X \sim \mathrm{Rs}(a, b)$ podle „rovnoměrné spojité rozdělení“, protože existuje i rovnoměrné diskrétní rozdělení

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & pro\ x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl: $EX = \frac{a+b}{2}$, $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

Příklad

Example

Pan Krátký si nepamatuje jízdní řád autobusu, kterým jezdí do práce. Na zastávku chodívá každý den vždy mezi 7:00 a 7:15, a to vždy naprosto náhodně bez jakýchkoliv vnějších vlivů. Autobus jede 7:03. Když panu Krátkému autobus ujede, přijde pan Krátký do práce pozdě. Jaká je pravděpodobnost, že počet jeho pozdních příchodů během 10 pracovních dnů bude nižší než lze očekávat? *(Neuvažujeme žádné vnější vlivy ani změnu kvality paměti pana Krátkého.)*

- V praktických zadání se může vyskytovat více náhodných veličin s různými rozloženími!

Obsah

Popis

Předpokládejme následující situaci:

Opakovaně dochází k výskytu náhodné události, přičemž:

- v jednom okamžiku může nastat nanejvýš jedna událost (tedy nemohou nastat dvě zcela současně),
- události přicházejí nezávisle na sobě, (počty vzniklých událostí v disjunktních časových intervalech jsou nezávislé).
- pravděpodobnost, že událost nastane v intervalu $(t, t+h)$, závisí na h (délce intervalu), ale nikoli na t (umístění intervalu na časové ose).

Popis

Za těchto předpokladů můžeme zkoumat buď *dobu mezi dvěma výskyty takových událostí* nebo *počet výskytů takových událostí za jednotku času*.

V prvním případě pracujeme se spojitou náhodnou veličinou, ve druhém s diskrétní.

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti

Definition

Mějme náhodnou veličinu X, která popisuje dobu mezi dvěma výskyty náhodně opakované události v situaci, která byla zmíněna výše. Tato náhodná veličina je spojitá. Řekneme, že X má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti a píšeme $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Přitom λ je průměrný počet událostí za časovou jednotku.

Hustota pravděpodobnosti

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \textit{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

(odvození viz skripta)

Střední hodnota a rozptyl

Střední hodnota a rozptyl: $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{D}X = \frac{1}{\lambda^2}$

Vidíme tedy, že k výskytu události skutečně dochází průměrně jednou za $\frac{1}{\lambda}$ časových jednotek, tj. λ–krát za časovou jednotku.

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti

Definition

Předpokládejme tutéž situaci jako na začátku, ale uvažme náhodnou veličinu Y, která popisuje počet výskytů události za zvolenou časovou jednotku. Tato náhodná veličina je diskrétní. Řekneme, že Y má Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti a píšeme $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Přitom λ je průměrný počet událostí za časovou jednotku.

Pravděpodobnostní funkce

Pravděpodobnostní funkce:

$$p(k) = P(Y = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & pro\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & jinak \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl

Střední hodnota a rozptyl: $\mathrm{E}Y = \lambda$, $\mathrm{D}Y = \lambda$

(odvození viz skripta)

Opět vidíme, že k výskytu události skutečně dochází průměrně jednou za $\frac{1}{\lambda}$ časových jednotek, tj. λ–krát za časovou jednotku.

Příklady

Example

Při nějakém nastavení filtrů příchozí pošty chodí do emailové schránky průměrně 24 spamů denně. Jaká je pravděpodobnost, že:

1. Během 90ti minutové přednášky přijde alespoň jeden?
2. Během půlhodinové pauzy na oběd nepřijde žádný?
3. Přes noc, tj. mezi 22:00 a 7:00, jich přijde více než pět?

- Zadání 1 a 2 můžeme řešit jak pomocí exponenciálního tak i pomocí Poissonova rozdělení.
- Je nutné si správně zvolit vhodné časové jednotky. Podle nich poté určíme parametr λ a zformulujeme požadavek na výpočet.

Příklady

(projděte si sami jednotlivé typové příklady ve skriptech)

Náhrada binomického rozdělení Poissonovým

V jistých situacích lze Poissonovým rozdělením nahradit binomické rozdělení.

Theorem

Nechť je dána náhodná veličina X. Jestliže $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$ tak, že $n \geq 30$, $p \leq 0,1$, pak

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \doteq \frac{(np)^r}{r!} e^{-np}.$$

Náhrada binomického rozdělení Poissonovým

Více o náhradách jednoho rozdělení druhým viz kapitola *Normální rozdělení a statistické testy.*

Obsah

Weibullovo rozdělení: $X \sim \mathrm{Wb}(\delta, \varepsilon)$

Popis:
Náhodná veličina X vyjadřuje dobu čekání na nějakou událost, která se každým okamžikem může dostavit se šancí úměrnou mocninné funkci dosud pročekané doby. Přitom čísla $\delta > 0$ a $\epsilon > 0$ se nazývají parametry měřítka a formy.

Označení: $X \sim \mathrm{Wb}(\delta, \varepsilon)$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon\delta(\delta x)^{\varepsilon-1} e^{(-x\delta)^{\varepsilon}} & \textit{pro } x > 0 \\ 0 & \textit{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl: přesahuje rámce předmětu.

Využití

Weibullovo rozdělení se často využívá při zkoumání životnosti nějakého zařízení. „Událostí“ je zde porucha zařízení. Všimněte si, že exponenciální rozdělení na zkoumání životnosti většiny zařízení použít nelze – doba čekání na událost, tj. poruchu, zde totiž nezáleží na dosud pročekané době. U exponenciálního rozdělení tedy neuvažujeme opotřebení zařízení.

Obsah

Normální rozdělení

Normální rozdělení je nejdůležitějším spojitým rozdělením. Budeme se mu proto věnovat v samostatné kapitole.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

1. Exponenciální rozdělení
2. Poissonovo rozdělení
3. Binomické rozdělení

Příklady pro samostatnou práci

Example

Řidič se z místa A do místa B může dostat dvěma různými způsoby. První je kratší, ale při prvním odbočení se auto dostane na ulici, kde jsou tramvajové koleje, přičemž šířka vozovky nikde nedovoluje tramvaj podjet. Na lince jezdí jediná tramvaj, a to v pravidelných osmiminutových intervalech. Pokud na křižovaku přijela tramvaj o méně než 3 minuty dříve než auto, auto a tramvaj se potkají (a tedy tramvaj auto zbrzdí). Nelze předpokládat, že by se řidič auta při výběru času odjezdu z místa A řídil jízdním řádem tramvaje. Řidič auta jezdí trasu každý den, vždy jednou denně. Kolikrát lze očekávat, že ho tramvaj zbrzdí za měsíc? Jaká je pravděpodobnost, že tramvaj řidiče zbrzdí alespň třikrát? (Jízdní řád tramvaje je každý den v době, kdy řidič auta trasu jezdí, stejný, měsíc = 20 pracovních dní. Pokud se rozhodnete nahrazovat nahrazovat nějaké rozdělení pravděpodobnosti jiným, rozmyslete si, proč je to možné.)

Příklady pro samostatnou práci

Example

Dělník na tovární lince musí čas od času potvrdit svou přítomnost na pracovním místě. V pracovní době (mimo povinné přestávky a mimo dobu, kdy se z pracovního místa elektronicky odhlásí) se mu u pracovního místa rozsvítí kontrolka. Dělník v tu chvíli musí stisknout kontrolní tlačítko. Kontrolka se rozsvěcuje naprosto náhodně a nepředvídatelně, avšak tak, že za 5 pracovních směn (= 40 hodin) se rozsvítí v průměru dvacetkrát. Dělník si chce udělat čtvrthodinovou přestávku, aniž by se elektronicky odhlašoval. Jaká je pravděpodobnost, že se v této době nerozsvítí kontrolka?

Normální rozdělení a statistické testy

Matematika 3

Obsah

Obsah

Význam normálního rozdělení pravděpodobnosti

Normální rozdělení pravděpodobnosti je nejvýznamnějším spojitým rozdělením pravděpodobnosti.

Normální rozdělení: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Popis:
uvedeme později

Označení: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Střední hodnota a rozptyl: $\mathrm{E}X = \mu$, $\mathrm{D}X = \sigma^2$

„Nesrozumitelný“ popis

Definition

Náhodná veličina X má normální rozdělení pravděpodobnosti, jestliže se ke konstantní střední hodnotě μ přičítá velké množství nezávislých náhodných veličin („náhodných vlivů“), kolísajících nepatrně kolem nuly. Vzniklá variabilita je charakterizována směrodatnou odchylkou σ.

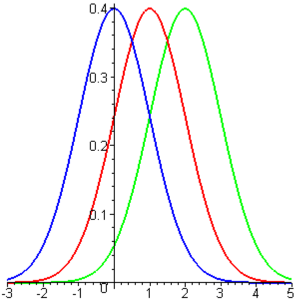
Vyjasnění

Example

- Automatizová výroba nějakého výrobku. Tvar výrobku je daný šablonou, avšak vlivem materiálu, mírně odlišné teploty, tlaku apod. nebo díky dalším vlivům nejsou žádné dva výrobky naprosto identické.
- Měření nějaké fyzikální veličiny. Při opakovaném měření většinou nenaměříme naprosto identické hodnoty.
- Rozložení IQ v populaci. Průměrná „ideální“ hodnota je 100, avšak pro náhodně vybraného jedince se díky mnoha různým vlivům od „ideálu“ liší.

Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení

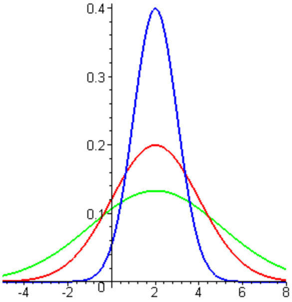
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



Grafy hustoty pravděpodobnosti pro různé střední hodnoty a stejné rozptyly.

Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



Grafy hustoty pravděpodobnosti pro stejné střední hodnoty a různé rozptyly. Zde $\mu = 2$.

Výpočet pravděpodobnosti

Jestliže hledáme $P(X \in (a, b))$, tj. $P(a < X < b)$, počítáme

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x.$$

Tento integrál *nelze* určit analyticky.

Proto musíme hledat jiné způsoby určení $P(a < X < b)$.

Obsah

Transformace náhodných veličin

Náhodné veličiny můžeme tzv. transformovat.

Teorie týkající se transformace náhodných veličin přesahuje rámec předmětu, následující výklad bude proto zjednodušený.

Definition

Jestliže je dána náhodná veličina $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, pak náhodná veličina

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

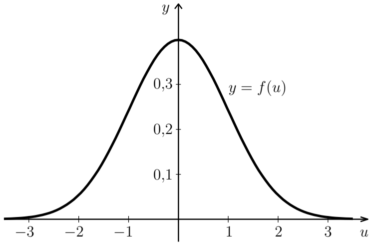
je taková, že $U \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Takovou náhodnou veličinu nazýváme *standardizovaná*. Rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$ nazýváme *standardizované normální rozdělení*.

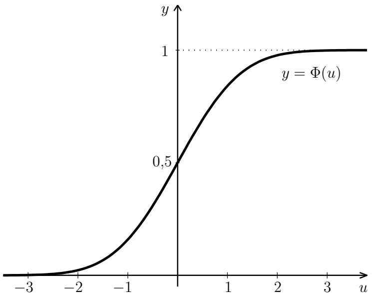
Označování

Jestliže $U \sim \mathrm{N}(0, 1)$, pak

- distribuční funkci náhodné veličiny U označujeme místo $F(x)$ většinou jako $\Phi(x)$.

Grafy hustoty (vlevo) a distribuční funkce (vpravo) $U \sim \mathrm{N}(0, 1)$





Využití standardizovaného normálního rozdělení

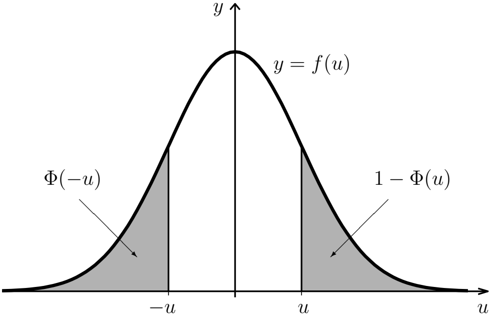
Hodnoty distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení jsou tabelovány. Proto je-li dána náhodná veličina $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ a máme-li určit $P(X \in (a, b))$, tj. $P(a < X < b)$, pak místo počítání $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

1. náhodnou veličinu standardizujeme, tj. místo $P(a < X < b)$ hledáme $P(\frac{a-\mu}{\sigma} < U < \frac{b-\mu}{\sigma})$
2. pro výpočet hledané pravděpodobnosti využijeme vztahu $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$, přičemž hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny $U \sim \mathrm{N}(0, 1)$ najdeme ve statistických tabulkách.

Vzhledem k tomu, že X, resp. U, je spojitá náhodná veličina, můžeme uvažovat i neostré nerovnosti.

Vlastnosti $\Phi(x)$

Graf hustoty standardizovaného normálního rozdělení je



Platí tedy $\Phi(u) + \Phi(-u) = 1$, tj.

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u).$$

Statistické tabulky

(ukázka, jak pracovat se statistickými tabulkami ve skriptech)

Příklad

Example

Životnost jistého výrobku (udávanou ve dnech) lze chápat jako náhodnou veličinu X, o níž víme, že např. $X \sim \mathrm{N}(\mu = 760, \sigma^2 = 225)$. Určete pravděpodobnost, že takovýto výrobek bude funkční po dobu alespoň dvou let (tj. 730 dní).

(řešení pomocí převodu na standardizované normální rozdělení)

Obsah

Součet náhodných veličin

Theorem

Jestliže $a \in \mathbb{R}$ *a* X_1 *a* X_2 *jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením,* $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ *a* $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$*, pak platí*

- $(aX) \sim \mathrm{N}(a\mu_1, a^2\sigma_1^2)$,
- $Y = (X_1 + X_2) \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Průměr náhodných veličin

Theorem

*Jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ **nezávislé** náhodné veličiny, $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, pak pro jejich průměr platí*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

tj. průměr má opět normální rozdělení, přičemž

$$\mu_{\overline{X}} = \mu \quad a \quad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

- Čím větší vzorek, který máme k dispozici, tj. n, tím menší rozptyl, tj. tím blíže jsou hodnoty rozloženy kolem střední hodnoty.

Obsah

Centrální limitní věta

Pomocí vhodného teoretického aparátu lze dokázat tzv. *centrální limitní větu*, která říká, že je-li dána posloupnost *nezávislých* náhodných veličin se stejným rozložením, stejnou střední hodnotou a stejným rozptylem, pak „součet“ takových náhodných veličin je náhodná veličina, která má normální rozdělení.

- V reálných zadáních je třeba si mj. vždy rozmyslet, co znamená požadavek na *nezávislost* náhodných veličin.

Náhrada binomického rozdělení normálním

Jedním z důsledků centrální limitní věty je i následující tvrzení:

Definition

Nechť $X \sim \mathrm{Bi}(n,p)$. Pak **za splnění určitých podmínek** platí

$$P(a < X < b) \doteq P(a < Y < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < U < \frac{b-\mu}{\sigma}\right),$$

tj. *diskrétní* náhodnou veličinu $X \sim \mathrm{Bi}(n,p)$ můžeme aproximovat *spojitou* náhodnou veličinou $Y \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Přitom $\mu = np$ a $\sigma^2 = np(1-p)$.

- Hledanou pravděpodobnost vypočteme jako rozdíl hodnot distribuční funkce Φ. Tyto hodnoty najdeme v tabulkách.

Podmínky aproximace

Podmínek aproximace binomického rozdělení normálním existuje obecně více. My budeme používat tuto sadu podmínek (musejí platit všechny současně):

- $\mathrm{E}X = np > 5$,
- $\mathrm{D}X = np(1-p) > 5$,
- p není „příliš blízké" 0 ani 1.

Jiné podmínky aproximace

Lze se také např. setkat s podmínkami (opět musejí platit současně)

- $\mathrm{D}X = np(1-p) > 9$,
- $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$.

Využití

V mnoha případech je použití binomického rozdělení velmi pracné. Připomeňme, že je-li $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$, pak

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$$

Example

Víme, že $X \sim \mathrm{Bi}(1000, \frac{1}{5})$. Určete $P(300 < X < 400)$.

Příklad

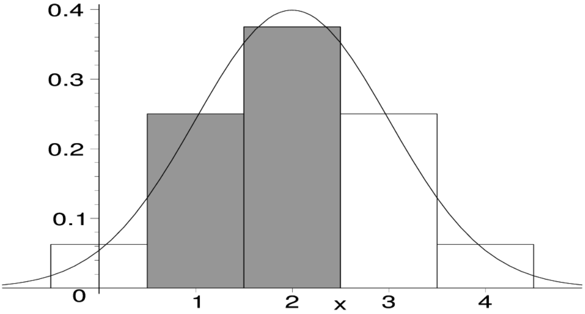
Example

Během zkoušky spolehlivosti se výrobek pokazí s pravděpodobností 0,15. Jaká je pravděpodobnost, že při zkoušení 1000 výrobků se jich pokazí alespoň 20?

(řešení sami)

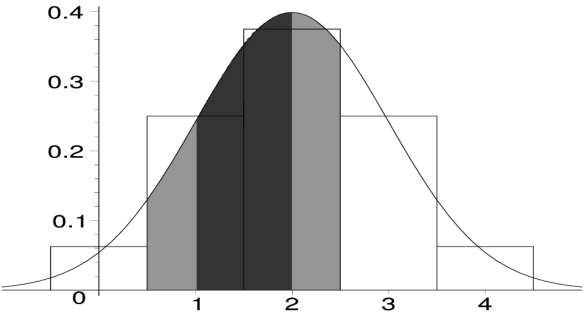
Geometrický význam

Jestliže chceme aproximovat diskrétní náhodnou veličinu $X \sim \mathrm{Bi}(N, p)$, jejíž histogram pravděpodobnosti je na obrázku (ze skript), pak hledáme přibližné vyjádření plochy jistých obdélníků (na obr. šedě).



Problematika malého *n*

Pro malá *n* není aproximace (tmavé) příliš vhodná. Použijeme proto tzv. korekci (světlé).



Problematika malého n

Je-li $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$, kde n je „malé“ číslo, a máme-li určit $P(a \leq X \leq b)$, pak

1. nejprve nahradíme X náhodnou veličinou $Y \sim \mathrm{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$
2. poté hledáme $P(a - 0,5 < Y < b + 0,5)$.

Obsah

Využití normálního rozdělení

Díky své charakteristice, centrální limitní větě a jejím důsledkům **velmi** široké.

Obsah

Nástin

V této části si ukážeme základní principy statistických testů. Bude se klást důraz na pochopení základních principů statistických testů a na filozofii statistického testování.

Věnovat se budeme pouze několika málo základním typům statistických testů.

Co statistickým testem „dokážeme“

Při statistickém testování přijímáme, resp. odmítáme, hypotézy, které si sami předem stanovíme.

Hypotézy přijímáme, resp. odmítáme, na základě kritérií, která si sami předem stanovíme.

- **Statistický test není důkaz platnosti nebo neplatnosti nějakého tvrzení!**
- **Při nepochopení pojmů a při (neúmyslně nebo i záměrně) nesprávném nastavení parametrů testu lze statistickým testem „dokázat“ téměř libovolnou hloupost!**

Krok 1: Stanovení hypotéz

Při statistickém testu porovnáváme dvě hypotézy – H_0 (tzv. *nulovou hypotézu*) a H_1 (tzv. *alternativní hypotézu*). Budeme-li předpokládat, že

- $H_0 = konstanta$,

pak H_1 můžeme zformulovat několika způsoby:

- $H_1 > konstanta$,
- $H_1 < konstanta$,
- $H_1 \neq konstanta$,
- $H_1 = konstanta\,2$.

Význam hypotéz: problém alternativní hypotézy

Při statistickém testování předpokládáme, že nulová hypotéza platí. Na základě nějakého testovacího kritéria a za použití jistého parametru poté rozhodneme, zda předpoklad o platnosti nulové hypotézy přijmeme nebo ne.

Jestliže jej nepřijmeme, *automaticky* přijímáme alternativní hypotézu.

- Musíme proto vždy zvážit, kterou z formulací alternativní hypotézy použijeme. Rozlišujeme mj. *oboustranné* a *jednostranné* (*levostranné* a *pravostranné*) testy.

Krok 2: Náhodný pokus

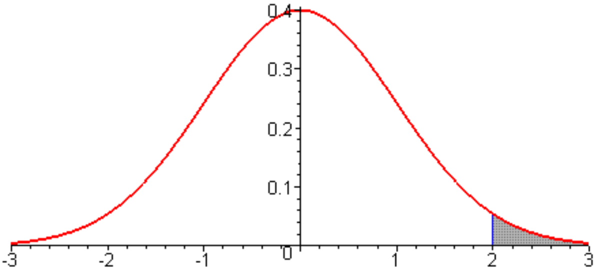
Po stanovení hypotéz provedeme nějaký náhodný pokus. Na základě výsledku tohoto náhodného pokusu poté budeme rozhodovat o hypotézách.

Možný výsledek náhodného pokusu bude popisovat nějaká náhodná veličina, která bude mít nějaké rozdělení pravděpodobnosti.

- My budeme vždy předpokládat, že tato náhodná veličina bude mít normální rozdělení.

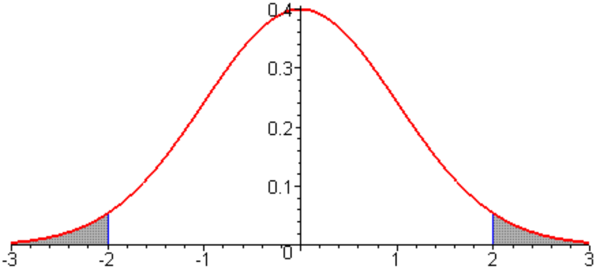
Krok 3: Stanovení hladiny významnosti testu

Náhodná veličina, která je výsledkem náhodného pokusu, může nabývat nějakých hodnot. Tyto hodnoty nyní rozdělíme na dvě disjunktní části takové, že do jedné z nich patří jen velmi málo hodnot – typicky 5% nebo 10% (na obrázku šedě). Dělící hodnotu označíme T_k a nazveme ji *kritickou hodnotou* (na obrázku $T_k = 2$).



Krok 3: Stanovení hladiny významnosti testu

Menší část hodnot může být rozdělená na dvě části, které jsou v případě normálního rozdělení stejně velké (na obrázku šedě). Pak hledáme dvě kritické hodnoty T_d a T_h, pro které platí $|\mu - T_d| = |\mu - T_h|$ (na obrázku $T_d = -2$ a $T_h = 2$).



Krok 3: Stanovení hladiny významnosti testu

Při rozdělování hodnot náhodné veličiny na dvě disjunktní části hledáme α–kvantily, resp. $\frac{\alpha}{2}$–kvantily, příslušné náhodné veličiny. Číslo α nazýváme *hladina významnosti testu*. Šedé oblasti grafů na předchozích obrazovkách nazýváme *kritický obor*.

Krok 4: Provedení pokusu

Provedeme a vyhodnotíme pokus, který nám slouží jako testovací kritérum.

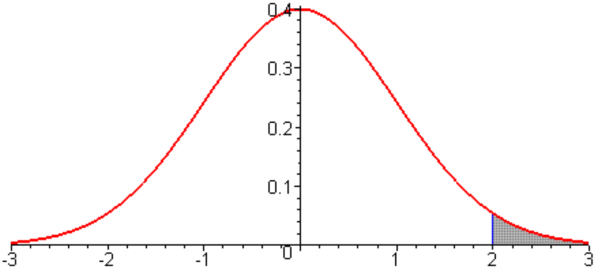
Následně můžeme

- buď zjišťovat, zda získaná hodnota leží v kritickém oboru
- nebo stanovit, jaká je pravděpodobnost, že výsledek pokusu bude takový, jako jsme získali, nebo „extrémnější".

(detaily viz plná verze skript včetně myšlenky p–hodnoty)

Krok 5: Rozhodnutí

Jestliže výsledek náhodného pokusu padne do bílé větší části hodnot, pak přijmeme nulovou hypotézu. V opačném případě ji zamítneme a přijmeme alternativní hypotézu (analogicky pro *p*–hodnotu).



Problémy

V každém kroku musíme postupovat korektně. Tj. zejména musíme:

- vhodně stanovit hypotézy,
- vhodně zvolit náhodný pokus, kterým budeme hypotézy testovat,
- vhodně stanovit hladinu významnosti testu.

Nekorektní postup v těchto bodech vede k nekorektním závěrům!

Obsah

Příklad

Výše uvedené principy nyní aplikujeme na konkrétní zadání.

(Text zadání je záměrně zvolen tak, aby ilustroval šíři záběru statistického testování i „testování".)

Situace a předpoklady

Situace:
Vývojář firmy Tepodong vyvinul nový postup na prodloužení doletu kuliček z automatického praku. Chce se přesvědčit o tom, že jeho vynález „funguje“.

Předpokládejme, že vývojář se bude rozhodovat na základě statistického testu. Dále předpokládejme, že dolet kuliček z automatického praku je náhodná veličina X, kterou lze popsat normálním rozdělením, např. $X \sim \mathrm{N}(\mu = 80m, \sigma^2 = 36)$.

Stanovení hypotéz

Tvrzení „střední hodnota doletu kuliček vystřelených novým postupem se nezmění“ označíme jako nulovou hypotézu H_0. K ní nyní zformulujeme alternativní hypotézu H_1.

- Jestliže vývojář bezpečně ví, že jeho „vynález“ nemůže dolet kuliček snížit, může zformulovat alternativní hypotézu H_1 jako „střední hodnota doletu kuliček vystřelených novým postupem se zvýší“.
- Jestliže vývojář neví, jaký má jeho „vynález“ vliv na dolet kuliček, měl by zformulovat alternativní hypotézu H_1 jako „střední hodnota doletu kuliček vystřelených novým postupem se změní“.

Pro účely tohoto příkladu předpokládejme formulaci H_1 jako „střední hodnota doletu kuliček se změní“.

Náhodný pokus

Dále je třeba provést nějaký pokus, na základě jehož výsledku budeme o hypotézách rozhodovat. V naší situaci tímto pokusem může být:

- vystřelení *jedné* kuličky novým postupem,
- vystřelení *více* kuliček novým postupem.

Pro jednoduchost předpokládejme první volbu. Předpokládejme, že dolet kuličky byl 90 metrů.

Stanovení hladiny významnosti testu

Zvolme vhodnou hladinu významnosti testu, např. $\alpha = 0,1$.

Výpočet kritických hodnot

Předpokládejme, že dolet kuliček *novým postupem* lze popsat náhodnou veličinou X se stejným rozdělením pravděpodobnosti jako dolet kuliček původním postupem, tj. $X \sim \mathrm{N}(\mu = 80m, \sigma^2 = 36)$.

Jestliže jsme zvolili $\alpha = 0,1$ a zformulovali hypotézu H_1 jako „střední hodnota doletu kuliček se změní“, pak musíme najít takové kritické hodnoty T_d a T_h tak, že

$$P(X < T_d) = P(X > T_h) = \frac{\alpha}{2} = 0,05,$$

tj. $P(X < T_d) + P(X > T_h) = \alpha$ a T_d, T_h jsou stejně vzdálené od střední hodnoty X.

Výpočet kritických hodnot

Hodnoty T_d a T_h určíme pomocí $\mathrm{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned} P(X < T_d) &= 0,05 \\ P\left(U < \frac{\mu - T_d}{\sigma}\right) &= 0,05 \\ P\left(U < \frac{80 - T_d}{6}\right) &= 0,05 \\ \Phi\left(\frac{80 - T_d}{6}\right) &= 0,05 \end{aligned}$$

Ze statistických tabulek určíme, že

$$\frac{80 - T_d}{6} = 1,64,$$

tj. $T_d = 70,16$. Protože graf hustoty normálního rozdělení je funkce symetrická podle přímky $x = \mu$, je $T_h = 89,84$.

Rozhodnutí

Dolet kuličky vystřelené novým postupem byl 90 metrů. Protože $90 \notin \langle T_d, T_h \rangle$, zamítáme hypotézu H_0 „střední hodnota doletu kuliček se nezmění" a přijímáme hypotézu H_1 „střední hodnota doletu kuliček se změní". Proto může vývojář firmy Tepodong tvrdit, že statistickým testem dokázal, že jeho vynález „funguje".

Statistický test vs. realita

Ve skutečnosti ale

- na základě *jednoho* pokusu,
- na hladině významnosti $\alpha = 0,1$ a
- za předpokladu, že dolet kuliček lze skutečně popsat normálním rozdělením s uvedenými parametry

tvrdí, že *zamítá* hypotézu, že střední hodnota doletu kuliček se nezmění a přijímá hypotézu, že se změní.

Oboustranný vs. jednostranný test

Ve výše uvedeném příkladě jsme hypotézu H_1 formulovali ve tvaru $H_1 \neq konstanta$. V takovém případě hovoříme o *oboustranném testu*.

Jestliže bychom hypotézu H_1 formulovali ve tvaru $H_1 > konstanta$, resp. $H_1 < konstanta$, hovořili bychom o *jednostranném testu* (*levostranném* nebo *pravostranném* testu).

Obsah

Náhodný výběr a výběrový průměr

Náhodným výběrem nazveme vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, kde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejné rozdělení pravděpodobnosti.

Označme

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\overline{X}$ je náhodná veličina, kterou nazveme *výběrový průměr*.

Rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru

Theorem

Jestliže $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, *pak*

$$\overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Příklad

Situace:
Vývojář firmy Tepodong vyvinul nový postup na prodloužení doletu kuliček z automatického praku. Chce se přesvědčit o tom, že jeho vynález „funguje“.

Předpoklady

Na rozdíl od předchozího situace budeme nyní nový postup testovat tak, že vystřelíme více kuliček. Vše ostatní zůstane stejné, tj.

- dolet kuliček je náhodná veličina $X \sim \mathrm{N}(\mu = 80m, \sigma^2 = 36)$,
- nulová hypotéza H_0 je tvrzení „střední hodnota doletu kuliček se nezmění“,
- alternativní hypotéza H_1 je tvrzení „střední hodnota doletu kuliček se změní“.

Předpoklady

Předpokládejme, že bylo provedeno $n = 10$ pokusů s těmito výsledky v metrech:

85–81–77–76–79,5–82,8–90–88,3–85,7–85,

tj. průměr těchto hodnot je $\overline{x} = 83,03$.

- Pozor na označování: zatímco $\overline{X}$ značí výběrový průměr, tj. náhodnou veličinu, $\overline{x}$ je průměr z konkrétních číselných hodnot.

Výpočet kritických hodnot: jiné

Hodnoty T_d a T_h určíme pomocí $\mathrm{N}(0,1)$. Hledáme pravděpodobnost, že výběrový průměr bude menší než kritická hodnota.

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X} < T_d) &= 0,05 \\
P\left(U < \frac{\mu - T_d}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) &= 0,05 \\
P\left(U < \frac{80 - T_d}{\sqrt{3,6}}\right) &= 0,05 \\
\Phi\left(\frac{80 - T_d}{\sqrt{3,6}}\right) &= 0,05
\end{aligned}
$$

Výpočet kritických hodnot: jiné

Ze statistických tabulek určíme, že

$$\frac{80 - T_d}{\sqrt{3,6}} = 1,64,$$

tj. $T_d \doteq 76,888$. Protože graf hustoty normálního rozdělení je funkce symetrická podle přímky $x = \mu$, je $T_h = 83,111$.

Rozhodnutí: analogické

Průměrný dolet kuličky vystřelené novým postupem byl 83,03 metrů. Protože $83,03 \in \langle T_d, T_h \rangle$, přijímáme hypotézu H_0 „střední hodnota doletu kuliček se nezmění". Proto můžeme tvrdit, že vývojář firmy Tepodong statistickým testem nedokázal, že jeho vynález „funguje".

Rozhodnutí pomocí p–hodnoty

V obou případech také můžeme zkoumat, jaká je pravděpodobnost, že kulička doletí tak daleko, jak doletěla, resp. že průměr z 10 pokusů bude takový, jaký byl.

(Detaily viz kapitola skript „Testování pomocí p–hodnoty").

Problém

Tvrdíme, že vývojář testem nedokázal, že jeho vynález „funguje“.

Můžeme ale tvrdit, že dokázal, že nefunguje?

Problém

V obou případech jsme předpokládáli, že rozptyl σ^2 známe. V našem případě (a ve většině reálných situací) ovšem známý není (a ani být nemůže). Pak ovšem nepracujeme s normálním rozdělením, ale s *t*–rozdělením a hovoříme o tzv. *t–testu*.

Obsah

Dva druhy chyb

Při statistickém testování se dopouštíme dvou druhů chyb:

1. Zamítneme nulovou hypotézu H_0, která ve skutečnosti platí.
2. Přijmeme nulovou hypotézu H_0, která ve skutečnosti neplatí.

Chyba v bodě 1 se nazývá chyba 1. druhu, chyba v bodě 2 se nazývá chyba 2. druhu.

Lze ukázat, že snižování chyby jednoho druhu vede ke zvyšování chyby druhého druhu.

Hladina významnosti testu

Hladina významnosti testu je pravděpodobnost chyby 1. druhu.

Síla testu

Definition

Označíme-li β pravděpodobnost chyby 2. druhu, pak číslo $1-\beta$ vyjadřuje pravděpodobnost, že správně zamítneme hypotézu H_0, jestliže platí hypotéza H_1. Číslo $1-\beta$ nazýváme *síla testu*.

Důležité

Před tím, než začnete řešit jakékoli příklady, si pročtěte plnou verzi učebního textu!

Příklady pro samostatnou práci

Příklady pro samostatnou práci jsou uvedeny v samostatné sbírce příkladů. Kromě nich můžete pro svou samostatnou práci používat také naše doplňkové elektronické zdroje.

1. Normální rozdělení – výpočet pravděpodobnosti
2. Normální rozdělení – výpočet kvantilu
3. Aproximace binomického rozdělení normálním

Příklady pro samostatnou práci

Example

Test má 120 otázek. Každá nabízí 6 možných odpovědí, přičemž správně je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná odpověď 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Určete pravděpodobnost, že získáme alespoň polovinu bodů, které lze při náhodném tipování v tomto testu očekávat. Poté požadavek „alespoň polovinu bodů“ nahraďte požadavkem „nejvýše čtyři pětiny bodů“.

Příklady pro samostatnou práci

Example

Je známo, že hmotnost ročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 10{,}25kg$ a rozptylem $\sigma^2 = 1{,}2$. Náhodně vybranému vzorku 100 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v jednom roce $12{,}5kg$. Na hladině významnosti α testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy.* Proveďte

1. oboustranný test pro $\alpha = 0{,}04$
2. jednostranný test pro $\alpha = 0{,}04$
3. jednostranný test pro $\alpha = 0{,}02$
4. jednostranný test pro $\alpha = 0{,}08$

Poté některé z testů proveďte pro vzorek 1000 dětí (další parametry zadání se nezmění).