Označme

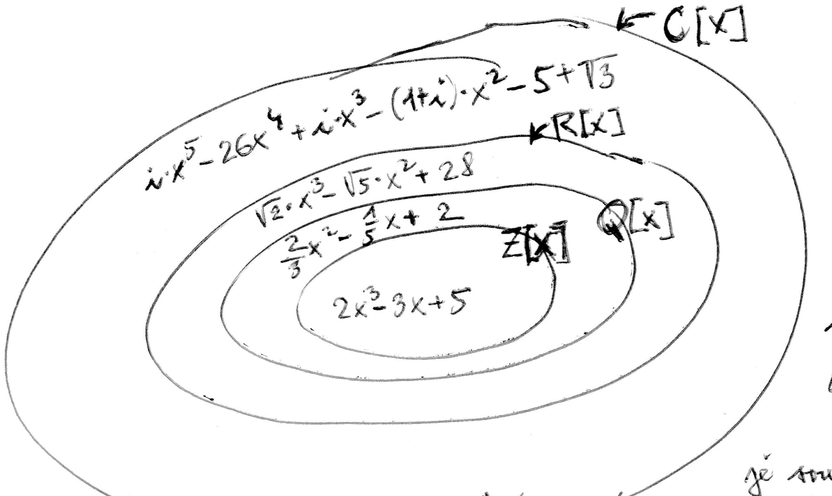
$$\mathbb{Z}[x]:=\{a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\dots+a_1\cdot x+a_0\ ;\ a_i\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\}$$ množinu polynomů s celočíselnými koeficienty, x je proměnná

$$\mathbb{Q}[x]:=\{a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\dots+a_1\cdot x+a_0\ ;\ a_i\in\mathbb{Q},\ n\in\mathbb{N}\}$$ množinu polynomů s racionálními koeficienty, x je proměnná

$$\mathbb{R}[x]:=\{a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\dots+a_1\cdot x+a_0\ ;\ a_i\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\}$$ množinu polynomů s reálnými koeficienty

$$\mathbb{C}[x]:=\{a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\dots+a_1\cdot x+a_0\ ;\ a_i\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}\}$$ množinu polynomů s komplexními koeficienty

Dostáváme se nyní k jádru předmětu algebra – k řešení polynomických rovnic typu $p(x)=0$, kde $p(x)$ je právě prvek některé z množin $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$, tzv. polynom. Co se týká množinového porovnání těchto množin, platí $\mathbb{Z}[x]\subseteq\mathbb{Q}[x]\subseteq\mathbb{R}[x]\subseteq\mathbb{C}[x]$:



- polynom s celočíselnými koeficienty je současně polynom s koeficienty racionálními, reálnými i komplexními
- polynom s racionálními koeficienty (tj. koeficienty ve tvaru zlomku) je současně i polynomem s koeficienty reálnými a komplexními;
- polynom s reálnými koeficienty je současně polynomem s koeficienty komplexními

Většinou nám bude v této přednášce stačit se zabývat polynomy ze množin $\mathbb{Z}[x]$ nebo $\mathbb{Q}[x]$, ale několik věcí, které budou řečeny, bude platit i pro polynomy ze množin $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Už v samotném tvaru polynomu $p(x)$ se používají dvě operace, sčítání a násobení; pomocí těchto stejných operací můžeme sčítat i samotné polynomy, tj. máme zde algebraické struktury se dvěma operacemi: $(\mathbb{Z}[x],+,\cdot)$, $(\mathbb{Q}[x],+,\cdot)$, $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$, $(\mathbb{C}[x],+,\cdot)$. První otázka matematického zkoumání tedy zní: o jaké struktury se jedná ze algebraického hlediska?

operace + : pro $p(x)=2x^3-5x^2+4$, $q(x)=3x^2-2x+5$ $\Rightarrow$ $p(x)+q(x)=2x^3-2x^2-2x+9$ opět polynom, tj. operace + je uzavřená … ①

② platí, což plyne ze asociativity sčítání čísel

③ … neutrálním prvkem je polynom $n(x)=0$ … velmi jednoduchý polynom

④ $p(x)=2x^3-5x^2+4$ $\Rightarrow$ inverzí vzhledem ke sčítání je $-p(x)=-2x^3+5x^2-4$

⑤ komutativita platí: $p(x)+q(x)=q(x)+p(x)$

operace $\cdot$: $p(x)\cdot q(x)=(2x^3-5x^2+4)\cdot(3x^2-2x+5)=6x^5-19x^4+20x^3-13x^2-8x+20$ … opět polynom, ①

② platí, plyne ze asociativity násobení čísel

③ neutrálním prvkem je $j(x)=1$ … tedy celkem jednoduchý polynom

④ $p(x)$ nemá inverzi: $(2x^3-5x^2+4)\cdot\dfrac{1}{2x^3-5x^2+4}=1$ … neplatí vlastnost ④

toto není polynom, není to tvaru ax^3+bx^2+cx+d

Inverzní funkce v množině polynomů sice existuje, ale neleží v naší množině $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ nebo $\mathbb{C}[x]$

(5) komutativita násobení platí

interakce operací $+, \cdot$: lze ověřit, že $p(x) \cdot (q(x)+r(x)) = p(x)\cdot q(x) + p(x)\cdot r(x)$ ... $\forall p(x), q(x), r(x)$

Tedy celkem podrobně a sečteno, všechny tři struktury $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$, $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$, $(\mathbb{C}[x], +, \cdot)$ jsou okruhy – a když si uvědomíme, že v nich se vlastně jedná o těžké sčítání a násobení čísel, nevyskytují se zde nenulové dělitelé nuly, tj. všechny tyto okruhy jsou současně i obory integrity (žádná ze struktur není tělesem, protože neobsahuje žádné inverzní vzhledem k násobení).

! Pozor na značení: struktury $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ samozřejmě tělesa jsou, jak už bylo řečeno minulý týden – ovšem nyní uvažujeme složitější objekty, které v sobě zahrnují neznámou hodnotu x, a dohromady tyto objekty vytvářejí pouze obor integrity.

Definice 7.1. $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ... prvek množiny $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ nebo $\mathbb{C}[x]$ se nazývá polynom stupně m; při tomto označení vždy předpokládáme, že $a_m \neq 0$ (a_m je tzv. vedoucí koeficient polynomu $p(x)$), jinak bychom a_m nepsali – s jedinou výjimkou, když $p(x) = 0$, tam je $a_0 = 0$ vedoucí koeficient, se nule rovnat musí

Definice 7.2 Říkáme, že číslo c je kořen polynomu $p(x)$ respektive že c je řešením polynomické rovnice $p(x)=0$ $\}$ jestliže $p(c)=0$, tj.

po dosazení $x = c$ $<$ dostaneme hodnotu 0 ... v případě polynomu $p(x)$; dostaneme pravdivou rovnost ... v případě rovnice $p(x)=0$

Tedy řešení polynomické rovnice souvisí s pojmem kořen polynomu – někdy tyto dva pojmy bývají nepřesně spojovány, například v neštěstí po ZŠ mluvíme o kořenu rovnice ... to není přesné, VŠ terminologie zde rozlišuje pojem „kořen polynomu" a „řešení rovnice".

Nejprve si řekněme něco o vzorcích:

a) $a\cdot x + b = 0$ ... to je tzv. lineární rovnice – POZOR, vzhledem k počtu řešení zde mohou nastat tři situace, např.

$0\cdot x + 5 = 0$ ... nemá řešení

$2\cdot x + 5 = 0$ ... nemá řešení v $\mathbb{Z}$, ale v $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ano: $x_1 = \frac{-5}{2}$

$0\cdot x + 2 = 2$ ... má řešení nekonečně mnoho: každé číslo z množiny, které nás zajímá, je řešením rovnice po dosazení za x

b) $a\cdot x^2 + bx + c = 0$ ... tzv. kvadratická rovnice ... existují vzorce pro její řešení: všimněte si, že vzorce automaticky předpokládají, že $a \neq 0$, jinak bychom ji napsali jako rovnici lineární, viz výše.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

... dosadíme a vypočteme řešení, a všichni jsou spokojeni; pozor, už u kvadratických rovnic někdy dochází k tomu, že b^2-4ac je záporné reálné číslo: má smysl počítat odmocninu ze záporného čísla? Jinými slovy, existuje řešení kvadratické rovnice $x^2+1=0$?

Na množině $\mathbb{R}$ jistě takové řešení neexistuje: žádné číslo x se po umocnění na druhou a přičtení 1 nerovná nule.

Zde někde vzniká pojem komplexního čísla. Stejně jako se matematika stovky let zdráhala pracovat se zápornými čísly, nejprve se zdráhala pracovat s komplexními čísly

$$\mathbb{C} := \{a + b\cdot i\ ;\ \text{kde } a,b\in\mathbb{R};\ i \text{ je imaginární číslo}: i^2 = -1\}.$$

Má cenu zavádět imaginární čísla, jejichž druhá mocnina je záporná?

Z hlediska řešení rovnic to smysl mělo:

řešením rovnice $x^2+1=0$ jsou čísla $x_1 = i$, $x_2 = -i$, jejichž umocněním vznikne -1.

Už jsme si říkali V ZÁKLADECH MATEMATIKY, že komplexní čísla $a+bi$ lze mezi sebou násobit i sčítat, dokonce existují i inverze vzhledem k oběma operacím (tj. komplexní čísla můžeme odečítat i dělit – vyjma dělení nulou, kterou jsme ovšem nemohli dělit ani v $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$), čili $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je těleso, tj. struktura s hezkými algebraickými vlastnostmi vzhledem k oběma operacím.

Matematický model komplexního čísla tedy sestrojit lze, otázkou je, k čemu je to dobré kromě základní věty algebry, kterou si řekneme za chvilku. Nakonec se ukázalo, že komplexní čísla jsou užitečná tam, kde chcete něco zobrazit v rovině: komplexnímu číslu $a+bi$ totiž jednoznačně odpovídá bod $[a;b]$ v rovině. No a jakmile se spojilo komplexní číslo s geometrickým významem, ukázalo se, že řadu úkolů, operací s body a vektory v rovině lze stejně dobře popsat či řešit pomocí komplexních čísel.

Př. 7.1. V analytické geometrii lze přímku procházející bodem $[2;1]$ se směrovým vektorem $(1, -\frac{1}{2})$ vyjádřit parametrickými rovnicemi

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2 + t\cdot 1 \\ y &= 1 + t\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad , t\in\mathbb{R}}$$

tutéž přímku lze vyjádřit pomocí komplexních čísel jako

$$\boxed{z = (2+i) + t\cdot\left(1 - \tfrac{1}{2} i\right) \quad , t\in\mathbb{R}}$$

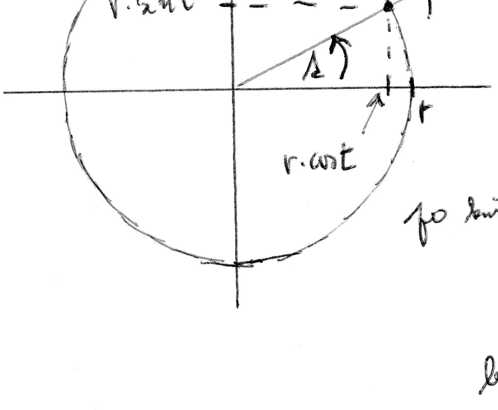
tímto způsobem převedeme reálný případ na komplexní a naopak

neboli dvourozměrné vektory „schováme" do komplexních čísel, a pokud potřebujeme, k dřívějším souřadnicím těchto čísel se dostaneme tak, když vezmeme/najdeme jeho reálnou část

$x = \mathrm{Re}\, z =$ to, co <u>není</u> koeficientem u čísla i

$y = \mathrm{Im}\, z =$ to, co <u>je</u> koeficientem u čísla i

Př. 7.2 Ještě vzájemnější/užitečnější souvislosti najdeme při popisu pohybu bodu/objektu po kružnici o poloměru r: při popisu pomocí obloukové míry (proměnná t je rovna velikosti úhlu v radiánech) musíme užít funkcí sin, cos: souřadnice pohybujícího se objektu jsou $[r\cdot\cos t, r\cdot\sin t]$, dostáváme tedy rovnice



$$x = r\cdot\cos t$$
$$y = r\cdot\sin t.$$

Při využití komplexních čísel se využívá slavný Eulerův vzorec

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i\cdot\sin t}$$

, takže rovnoměrný pohyb objektu po kružnici lze popsat rovnicí

$$\underline{\underline{z = r\cdot e^{it}}}$$

(kde $z = x + iy$ je vztah mezi komplexním číslem z a vektorem (x, y)).

Protože pomocí vzorců pro otáčivý (či kmitající) pohyb lze dobře popsat elektrický proud, komplexních čísel s oblibou užívají kolegové v elektrotechnice, místo aby pracovali s vektory v rovině.

Budeme tedy místy pracovat i s imaginární jednotkou i s tou malou informací, že jedním z jejích využití je popis práce s body a vektory v rovině.

c) $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ … tzv. kubická rovnice … pro tuto rovnici a její řešení existují obecné vzorce pro $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ (tzv. Cardanovy vzorce – viz BP Ivety Trombikové, najdete v IS tohoto předmětu, str. 22–23)… Tyto vzorce se příliš neužívají, protože z algebraického hlediska se jedná o totální vzorce, které matematicky zdatní lidé s velkou slávou objevili. I při dosazování do těchto vzorců se opět velmi snadno mohou vyskytnout komplexní čísla – a to i v případě, že výsledné řešení je pouze reálné!! Prostě se tam počítá s odmocňováním ze záporných čísel, a ony se třeba někdy v průběhu výpočtu (umocněním na druhou) ztratí.

d) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, $a\neq 0$ … kvartická rovnice (toto označení se příliš nepoužívá, mnohem názornější je říci: algebraická rovnice 4. stupně nebo polynomická rovnice 4. stupně): Opět jsou zde vzorce obecné, totální a jsou kupodivu jednodušší než u kubické rovnice, protože po substituci $x^2=y$ a „doplnění části polynomu na čtverec" dostaneme rovnici kvadratickou proměnné y. Lze možné užít vzorce častěji než u rovnice kubické – postup najdete na internetu.
DOPORUČUJI ZEJMÉNA STRÁNKU SYMBOLAB.COM PRO ONLINE ŘEŠENÍ POLYNOMICKÝCH ROVNIC

e) Obecné vzorce pro rovnice řádu 5 a vyšší neexistují, jak dokázali pánové Gauss, Galois. Podtrženo a sečteno, matematicky běžnému uživateli, kterého by zajímalo řešení těchto rovnic, vzorce většinou nenabídne. Prostě existuje několik algebraických postupů, jak některá řešení najít:

A. Hornerovo schéma: Zjistí, zda je polynom $p(x)$ dělitelný polynomem $(x-c)$ stupně 1

Př. 7.3. $(6x^3+13x^2-4):\underbrace{(x+2)}_{x-(-2)}=6x^2+x-2$

první koeficient sepíšeme

koeficienty u vynechaných mocnin nesmíme zapomenout!!

	6	+13	+0	−4
−2	6	1	−2	$\boxed{0}$

Hornerovo schéma jste měli v diskrétní matematice, ovšem vedoucí koeficient jste většinou měli rovný jedné. Nyní budeme pracovat s obecným vedoucím koeficientem.

Pokud poslední hodnota na řádku Hornerova schématu se rovná nule, víme, že $c=-2$ je kořenem polynomu $6x^3+13x^2-4$, a tedy řešením polynomické rovnice $6x^3+13x^2-4=0$.
Ba co víc, koeficienty $6, 1, -2$ určují polynom, který vzniká jako podíl: můžeme tedy dopočítat rychlé řešení

$$6x^3+13x^2-4=0$$

$$(x+2)\cdot(6x^2+x-2)=0$$

$$x_1=-2 \qquad x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 6\cdot 2}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\left\langle\begin{matrix}-4\\3\end{matrix}\right.$$

Pomocí Hornerova schématu jsme snížili stupeň zkoumaného polynomu a užitím vzorce $x_{2,3}=\dots$ našli ostatní kořeny. Našli jsme tři řešení rovnice: $x_1=-2$, $x_2=-4$, $x_3=3$.

Otázkou je, zda tento ROZKLAD polynomu na součin lineárních polynomů existuje vždy. Na ni odpověděl pan Gauss už v roce 1797 a dnes se tato odpověď jmenuje

Základní věta algebry: každý polynom $p(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\dots+a_1\cdot x+a_0 \in \mathbb{C}[x]$ lze rozložit na součin vedoucího koeficientu a lineárních polynomů $x-x_i$, kde $x_i \in \mathbb{C}$ jsou jeho kořeny:

$$a_n\cdot(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Ad př. 7.3. Náš polynom $6x^3+13x^2-4$ lze psát jako $6(x+2)\cdot(x+4)(x-3)$, tedy rovnici $6x^3+13x^2-4=0$ při rozkladu polynomu na součin polynomů lineárních

$$6\cdot(x+2)(x+4)(x-3)=0$$

lze snadno řešit!

Řešením jsou právě ty hodnoty, které po dosazení za x vynulují některou ze závorek.

Základní věta algebry je velmi krásný zákon/skutečnost: vlastně nám říká, že stejně jako každé přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel, i každý polynom stupně n lze rozložit na součin vedoucího koeficientu a jednoduchých lineárních polynomů typu $(x-x_i)$.

Příklad 7.4. Hodnoty x_i jsou obecně komplexní – to vidíme např. u polynomu (x^2+1), který lze rozložit na součin $(x-i)(x+i)$, nebo u polynomu (x^2+x+1), kde $x_{1,2}$ lze najít pomocí vzorce a zjistíme, že místo (x^2+x+1) můžeme psát $(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$ (při výpočtu jsme $\sqrt{-3}$ upravili na $i\cdot\sqrt{3}$... vyvozujeme označení, že $i=\sqrt{-1}$). Můžete si zkusit zpětným roznásobením závorek, že dostanete původní polynom.

Klíčovou otázkou zůstává, jakým způsobem jsme zjistili, že v př. 7.3 máme do Hornerova schématu dosadit zrovna číslo $c=-2$. Určitou odpověď na tuto otázku dává:

Věta o racionálních kořenech polynomu Pokud polynom $p(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ má nějaké kořeny ve tvaru zlomku $\frac{k}{l}$, tak $k\mid a_0 \wedge l\mid a_n$.

koeficienty musí být celočíselné!!

Tato věta je geniální a pomůže nám najít všechny racionální kořeny: Vypíšeme si všechny dělitele čísla a_0, všechny dělitele čísla a_n a vytvoříme z nich zlomky – tyto zlomky zkusíme užít jako vstupy do Hornerova schématu – kořenem polynomu tyto zlomky být mohou i nemusí, ale máme jistotu, že žádná další racionální čísla zkoušet nemusíme.

POZOR, POSTUP FUNGUJE JEN TEHDY, KDYŽ VŠECHNY KOEFICIENTY a_i, NEJEN PRVNÍ A POSLEDNÍ, JSOU CELOČÍSELNÉ

Př. 7.5. Řešte rovnici $2x^5+x^4-12x^3-20x^2-19x-6=0$

$\left.\begin{array}{l}6 \text{ má dělitele } \pm1, \pm2, \pm3, \pm6\\ 2 \text{ má dělitele } \pm1, \pm2\end{array}\right\} \Rightarrow$ pokud existuje kořen ve tvaru zlomku, musí být obsažen v množině $\{\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm2, \pm3, \pm\frac{3}{2}, \pm6\}$.

Zkusme postupně některé z nich:

	2	1	-12	-20	-19	-6
$\frac{1}{2}$	2	2	-11	... zde se ukázalo, že by na konci řádku nebyla 0		
$-\frac{1}{2}$	2	0	-12	-14	-12	$\boxed{0}$

jakmile jsem našel jedno řešení, dívám se už dál na polynom vzniklý jako podíl a vidím, že všechny koeficienty jsou sudé, takže vytýkám 2:

$$2x^5+x^4-12x^3-20x^2-19x-6=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2x^4-12x^2-14x-12\right)=0$$

$$2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(x^4-6x^2-7x-6\right)}=0$$

a dále už pracuji s tímto dílčím polynomem, opět pro něj sestavím postup pro racionální kořeny polynomu, získávám: další potenciální kořen musí být, pokud je racionální, z množiny $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

	1	0	−6	−7	−6
3	1	3	3	2	0
1	... není kořen				
−1	... není kořen				
2	... není kořen				
−2	1	1	1	0	

... znovu už přepočítám: potenciální kořeny jsou $\pm1, \pm2$

zase si vše napíšeme jako součin závorek:

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)(x+2)\cdot\left(x^2+x+1\right)=0$$

tento dílčí polynom má kořeny komplexní, viz př. 7.4

a z tohoto zápisu vidíme všechna řešení: $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)\cdot(x+2)\cdot\left(x+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\cdot\left(x+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=0$.

Definice 7.3. Kořen c polynomu $p(x)$ se nazývá k-násobný, jestliže v rozkladu $p(x)$ na součin lineárních polynomů podle základní věty algebry se vyskytuje $(x-c)^k$ (závorka $(x-c)$ je umocněna právě na mocninu k).

Př. 7.6. Možnost nalezení kořene s vyšší násobností nám napovídá algoritmus sám: při užití Hornerova schématu nezapomeňte na možnost užít znovu stejné číslo. Například při řešení rovnice $x^5-15x^3+10x^2+60x-72=0$ zkoušíme marně ±1, ale při dosazení $c=2$ dostaneme

	1	0	−15	10	60	−72
2	1	2	−11	−12	36	0
2	1	4	−3	−18	0	
2	1	6	9	0		
−3	1	3	0			
−3	1	0				

a hned dosadíme 2 ještě jednou

... všechny koeficienty jsou kladné, tj. eventuální další řešení musí být záporné (a nebo zde bychom už mohli pracovat se vzorcem $x_{1,2}=\dots$)

Tedy po rozkladu získáváme $(x-2)^3\cdot(x+3)^2=0$ ... řešení naší rovnice jsou tedy pouze dvě.