MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Řešení některých algebraických rovnic

Bakalářská práce

Brno 2018

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D.

Vypracovala: Tereza Komprsová

Bibliografický záznam

KOMPRSOVÁ, Tereza. *Řešení některých algebraických rovnic: bakalářská práce.* Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, 2018, 80 s. Vedoucí bakalářské práce Břetislav Fajmon.

Anotace

Bakalářská práce „Řešení některých algebraických rovnic" shromažďuje teoretické poznatky o polynomech a algebraických rovnicích, které jsou nezbytnou součástí při řešení jednotlivých typů rovnic. Práce se převážně zabývá čtyřmi typy algebraických rovnic, a to lineárními, kvadratickými, binomickými a reciprokými, a čtenáře seznamuje i s jejich grafickým řešením. Práce je obohacena o řadu řešených úloh a názorných příkladů.

Abstract

The bachelor´s thesis „Solution of some algebraic equations" collects theoretical knowledge about polynomials and algebraic equations, which is necessary for equation solving. The thesis is mostly based on four types of algebraic equations: linear, quadratic binomial and reciprocal. The work introduces also graphical solutions and contains many solved tasks and illustrative examples.

Klíčová slova

Polynomy, algebraické rovnice, lineární rovnice, kvadratické rovnice, binomické rovnice, reciproké rovnice, soustavy lineárních rovnic, grafické řešení

Keywords

Polynomials, algebraic equations, linear equations, quadratic equations, binomial equations, reciprocal equations, system of linear equations , graphical solution

Prohlášení

„Prohlašuji, že jsem závěrečnou bakalářkou práci vypracovala samostatně, s využitím pouze citovaných pramenů, dalších informací a zdrojů v souladu s Disciplinárním řádem pro studenty Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity a se zákonem č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o znění některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů.“

Brno, 30. března 2018 ....

Tereza Komprsová

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala v první řadě RNDr. Břetislavu Fajmonovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné připomínky, inspiraci, příjemnou spolupráci a vstřícný přístup při konzultacích a vedení práce. Velké díky patří i mé rodině a přátelům, kteří mne po celou dobu studia a při vypracování práce podporovali.

Obsah

Úvod

Bakalářská práce se bude zabývat problematikou vybraných typů algebraických rovnic. Čtenáři by neměla poskytnout pouze jednotlivé kroky k řešení různých typů rovnic, ale hlavně umožnit danou látku pochopit od základu a vyhnout se tak mechanickému počítání, které je dle mého na školách velmi oblíbené. Dochází pak k tomu, že žáci umí daný příklad pomocí nějakého, předem určeného algoritmu dobře vypočítat, avšak proč postupují, jak postupují, již nevědí.

Mým cílem proto bude vytvořit práci, která by mimo řadu řešených a názorných příkladů, které danou problematiku demonstrují, obsahovala i odvození, důkazy a jednotlivé krůčky ke vzorcům a postupům, jež při řešení jednotlivých typů rovnic využíváme.

Práce bude rozdělena do sedmi hlavních kapitol. V každé z nich budou zmíněné potřebné teoretické poznatky a pár vzorových příkladů. V práci se též budu zabývat geometrickým řešením, které bude ilustrováno na grafech vytvořených v programu GeoGebra. Pokusím se o srovnání jednotlivých metod řešení a dovolím si čtenáři nabídnout tu schůdnější.

První dvě kapitoly spolu s reciprokými rovnicemi budou převážně čerpat ze studia odborné literatury probírané na vysoké škole. Kvadratické a binomické rovnice vychází ze studia středoškolské literatury a lineární rovnice spolu se soustavami jsou problematikou škol základních.

Na první pohled se může výběr jednotlivých typů rovnic zdát dosti netradiční, avšak důvod je jasný. Problematika lineárních rovnic je bezpochyby nejdůležitější, neboť pomocí lineárních rovnic se dají vyjádřit důležité vztahy v přírodě a technice. Na řešení kvadratických rovnic lze spoustu různých typů rovnic převést. Řešení binomických rovnic probíhá v oboru komplexních čísel, jež jsou jejich ústředním problémem, který činí studentům velké potíže. V práci již předpokládám určitou znalost komplexních čísel, avšak jednotlivé příklady se snažím důkladněji popsat. Posledním typem rovnic jsou rovnice reciproké, se kterými jsem se setkala poprvé až na vysoké škole v kurzu Algebra 3, a proto jsem si je do výběru zvolila, neboť jsem se o nich chtěla dozvědět co nejvíce.

1. Základní pojednání o polynomech jedné proměnné

1.1 Základní pojednání

Definice 1.1 Algebraická definice polynomu

Mějme okruh R[1]. Polynomem jedné proměnné nad okruhem R nazýváme každou nekonečnou posloupnost prvků okruhu R

$$f = (a_0, a_{1,} a_{2,} \dots), \tag{1}$$

kde $a_i \in R, i = 0,1,2 \dots$, v níž je nejvýše konečně mnoho členů nenulových.
Množinu všech polynomů nad okruhem R označujeme $R[x]$.

Poznámka

Polynom, jehož všechny koeficienty jsou rovny nule, tzn. $\text{o} = (0, 0, \dots, 0)$, nazýváme polynomem nulovým.

V následujícím odstavci se pokusíme polynom zapsaný pomocí posloupnosti (1) převést na běžně známé označení. Před tím si zde ještě musíme, pro větší pochopení, uvést definici součinu dvou polynomů a stupně polynomu.

Definice 1.2 Násobení polynomů

Mějme polynom $f = (a_0, a_{1,} a_{2,} \dots)$, $g = (b_{0,} b_{1,} b_{2,} \dots) \in R[x]$. Součinem $f \cdot g$ rozumíme

$$f \cdot g = (c_0, c_1, c_2, \dots),$$

kde $c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1, \dots, c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_0 b_k$.

Definice 1.3 Stupeň polynomu

Nechť polynom (1) je nenulový nad R a nechť je n celé nezáporné číslo takové, že $a_n \neq 0, a_k = 0$ pro $k > n$, tj.

$$f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots),$$

potom řekneme, že polynom f je stupně n, což označujeme $st(f) = n$.

---

[1] Číselným okruhem rozumíme komutativní okruh s jedničkou, tedy množinu se dvěma binárními operacemi $(R, +, \cdot)$, kde platí $(R, +)$ je komutativní grupa, $(R, \cdot)$ je komutativní pologrupa s jedničkou, násobení je distributivní vzhledem ke sčítání, tzn. $a \cdot (b + c) = ab + ac$, pro libovolné $a, b, c \in R$.

Konstrukce 1.1

Mějme polynom $f = (a_0, a_{1,} a_{2,} \dots)$ a prvek $r \in R$, tedy konstantní polynom $r = (r, 0, 0, \dots)$. Z definice součinu polynomů plyne následující pravidlo:

$$r \cdot f = (r, 0, 0, \dots) \cdot \left(a_0, a_{1,} a_{2,} \dots\right) = \left(r \cdot a_0, r \cdot a_{1,} r \cdot a_{2,} \dots\right).$$

Dále polynom $(0, 1, 0, 0, \dots)$ označme nějakým libovolným pevným symbolem, např. x. Opět z definice násobení plyne, že $x^2 = x \cdot x = (0, 0, 1, 0, \dots)$, $x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ atd.

Nechť polynom $f = (a_0, a_{1,} a_{2,} \dots)$ je polynomem stupně menšího nebo rovného n. Vynásobíme-li postupně polynomy $1, x, x^2, \dots x^n$ prvky $a_0, a_{1,} a_{2,} \dots, a_n$, získáme

$$(a_0, 0, 0, \dots) = a_0 \cdot 1 = a_0$$

$$\left(0, a_{1,}, 0, \dots\right) = a_1 x$$

$$\left(0, 0, a_{2,}, 0, \dots\right) = a_2\, x^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(0, \dots, 0, a_n, 0, \dots) = a_n x^n.$$

Sečtením pravých stran výše uvedeného schématu dostaneme $\left(a_0, a_{1,} a_{2,} \dots, a_n, \dots\right) =$ $= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$, tedy velmi známý tvar

$$f = a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Nyní už můžeme přejít k obecnému vyjádření známé analytické definice polynomu jedné proměnné, která chápe polynom jako reálnou funkci.

Definice 1.4 Polynom jedné proměnné

Funkci tvaru

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{2}$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou reálná čísla a n je celé nezáporné číslo, nazveme polynomem nebo též mnohočlenem proměnné x.

Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazveme koeficienty polynomu, číslo a_0 absolutním členem, číslo a_n nejvyšším koeficientem polynomu.

Poznámka

(a) Polynom, který má za koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ reálná čísla, se nazývá polynom *reálný,* pokud koeficienty budou komplexní čísla, tento polynom nazýváme *komplexním.*

My se budeme zabývat oborem reálných čísel, tedy polynomy reálnými.

(b) Je-li $a_n \neq 0$, řekneme, že výraz $p(x)$ je polynomem n-tého stupně a číslo n označujeme stupněm polynomu $p(x)$.

(c) Je-li $a_n = 1$, potom tento polynom nazýváme normovaným polynomem nebo též polynomem v normovaném tvaru. Každý libovolný polynom stupně n můžeme vydělením koeficientu $a_n \neq 0$ převést na normovaný tvar.

(d) Je-li $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$, řekneme, že polynom $p(x)$ vymizí identicky a nazveme ho nulovým polynomem.

Důležité je si uvědomit rozdíl mezi polynomem nulovým a polynomem nultého stupně, tedy polynomem, který je konstantní nenulovou funkcí, a nezaměňovat je mezi sebou.

Příklad

- $p(x) = 0$ je nulový polynom
- $p(x) = a_0 \neq 0$ je polynom nultého stupně

Z algebraického hlediska má nulový polynom posloupnost $(0, 0, 0, \dots)$, kdežto polynom nultého stupně $(a, 0, 0, \dots)$, kde $a \neq 0$.

Příklad

Polynom $x^7 + 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ můžeme ztotožnit s posloupností $(1, -4, 6, -12, 5, 0, 0, 1)$.

(e) Polynomy budeme stručně označovat symboly $f(x), g(x), h(x), P(x), Q(x)$ atd. Symbolem $f(x_0)$ rozumíme hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x = x_0$.

Definice 1.5 Stupeň polynomu

Stupněm polynomu $p(x)$ rozumíme nejvyšší exponent x, u něhož je nenulový koeficient. Značíme jej $st\ p(x) = n$.

Poznámka

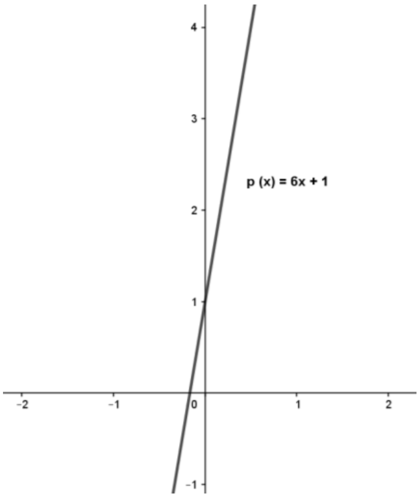
Z konstrukce 1.1 plyne, že definice 1.3 a 1.5 stupně polynomu jsou ekvivalentní.

Příklady stupně polynomu:

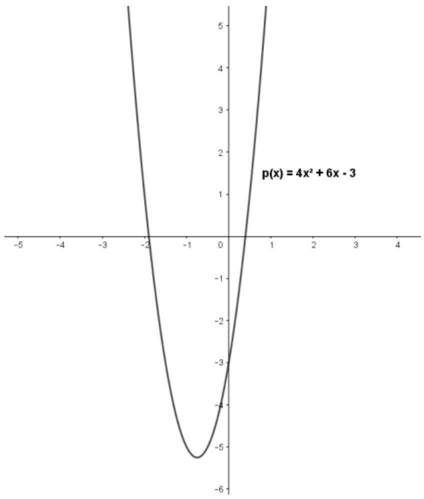
- $p(x) = 6x + 1$ (Obr. 1) je polynom 1. stupně
- $p(x) = 4x^2 + 6x - 3$ (Obr. 2) je polynom 2. stupně
- $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$ (Obr. 3) je polynom 3. stupně
- $p(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x + 2$ (Obr. 4) je polynom 4. stupně

Polynomy prvního, druhého, třetího a čtvrtého stupně nazýváme také *lineárními, kvadratickými, kubickými a kvartickými*.

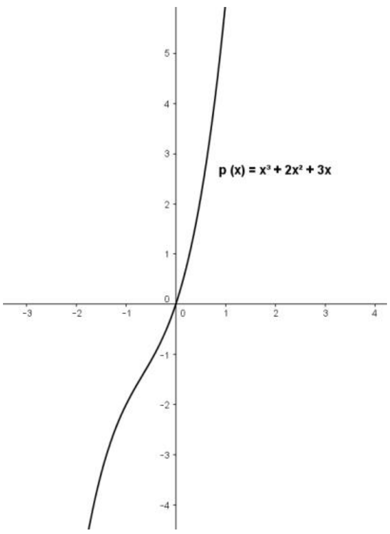
Nyní se podíváme, jak vypadají grafy polynomů různých stupňů.



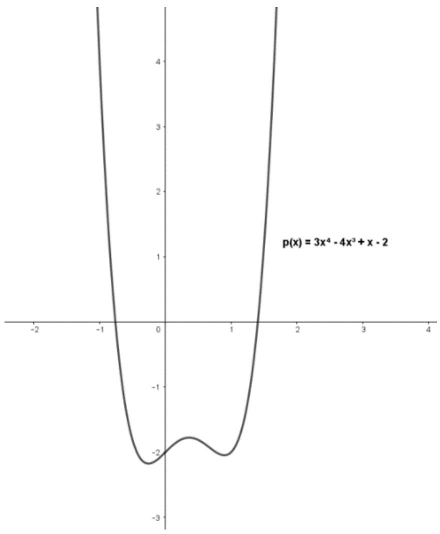
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Definice 1.6 Rovnost dvou polynomů

Dva polynomy $p(x)$, $q(x)$ jsou si *rovny*, což vyjadřujeme rovnicí $p(x) = q(x)$, jestliže se jejich stejnolehlé koeficienty, tzn. koeficienty při týchž mocninách proměnné x, rovnají.

Příklad

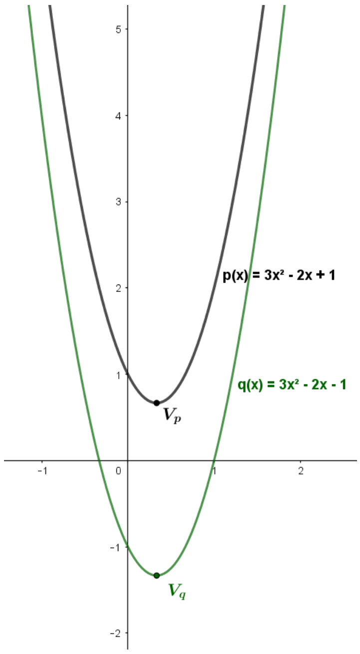
- $p(x) = 5x + 2$ $\qquad$ $q(x) = 5x + 2$

Koeficienty u stejných mocnin jsou si rovny, proto se i zadamé polynomy rovnají.

- $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$ $\qquad$ $q(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Polynomy se nerovnají, neboť absolutní členy u obou polynomů se znaménkově liší.

To, že se naše zadané polynomy nerovnají, můžeme vyčíst i z grafu (Obr. 5). Aby se dva polynomy rovnaly, musí jejich grafy splynout. Grafy polynomů jsou dvě různé paraboly s vrcholy[2] $V_p = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], V_q = \left[\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right]$, tedy posunuté o 2.



Obr. 5

[2] Vrcholy snáze určíme pomocí derivace funkce, známé z matematické analýzy, neboť vrchol paraboly chápeme jako bod, ve kterém má daná kvadratická funkce lokální extrém. Má-li obecně funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, potom platí $f'(x_0) = 0$.
Derivujeme-li $p(x)$, dostaneme $p'(x) = 6x - 2$, tedy $x = \frac{1}{3}$, dosadíme-li do $p(x)$, získáme $y = \frac{2}{3}$, potom $V_p = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Derivujeme-li $q(x)$, dostaneme $q'(x) = 6x - 2$, tedy $x = \frac{1}{3}$, dosadíme-li do $q(x)$, získáme $y = -\frac{4}{3}$, potom $V_q = \left[\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right]$.

1.2 Dělení polynomů

Definice 1.7 O dělení polynomů

Mějme dva polynomy $p(x)$, $q(x)$. Existuje-li polynom $h(x)$ takový, že platí

$$p(x) = q(x) \cdot h(x),$$

pak řekneme, že polynom $q(x)$ dělí polynom $p(x)$, což značíme $q(x)|p(x)$. V opačném případě řekneme, že $q(x)$ nedělí $p(x)$.

Dělení polynomů by nám nemělo dělat větší obtíže, neboť jeho algoritmus je velmi podobný algoritmu dělení celých čísel. Jedná se totiž o podobné struktury v takovém smyslu, že $(Z, +,\cdot)$ je okruh a $(R[x], +,\cdot)$ je také okruh.

Tak jako u dělení celých čísel může být výsledkem číslo beze zbytku, či se zbytkem, tak i u dělení polynomu získáme buď polynom beze zbytku, či tzv. částečný podíl a zbytek.

Věta 1.1 O dělení polynomů se zbytkem

Mějme dva nenulové polynomy $p(x), q(x)$ stupňů m, n a nechť $m > n$. Při dělení polynomu $p(x)$ polynomem $q(x)$ dostáváme nějaký polynom $r(x)$ a polynom $z(x)$, což je vyjádřeno vztahem

$$p(x) = q(x) \cdot r(x) + z(x),$$

přičemž platí, že stupeň polynomu $z(x)$ je menší než stupeň polynomu $q(x)$.

Poznámka

(a) Polynom $r(x)$, resp. polynom $z(x)$ poté nazýváme podílem, resp. zbytkem tohoto dělení.

(b) Z výše uvedeného lze usoudit, že pro $q(x) = 0$ dělení se zbytkem nelze provést, neboť dle podmínky stupeň $z(x)$ není menší než stupeň polynomu $q(x)$.

(c) V případě, že polynom $z(x)$ je roven nule, potom platí vztah $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ z definice 1.7.

Úloha: Dělte polynom $p(x)$ polynomem $q(x)$, máme-li

$p(x) = 4x^3 + x^2 + 7x + 2$, $q(x) = 2x^2 - 1$.

$$(4x^3 + x^2 + 7x + 2) \div (2x^2 - 1) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{9x+\frac{5}{2}}{(4x^3+x^2+7x+2)}$$

$$\underline{-(4x^3 \qquad - 2x)}$$

$$x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{-(x^2 \qquad - \tfrac{1}{2})}$$

$$9x + \frac{5}{2}$$

Vzhledem k výše uvedenému zápisu a označení ve větě 1.1 platí

$p(x) = q(x) \cdot r(x) + z(x)$, kde

$r(x) = 2x + \frac{1}{2}$, $\quad z(x) = 9x + \frac{5}{2}$, tedy

$(4x^3 + x^2 + 7x + 2) = (2x^2 - 1)\left(2x + \frac{1}{2}\right) + (9x + \frac{5}{2})$.

Dělení polynomů budeme dále využívat při hledání kořenů polynomů a následně algebraických rovnic. Někdy však může být dělení zbytečně zdlouhavým procesem, při němž se mohou naskytnout numerické chyby, a proto v oddíle 1.4 uvedeme metodu zvanou Hornerovo schéma. Nejprve se ovšem musíme seznámit s pojmy hodnota polynomu v bodě c a kořen polynomu.

1.3 Kořen polynomu

Definice 1.8 Hodnota polynomu

Hodnotou polynomu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ v bodě c rozumíme reálné číslo, které získáme dosazením za proměnnou x do uvedeného polynomu

$$p(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0, \text{ kde } c \in \mathbb{R}.$$

Poznámka

Zajímavým případem dělení je dělení polynomu $p(x)$ lineárním polynomem $(x - c)$, kde c je libovolné číslo.

Mějme libovolné číslo c. Dělení se zbytkem daného polynomu $p(x)$ lineárním polynomem $(x - c)$ vyjádříme rovnicí

$$p(x) = (x - c) \cdot r(x) + z(x),$$

kde $st\ z(x) < st(x - c) = 1$. Potom tedy platí, že $st\ z(x) = 0$ nebo $z(x) = 0$. V obou předchozích případech je zbytkem konstanta Z a z následující rovnice

$$p(c) = (c - c) \cdot r(x) + Z = Z$$

vyplývá, že konstanta Z je rovna $p(c)$.

Výše uvedený poznatek můžeme shrnout do následující věty, jež je důsledkem věty 1.1.

Věta 1.2 O dělení polynomu lineárním polynomem

Zbytek po dělení polynomu $p(x)$ lineárním polynomem $(x - c)$, kde c je libovolné číslo, je konstanta rovná $p(c)$.

Definice 1.9 Kořen polynomu

Kořenem polynomu $p(x)$ se nazývá číslo c, právě když platí $p(c) = 0$.

Poznámka

(a) Z předchozích dvou definic jednoznačně vyplývá, že nulový polynom má za kořen každý prvek z $\mathbb{C}$ a polynom stupně nula žádný kořen nemá.

(b) Geometricky kořen polynomu chápeme jako průsečík grafu zadaného polynomu se souřadnicovou osou x.

Z věty 1.2 bezprostředně plyne následující věta.

Věta 1.3 Bezoutova věta

Číslo c je kořenem polynomu $p(x)$ právě tehdy, když polynom $(x-c)$ dělí polynom $p(x)$, což je vyjádřeno vztahem $(x-c)|\ p(x)$.

Důkaz: Věta je tvaru ekvivalence, proto musíme důkaz provést oběma směry.

" $\Rightarrow$ "

Předpokládejme, že kořenem polynomu $p(x)$ je číslo c, tedy $p(c)=0$. Potom $z(x)=0$ nebo $st\ z(x) < st(x-c)=1$, tzn., že $z(x)$ je polynom konstantní. Dle předpokladu je $0=p(c)=(c-c)\cdot r(c)+z(c)$, kde $z(c)=0$ a musí tedy platit, že $z(x)=0$. Potom polynom $(x-c)$ dělí polynom $p(x)$.

" $\Leftarrow$ "

Předpokládejme, že $(x-c)$ dělí polynom $p(x)$. Potom $p(x)=(x-c)\cdot h$, kde $h\in R[x]$. Odtud plyne, že $p(c)=(c-c)\cdot h(c)=0$. Kořenem polynomu $p(x)$ je tedy číslo c.

Definice 1.10 Kořenový činitel polynomu

Je-li číslo c kořenem polynomu $p(x)$, potom lineární polynom $(x-c)$ nazýváme *kořenovým činitelem* polynomu $p(x)$ (příslušným kořenu c).

Poznámka

Je-li c kořenem polynomu $p(x)$, potom dle věty 1.3 platí $(x-c)|\ p(x)$. Může se ovšem stát, že polynom $p(x)$ je dělitelný některou vyšší mocninou polynomu $(x-c)$. Z toho důvodu zde musíme zmínit další definici.

Definice 1.11 K-násobný kořen polynomu $p(x)$

Číslo c polynomu $p(x)$ nazýváme *k-násobným kořenem polynomu*, jestliže $(x-c)^k$ dělí $p(x)$ a $(x-c)^{k+1}$ nedělí $p(x)$.

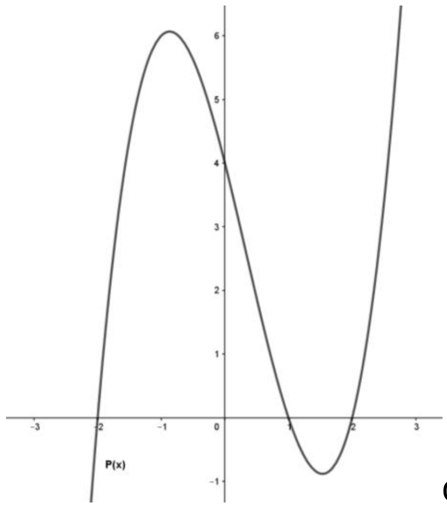
Poznámka

(a) Je-li $k = 1$, pak kořen c budeme místo jednonásobný kořen nazývat kořen jednoduchý.

(b) Má-li polynom násobné kořeny, pak má v daném bodě tečnu na ose x.

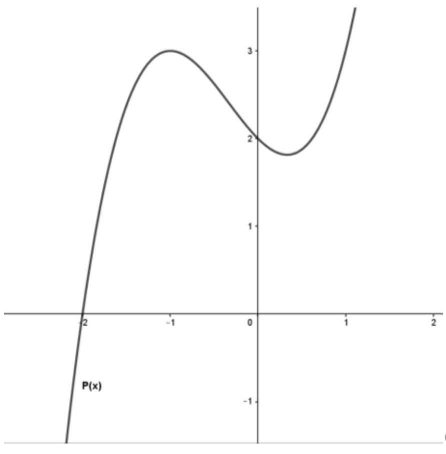
Příklad

- Graf polynomu $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, jenž má tři reálné kořeny $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$.



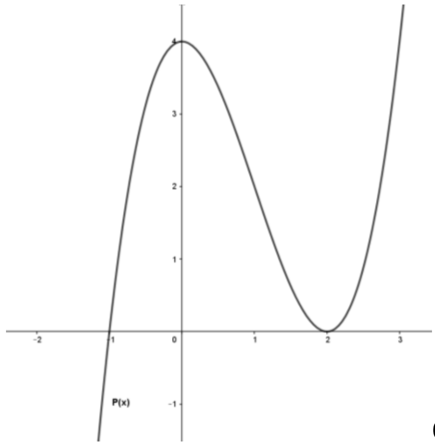
Obr. 6

- Graf polynomu $p(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ se dvěma komplexně sdruženými kořeny a jedním reálným kořenem $x_1 = -2$.



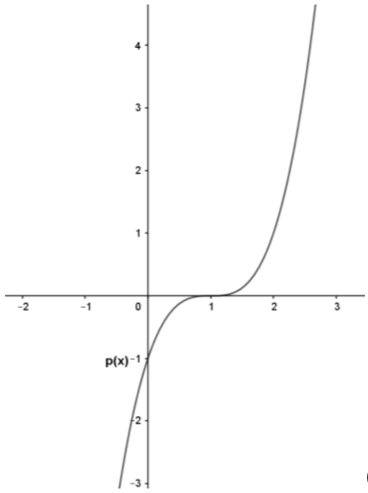
Obr. 7

- Graf polynomu $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ s jedním dvojnásobným $x_{1,2} = 2$ a jedním jednoduchým kořenem $x_3 = -1$.



Obr. 8

- Graf polynomu $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ s jedním trojnásobným kořenem $x_{1,2.3} = 1$.



Obr. 9

Závěr: Má-li polynom tři různé reálné kořeny, graf daného polynomu protíná osu x ve třech různých bodech, které jsou potom kořeny daného polynomu, popřípadě algebraické rovnice. Má-li polynom dvojnásobný kořen, potom osa x je tečnou ke grafu polynomu. Komplexně sdružené kořeny se neprojeví protnutím reálné osy na grafu polynomu pro $x \in \mathbb{R}$.

Úloha: Určete, jaké násobnosti kořene je číslo 1 pro polynom

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + + 8x - 4.$$

Úlohu budeme řešit postupným dělením polynomu jeho kořenovým činitelem. Po dosazení např. čísla 1 zjišťujeme, že je kořenem, a proto polynom vydělíme $(x - 1)$.

$$(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4) \div (x - 1) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

$$\underline{-(x^4 - x^3)}$$

$$-x^3 - 3x^2 + 8x - 4$$

$$\underline{-(-x^3 + x^2)}$$

$$-4x^2 + 8x - 4$$

$$\underline{-(-4x^2 + 4x)}$$

$$4x - 4$$

Budeme dále pokračovat v dělení kořenovým činitelem. Opět zjišťujeme, že číslo 1 je kořenem polynomu $x^3 - x^2 - 4x + 4$.

$$(x^3 - x^2 - 4x + 4) \div (x - 1) = x^2 - 4$$

$$\underline{-(x^3 - x^2)}$$

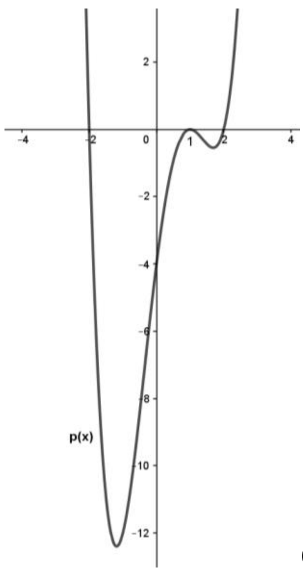
$$-4x + 4$$

$$\underline{-(-4x + 4)}$$

Částečný podíl $x^2 - 4$ již nemusíme nadále dělit, neboť se jedná o vzorec na součinový rozklad $(x - 2) \cdot (x + 2)$. Můžeme tedy napsat

$$(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4) = (x - 1)(x - 1)(x - 2)(x + 2).$$

Kořeny zadaného polynomu jsou $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 2, x_4 = -2$. Číslo 1 je tedy kořenem násobnosti 2 a graf zadaného polynomu vypadá následovně:



Obr. 10

1.4 Rozklad na kořenové činitele pomocí Hornerova schématu

V následující podkapitole budeme určovat kořeny pomocí Hornerova schématu.

Mějme polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{3}$$

stupně $n \geq 1$, kde $a_n \neq 0$ a libovolné číslo $c \in \mathbb{C}$.

Podle věty 1. 1 můžeme psát

$$p(x) = (x - c) \cdot r(x) + b, \tag{4}$$

kde $b \in \mathbb{R}$ a platí $b = p(c)$.

Dále $st\, r(x) = n - 1$, tzn. $r(x)$ je polynom tvaru $r(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.

Po dosazení za $r(x)$ do (4) a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x v (3) dostáváme

$$\left.\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - c \cdot b_{n-1} \\ &\vdots \\ a_1 &= b_0 - c \cdot b_1 \\ a_0 &= b - c \cdot b_0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= c \cdot b_{n-1} + a_{n-1} \\ &\vdots \\ b_0 &= c \cdot b_1 + a_1 \\ b &= c \cdot b_0 + a_0 \end{aligned}$$

Posloupnost jsme si následně přepsali, neboť nás zajímá číslo b_n neboli hodnota daného polynomu v bodě c.

Můžeme usoudit, že koeficienty podílu $r(x)$ i zbytek $b = p\ (c)$ lze jednoduše vypočítat. Danou situaci pří výpočtu budeme zapisovat do přehledného schématu, tzv. Hornerova schématu.

	a_n	a_{n-1}	…	a_2	a_1	a_0
c	$\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{c \cdot b_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}}$	…	$\underbrace{c \cdot b_2 + a_2}_{b_1}$	$\underbrace{c \cdot b_1 + a_1}_{b_0}$	$\underbrace{c \cdot b_0 + a_0}_{b = p(c)}$

Do horního řádku budeme zapisovat všechny koeficienty polynomu $p(x)$, tedy i případné koeficienty nulové, do spodního budeme postupně zapisovat vypočítané koeficienty podílu $r(x)$ a zbytek $b = p(c)$.

Poznámky

(a) Je-li $b = 0$, potom c je kořenem polynomu $p(x)$.

(b) Je-li $b \neq 0$, potom c není kořenem polynomu $p(x)$ a b je hodnota zbytku po dělení $(x - b)$.

(c) Je-li $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ kořenem polynomu $p(x)$, potom $p|a_0 \ \wedge q|a_n$.

Pro pochopení si Hornerovo schéma demonstrujeme na následujícím příkladu.

Úloha: Předchozí úlohu řešte pomocí Hornerova schématu

$p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4.$

Do horního řádku zapíšeme postupně všechny koeficienty a postupujeme dle uvedeného algoritmu.

Na základě výše uvedené poznámky (c) by potenciálním řešením mohla být čísla $\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{4}{1}$.

Pro větší pochopení napíšeme první řádek krok po kroku.

	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{2}$	$-\mathbf{3}$	$\mathbf{8}$	$-\mathbf{4}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$1 \cdot 1 - 2 = -1$	$\mathbf{1} \cdot (-1) - \mathbf{3} = -4$	$\mathbf{1} \cdot (-4) + 8 = 4$	$\mathbf{1} \cdot 4 - \mathbf{4} = 0$
1	1	0	-4	0	
2	1	2	0		
-2	1	0			

$(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4) = (x - 1)^2(x - 2)(x + 2)$

Kořeny zadaného polynomu jsou $x_{1,2} = 1, x_3 = 2,\ x_4 = -2.$

Závěr: Z výše uvedených výpočtů z předchozích dvou úloh můžeme usoudit, že při hledání kořenů polynomu je řešení pomocí Hornerova schématu nejen rychlejší, ale také přehlednější než řešení pomocí dělení lineárních činitelů.

2. Algebraické rovnice

Řešení rovnic je považováno za jeden z nejstarších a zároveň nejdůležitějších problémů v matematice. V této práci se budeme zabývat rovnicemi algebraickými, tedy rovnicemi, které se dají vyjádřit pomocí polynomu n-tého stupně.

Definice 2.1 Algebraická rovnice

Mějme polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ stupně $n \geq 1$, kde reálná čísla $a_n, \dots, a_1, a_0$, $a_n \neq 0$ nazýváme koeficienty. Potom zápis

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{5}$$

budeme nazývat *algebraickou rovnicí* stupně n.

Poznámka

(a) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že koeficient $a_n = 1$, neboť polynom

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

a polynom

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_0}{a_n}$$

mají stejné kořeny. Díky tomu se můžeme omezit na rovnici tvaru

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{6}$$

již využijeme ve formulacích a důkazech u vět 2.3, 2.4.

(b) Levá strana rovnice (5) vyjadřuje vztah mezi neznámou x a danými konstantami.

Poznámka

(a) Jestliže symbol $p(x)$značil polynom, pak řešit rovnici ve tvaru

$$p(x) = 0 \tag{7}$$

znamená nalézt takové hodnoty $x = x_0$ z definičního oboru, pro něž platí $p(x_0) = 0$. Vzhledem k definici 1.5 jsou ty hodnoty x_0, které jsou řešením rovnice (5), současně i kořeny polynomu $p(x)$.

(b) Rovnici (5) budeme někdy zapisovat ve výše uvedeném tvaru (7), a proto si musíme uvědomit, že ani jeden ze zápisů neznamená rovnost dvou polynomů, ale příkaz k vyhledání všech kořenů polynomu $p(x)$.

(c) Pojem rovnice můžeme chápat ve dvojím slova smyslu. Tím prvním jsou rovnice *identické,* kde rovnost levé a pravé strany platí pro každé číslo. Pro nás to jsou známé vzorce na rozklad mnohočlenu.

Příklad

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nebo

$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$ jsou platné pro každé z komplexních čísel a, b.

Naproti tomu rovnice *určovací,* např. $x^2 + 5x + 6 = 0$, jsou platné jen pro určité speciální hodnoty neznámé x. V našem případě je množina řešení dvouprvková neboli pro obor pravdivosti rovnice P na množině reálných čísel platí, že $P = \{3,2\}$.

V našich dosavadních úvahách a výpočtech jsme vždy předpokládali, že kořeny dané algebraické rovnice existují. To nás vede k otázce, zda má každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty v oboru komplexních čísel kořen? Odpověď nacházíme v jedné z nejznámějších algebraických vět, v tzv. *Základní (nebo též fundamentální) větě algebry*.

Věta 2.1 Základní věta algebry

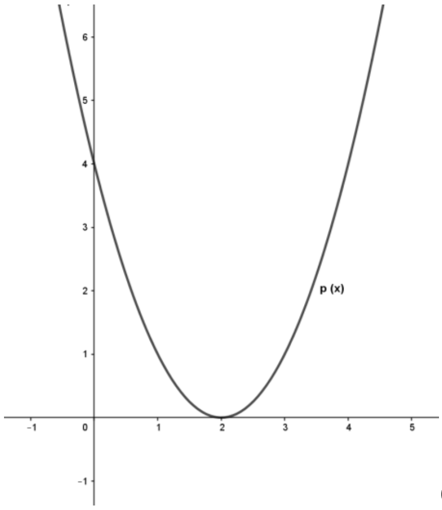
Každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ má v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen.

Poznámka

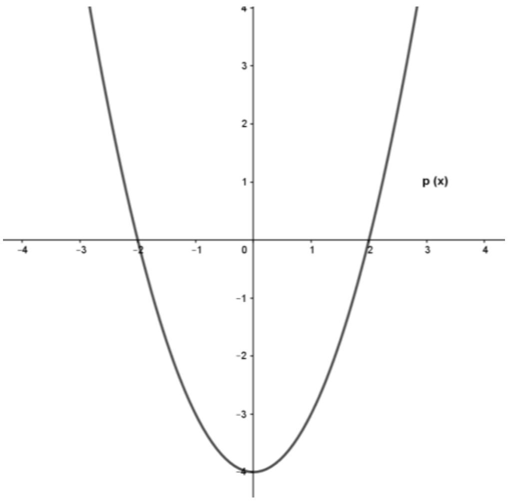
(a) Je-li nějaká rovnice s reálnými koeficienty, které nevyhovuje žádné reálné číslo, podle základní věty algebry musí mít alespoň jedno řešení v oboru komplexních čísel.

(b) Základní věta algebry nás ovšem seznamuje pouze s existencí jednoho kořene algebraické rovnice n-tého stupně, o počtu navzájem různých řešení nám již nic neříká.

Tak například kvadratické rovnici $x^2 - 4x + 4 = 0$ (Obr. 11) vyhovuje jediné číslo $x = 2$, kdežto kvadratická rovnice $x^2 - 4 = 0$ (Obr. 12) má rovnou dva různé kořeny, a to $x_1 = 2, x_2 = -2$.



Obr. 11



Obr. 12

Věta 2.2

Mějme čísla $a_n, \dots, a_1, a_0$, jež jsou koeficienty rovnice (5). Jestliže jsou všechny koeficienty v rovnici (5) nezáporné, potom rovnice (5) nemá žádný kořen kladný.

Důkaz: Jsou-li $a_n \geq 0, \dots, a_1 \geq 0, a_0 \geq 0$ a kořen $x > 0$, potom musí platit, že $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 > 0$. Tím pádem x nemůže být kořenem rovnice (5).

Věta 2.3

Nechť $n > 1$. Číslo α je kořenem rovnice (6) tehdy a jen tehdy, když rovnici (6) můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$(x-\alpha)(\, x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \cdots + c_{n-2}x + c_{n-1}) = 0.$$

Příklad

Mějme rovnici $x^5 - x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 5x + 10 = 0$, jejíž jeden kořen je $x_1 = 2$. Potom rovnici můžeme, dle věty 2.3, zapsat do tvaru

$$(x-2)(\, x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5) = 0.$$

Věta 2.4

Mějme navzájem různá čísla $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$. Má-li rovnice (6) za kořeny čísla x_1, $x_2, \cdots, x_n$, potom rovnici (6) můžeme psát ve tvaru

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = 0.$$

Příklad

Mějme rovnici $x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 4x + 20$, jejíž kořeny jsou čísla $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = -5$. Potom rovnici můžeme, dle věty 2.4, zapsat do tvaru

$$(x+1)(x-2)(x-2)(x+5) = 0.$$

Už ze základní školy víme, že lineární rovnice má vždy jen jeden kořen, kvadratická rovnice může mít dva různé kořeny. To nás vede k nutnosti formulovat základní větu algebry ve tvaru, který říká něco o počtu řešení dané algebraické rovnice.

Věta 2.3 (Základní věta algebry v jiném tvaru – O počtu řešení)

Každá algebraická rovnice stupně $n \geq 1$ má v oboru komplexních čísel právě n kořenů, počítáme-li je i s jejich násobnostmi

To, jestli má naše algebraická rovnice nějaké kořeny, eventuálně kolik jich existuje, záleží též na oboru, ve kterém danou rovnici řešíme. Například rovnice $2x - 1 = 0$ má kořen teprve až po zavedení zlomků, rovnice $x + 2 = 0$ po zavedení záporných čísel a rovnice $x^2 - 2 = 0$ po rozšíření o iracionální čísla.

3. Lineární rovnice

3.1 Základní pojednání

Motivační úloha

Michal si myslí přirozené číslo. Když ho vynásobí třemi, přičte k němu číslo jedna, následně vydělí osmi a mezivýsledek vynásobí čtyřmi, dostane číslo o 11 větší než původní myšlené číslo. Jaké číslo si Michal myslí?

Úlohu můžeme řešit buď jednoduchou úvahou, jež spočívá v postupném návratu od konce zadání, anebo způsobem, jejž volíme my, a to za pomoci rovnic.

Označme si myšlené číslo x. Postupnými změnami získáváme $3x, 3x+1, \frac{3x+1}{8}, \frac{4\cdot(3x+1)}{8}$. Výsledné číslo si zapíšeme $x+11$.

Řešení můžeme pomocí rovnice zapsat do tvaru $\frac{4\cdot(3x+1)}{8} = x + 11$, kdy za využití ekvivalentních úprav dostaneme $x = 21$, tedy myšlené číslo.

Nyní můžeme postoupit obecně k lineárním rovnicím.

Definice 3.1 Lineární rovnice

Rovnici tvaru

$$ax + b = 0, \tag{8}$$

kde a, b jsou reálná čísla a $a \neq 0$, nazýváme lineární rovnicí s neznámou x. Člen ax nazýváme lineární, člen b absolutní.

Poznámka

Při řešení lineárních rovnic využíváme ekvivalentní úpravy.

Ekvivalentní úpravy jedné algebraické rovnice

Ekvivalentní úpravy jsou takové úpravy, které převedou původní rovnici na rovnici novou, avšak se stejnou množinou řešení, jako měla rovnice původní.

Za nejdůležitější ekvivalentní úpravy považujeme (vždy předpokládáme, že úpravy se provádí v celém oboru řešení):

- přičtení, popř. odečtení stejného čísla nebo mnohočlenu,

- vynásobení, popř. vydělení stejným číslem nebo mnohočlenem různým od nuly obou stran rovnic,
- nahrazení libovolné strany rovnice výrazem, který se jí rovná,
- vzájemnou záměnu stran rovnice,

  atd.

Řešení lineárních rovnic

Lineární rovnice se řeší pouhým osamostatněním neznámé x. Prozkoumejme tři možnosti řešení výsledků.

1) Mějme $a \neq 0$, potom lineární rovnici (8) lze upravit na tvar $x = -\frac{b}{a}$, odkud je patrné, že rovnice má jediné řešení.

Úloha: Řešte rovnici $3x + 6 = 0$.

$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6$$

$$x = -\frac{6}{3} = -2$$

Závěr: Je-li $a \neq 0$, pak lineární rovnice (8) má právě jedno řešení a tím je kořen $x = -\frac{b}{a}$.

2) Mějme $a = b = 0$, potom lineární rovnici (8) můžeme upravit do tvaru $0 = 0$, odkud je patrné, že rovnice má nekonečně mnoho řešení v oboru reálných čísel.

Úloha: Řešte rovnici $5x - 2x + 3 = 3x + 3$.

$$5x - 2x + 3 = 3x + 3$$

$$3x + 3 = 3x + 3$$

$$0 = 0$$

Závěr: Je-li $a = b = 0$, potom lineární rovnice (8) má nekonečně mnoho řešení.

3) Mějme $a = 0, b \neq 0$, potom lineární rovnici (8) upravíme do tvaru triviální rovnice $b = c,$ kde c je konstanta, odkud je patrné, že rovnice nemá v oboru reálných čísel žádné řešení.

Úloha: Řešte rovnici $0x + 3 = 7$.

$$0x + 3 = 7$$

$$3 = 7, \text{ což neplatí.}$$

Závěr: Je-li $a = 0, b \neq 0$, potom lineární rovnice (8) nemá řešení.

Můžeme tedy vcelku o řešení lineární rovnice říci:

> Lineární rovnice $ax + b = 0$, kde a, b jsou daná reálná čísla a x je neznámá, má v oboru reálných čísel
>
> - pro $a \neq 0$ jediné řešení a tím je $x = -\frac{b}{a}$,
> - pro $a = 0,\ b = 0$ nekonečně mnoho řešení,
> - pro $a = 0,\ b \neq 0$ žádné řešení.

3.2 Grafické řešení lineárních rovnic

Bez újmy na obecnosti můžeme rovnici (8) psát v následujícím tvaru

$$\underbrace{ax + b}_{f(x)} = \underbrace{cx + d}_{q(x)}, \tag{9}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq c$ a x je neznámá.

Nakreslíme-li grafy funkcí $f(x), q(x)$, kterými jsou přímky, do jedné soustavy souřadnic, řešením rovnice (9) bude x-ová souřadnice jejich průsečíků.

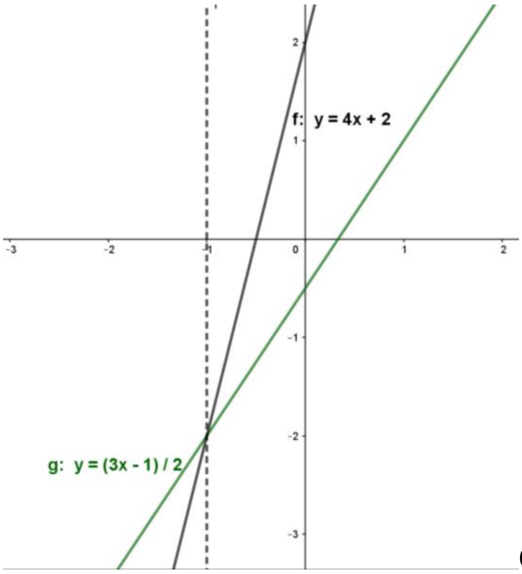
Nyní si ukážeme souvislost mezi počtem řešení rovnice a počtem průsečíků funkce s osou x.

Přímka v rovině může mít vůči ose x obecně tři různé polohy.

1) Má-li lineární rovnice (8), kde $a \neq 0$, jedno řešení, potom přímka y je s osou x různoběžná. Rovnice přímky je $y = ax + b$. Speciálním případem je přímka kolmá na osu x a její rovnice je ve tvaru $x = k$, kde k je reálné číslo. Tato přímka má s osou x jeden průsečík, a má tedy pouze jedno řešení. Rovnice tvaru (9) má jediné řešení, pokud přímky na obou stranách rovnice jsou různoběžné.

Úloha: Řešte graficky rovnici tvaru (9) $4x + 2 = \frac{3x-1}{2}$.

Řešení: Grafem funkce $f\colon y = 4x + 2$ je přímka, která prochází body $[0, 2]$, $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, grafem funkce $q\colon y = \frac{3x-1}{2}$ je opět přímka procházející body $\left[0, -\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, 0\right]$.



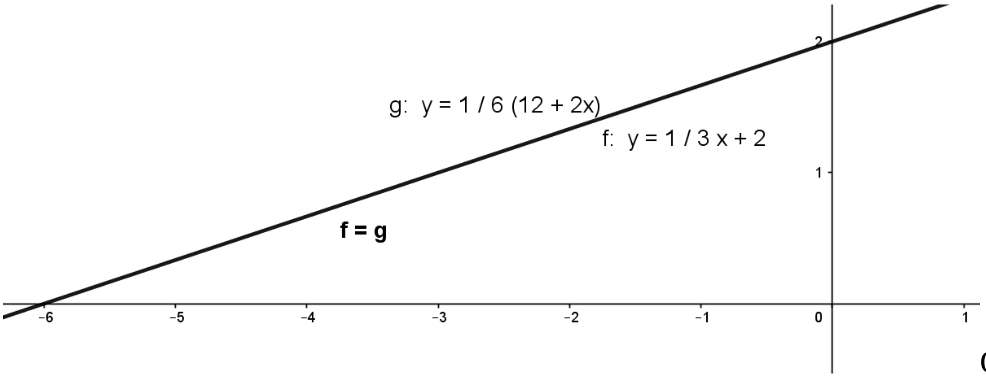
Obr. 13

Průsečíkem obou přímek je bod $P = [-1, -2]$. Řešením dané rovnice je tedy x-ová souřadnice bodu P, potom $x = -1$.

2) Má-li lineární rovnice (8), kde $a = b = 0$, nekonečně mnoho řešení, potom přímka y je s osou x totožná. Rovnice přímky tedy bude mít tvar $y = 0$. Rovnice tvaru (9) má nekonečně mnoho řešení, pokud přímka na levé straně je shodná s přímkou na pravé straně rovnice.

Úloha: Řešte graficky rovnici $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{6}(2x + 6)$.

Řešení: Grafy funkcí $\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$, $\frac{1}{6}(2x + 6)$ jsou dvě totožné přímky. To znamená, že existuje nekonečně mnoho společných bodů grafů obou funkcí. Jejich x-ové souřadnice vyplní celou množinu reálných čísel. Naše rovnice má tedy nekonečně mnoho řešení.

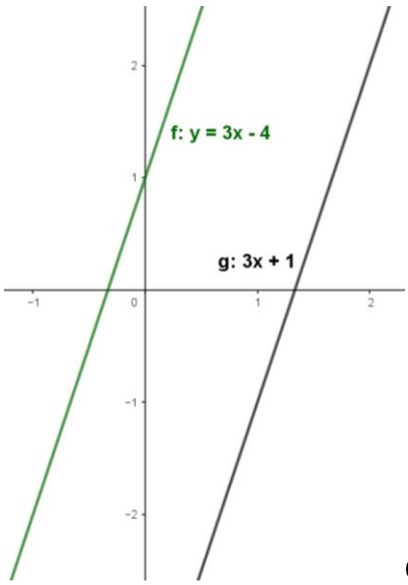


Obr. 14

3) Nemá-li lineární rovnice (8), kde $a = 0, b = k \neq 0,$ žádné řešení, potom přímka y je s osou x rovnoběžná různá. Rovnice přímky pak bude $y = k$. Rovnice tvaru (9) nemá řešení, pokud přímky příslušné funkcím na obou stranách rovnice jsou rovnoběžné různé.

Úloha: Řešte graficky rovnici $3x + 1 = 3x - 4$.

Řešení: Grafy funkcí $f\colon y = 3x + 1,\ g\colon y = 3x - 4$ jsou dvě rovnoběžné přímky, neboť nemají žádný společný bod, a tedy se neprotínají. Proto naše zadaná rovnice nemá žádné řešení.



Obr. 15

4. Kvadratické rovnice

Definice 4.1 Kvadratická rovnice

Rovnice tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{10}$$

kde $a \neq 0$, se nazývá *kvadratická rovnice*, přitom x je neznámá a a, b, c jsou daná reálná čísla, která nazýváme koeficienty kvadratické rovnice. Člen ax^2 se nazývá *kvadratický*, člen bx *lineární* a člen c *absolutní*.

Příklad

$$5x^2 + 4x - 13 = 0$$

Poznámka

(a) Řešit kvadratickou rovnici (10) znamená určit všechna komplexní čísla x, pro něž je splněna rovnost $ax^2 + bx + c = 0$.

(b) Jestliže má kvadratická rovnice (10) komplexní kořen x_0, znamená to, že platí vztah $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

4.1 Neúplná kvadratická rovnice

Pro kvadratickou rovnici (10) vždy platí, že $a \neq 0$. V následující podkapitole se budeme věnovat dvěma typům kvadratických rovnic, které mají některý z koeficientů b, c roven nule.

4.1.1 Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Motivační úloha

Přesvědčte se, že rovnice $x^2 - 2x = 0$ má jeden kořen rovný nule.

Jednoduchou úpravou dostáváme $x(x - 2) = 0$, odkud vidíme, že rovnice má typickou vlastnost kvadratických rovnic bez absolutního členu, tj. jeden kořen rovný nule.

Definice 4.2 Kvadratická rovnice s absolutním členem rovným nule

Je-li v kvadratické rovnici (10) absolutní člen roven nule, $c = 0$, tj. rovnice tvaru

$$ax^2 + bx = 0, \tag{11}$$

kde $a \neq 0$, pak říkáme, že kvadratická rovnice je *bez absolutního členu*.

Příklad

$$6x^2 - 19x = 0$$

Řešení kvadratické rovnice bez absolutního členu

Kvadratická rovnice bez absolutního členu má tedy tvar (11). Rovnici řešíme tak, že levou stranu rovnice upravíme pomocí vytýkání x na součinový tvar.

$$x(ax + b) = 0 \tag{12}$$

Aby byl výraz na levé straně roven nule, tak je buď $x = 0$, anebo $ax + b = 0$. Naše rovnice (8) má pak reálné kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Obor pravdivosti pak bude $P = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Úloha: Řešte rovnici $5x^2 - 13x = 0$.

Rovnici pomocí vytýkání upravíme na součinový tvar

$$x(5x - 13) = 0,$$

odkud získáme dva kořeny $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{13}{5}$, potom

$P = \left\{0, \frac{13}{5}\right\}$.

4.1.2 Kvadratická rovnice bez lineárního členu

Motivační úloha

Upravte rovnici $(x + 2)(2x - 3) = x + 2$. Po úpravě dostaneme $x^2 = 4$. Která dvě čísla mají tu vlastnost, že jejich čtverec je roven čtyřem? Jaké jsou tedy kořeny rovnice?

Stručně můžeme napsat $x_{1,2} = \pm 2$ (neboť 2^2 a stejně tak i $(-2)^2$ je rovno čtyřem).

Rovnici $x^2 = 4$ můžeme řešit i způsobem $x^2 - 4 = 0$, tedy rozkladem $(x-2)(x+2) = 0$. Tímto způsobem řešíme *ryze kvadratické rovnice*.

Definice 4.3 Kvadratická rovnice s lineárním členem rovným nule

Je-li v kvadratické rovnici (6) koeficient u lineárního členu roven nule, $b = 0$, tj. rovnice tvaru

$$ax^2 + c = 0, \tag{13}$$

pak říkáme, že kvadratická rovnice je bez lineárního členu a nazýváme ji *rovnicí ryze kvadratickou.*

Příklad

$$4x^2 + 2 = 0$$

Řešení kvadratické rovnice bez lineárního členu

Rovnice ryze kvadratická má tedy tvar (13). Rovnici upravíme na tvar $x^2 = -\frac{c}{a}$ a pro lepší přehlednost výraz $-\frac{c}{a}$ položíme r, tedy $-\frac{c}{a} = r$, čili $x^2 = r$.

Nyní musíme rozlišit následující dva, eventuálně tři případy možností v závislosti na hodnotě r.

1) $\boldsymbol{r} > 0$

Je-li $r > 0$, pak můžeme psát $x = \sqrt{r}$. Po dosazení dostáváme $x^2 = \left(\sqrt{r}\right)^2$.

$$x^2 - \left(\sqrt{r}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \sqrt{r}\right)\left(x + \sqrt{r}\right) = 0$$

Pak $\left(x - \sqrt{r}\right) = 0$ nebo $\left(x + \sqrt{r}\right) = 0$

$$x_1 = \sqrt{r} \qquad x_2 = -\sqrt{r}$$

Po dosazení $r = -\frac{c}{a} > 0$, dostáváme

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad\qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$P = \left\{\sqrt{-\frac{c}{a}}, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$.

Úloha: Řešte rovnici $9x^2 - 16 = 0$.

Postup: Absolutní člen převedeme na druhou stranu a celý výraz podělíme $a = 9$. Dostáváme

$$x^2 = \frac{16}{9} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \left(\sqrt{\frac{16}{9}}\right)^2$$

$$x^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 0.$$

Dále můžeme výraz rozložit na součin $\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = 0$. To jest splněno, je-li

$$x - \frac{4}{3} = 0 \qquad \text{nebo} \qquad x + \frac{4}{3} = 0.$$

Odtud dostáváme dva kořeny, a to $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}$.

Výsledek: $P = \left\{\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$

2) $\boldsymbol{r} < 0$

Je-li $r < 0$, pak rovnice $x^2 = r$ nemá v oboru reálných čísel řešení. Má však řešení v oboru čísel komplexních.

Je-li $r < 0$, pak $r = -|r| = \left(i\sqrt{|r|}\right)^2$

$$r = \left(i\sqrt{|r|}\right)^2 \text{ [3]}$$

Čili $x^2 - \left(i\sqrt{|r|}\right)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(x - i\sqrt{|r|}\right)\left(x + i\sqrt{|r|}\right) = 0.$

[3] $i = 1$ (i je označení imaginární jednotky a platí, že $(-i)^2 = -1$).

To platí, je-li $\left(x - i\sqrt{|r|}\right) = 0$ nebo $\left(x + i\sqrt{|r|}\right) = 0$

$$x_1 = i\sqrt{|r|} \quad \text{a} \quad x_2 = -i\sqrt{|r|}. \tag{14}$$

Po dosazení $r = -\frac{c}{a} < 0$, dostáváme

$$x_1 = i\sqrt{\left|-\frac{c}{a}\right|} \quad \text{a} \quad x_2 = -i\sqrt{\left|-\frac{c}{a}\right|},$$

což jsou čísla komplexně sdružená.

Úloha: Řešte rovnici $9x^2 + 16 = 0$.

Postup: Absolutní člen převedeme na druhou stranu a celý výraz podělíme $a = 9$. Dostáváme

$$x^2 = -\frac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad -\frac{16}{9} = -\left|-\frac{16}{9}\right| = \left(i\sqrt{\left|-\frac{16}{9}\right|}\right)^2 = \left(i\sqrt{\frac{16}{9}}\right)^2$$

$$x^2 = \left(i\frac{4}{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \left(i\frac{4}{3}\right)^2 = 0.$$

Dále můžeme výraz rozložit na součin $\left(x - i\frac{4}{3}\right)\left(x + i\frac{4}{3}\right) = 0$. To je splněno, je-li

$$x - i\frac{4}{3} = 0 \quad \text{nebo} \quad x + i\frac{4}{3} = 0.$$

Odtud dostáváme dva kořeny, a to $x_1 = \frac{4}{3}i, x_2 = -\frac{4}{3}i$.

Výsledek: $P = \left\{\frac{4}{3}i, -\frac{4}{3}i\right\}$

Příklad můžeme dosadit i do obecného řešení (14).

$$x_1 = i\sqrt{\left|-\frac{c}{a}\right|} \quad \text{a} \quad x_2 = -i\sqrt{\left|-\frac{c}{a}\right|},$$

$$x_1 = i\sqrt{\left|-\frac{16}{9}\right|} \quad \text{a} \quad x_2 = -i\sqrt{\left|-\frac{16}{9}\right|},$$

$$x_1 = i\frac{4}{3} \quad \text{a} \quad x_2 = -i\frac{4}{3}.$$

Výsledek: $P = \left\{\frac{4}{3}i, -\frac{4}{3}i\right\}$

3) $r = 0$

Je-li na pravé straně nula, tj. v případě, je-li $c = 0$, pak $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Můžeme pak říci, že rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 0$.

Závěrem o kořenech neúplné kvadratické rovnice můžeme říci:

(a) Rovnice (11) má vždy jeden kořen roven nule. Druhý kořen je roven $-\frac{b}{a}$.

(b) Rovnice (13) má kořeny x_1, x_2, které se od sebe liší pouze znaménkem:

- Pro $r > 0$ je zlomek $-\frac{c}{a}$ kladný (tj. a, c mají opačná znaménka) a kořeny x_1, x_2 jsou reálné.
- Pro $r < 0$ je zlomek $-\frac{c}{a}$ záporný (tj. a, c mají stejná znaménka) a kořeny x_1, x_2 jsou imaginární.
- Je-li navíc $b = 0$, pak dostáváme $x_1 = x_2 = 0$, kde číslo 0 nazýváme dvojnásobným kořenem rovnice (13).

4.2 Obecná kvadratická rovnice

Obecná kvadratická rovnice je tvaru (10).

Postup řešení: Obě strany kvadratické rovnice (10) vynásobíme výrazem $4a$, postupně dostáváme

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

K oběma stranám přičteme b^2

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2.$$

Následně upravíme na tvar

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \tag{15}$$

Definice 4.2 Diskriminant kvadratické rovnice

Mějme výraz $b^2 - 4ac$. Položíme-li tento výraz roven D, tj. $b^2 - 4ac = D$, pak tento výraz budeme nazývat *diskriminant kvadratické rovnice* (10) a značit D.

Obecná kvadratická rovnice má pak tvar $(2ax + b)^2 = D$. Zde musíme rozlišovat opět tři případy pro hodnoty diskriminantu.

1) $\boldsymbol{D} > 0$

$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac; \qquad b^2 - 4ac > 0$, proto můžeme psát

$$b^2 - 4ac = D = \left(\sqrt{D}\right)^2 = \sqrt{D^2}$$

$$(2ax+b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2 \Rightarrow (2ax+b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2 = 0.$$

Provedeme rozklad dvojčlenu

$$\left(2ax + b - \sqrt{D}\right)\left(2ax + b + \sqrt{D}\right) = 0.$$

Rovnost je splněna, je-li

$2ax + b - \sqrt{D} = 0$ nebo $2ax + b + \sqrt{D} = 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

Závěr: Je-li $D > 0$, pak má obecná kvadratická rovnice (10) dva reálné kořeny tvaru

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ pro nás ve známém vzorci $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2) $\boldsymbol{D} < 0$

V tomto případě je na levé straně číslo záporné

$$D < 0 \Rightarrow D = -|D| = \left(i\sqrt{|D|}\right)^2.$$

Potom můžeme psát

$$(2ax+b)^2 = \left(i\sqrt{|D|}\right)^2.$$

A dále

$$(2ax+b)^2 - \left(i\sqrt{|D|}\right)^2 = 0$$

$$\left(2ax + b - i\sqrt{|D|}\right)\left(2ax + b + i\sqrt{|D|}\right) = 0.$$

Rovnost je splněna, je-li

$2ax + b - i\sqrt{|D|} = 0$ nebo $2ax + b + i\sqrt{|D|} = 0$

$2ax + b = i\sqrt{|D|}$ $\qquad$ $2ax + b = -i\sqrt{|D|}$

$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{D}}{2a}$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \frac{-b-i\sqrt{D}}{2a}$

Závěr: Je-li $D < 0$, pak má obecná kvadratická rovnice (10) dva komplexně sdružené kořeny

$$x_{1,2} \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Úloha: Řešte rovnici $5x^2 + 4x + 8 = 0$.

$$D = 16 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 16 - 160 = -144$$

Protože diskriminant $D < 0$, jsou kořeny komplexně sdružené a píšeme

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{|-144|}}{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{144}}{10} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm i \cdot 12}{10}$$

$$x_{1,2} = -\frac{4}{10} \pm \frac{12}{10}\, i;\; x_{1,2} = -\frac{2}{5} \pm \frac{6}{5}\, i.$$

$P = \left\{-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}\, i, -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}\, i\right\}$

Zkouška: například pro

$x_{1,} = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5}\, i$

$$L = 5 \cdot \left(-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}\, i\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}\, i\right) + 8 = 5 \cdot \left(\frac{4}{25} - \frac{24}{25} i + \frac{36}{25} i^2\right) - \frac{8}{5} + \frac{24}{5} i + 8$$

$$L = 5 \cdot \left(\frac{4}{25} - \frac{24}{25} i - \frac{36}{25}\right) - \frac{8}{5} + \frac{24}{5} i + 8$$

$$L = \frac{4}{5} - \frac{24}{5} i - \frac{36}{5} - \frac{8}{5} + \frac{24}{5} i + \frac{40}{5} = 0$$

$L = 0;\quad P = 0 \;\Rightarrow x_{1,} = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5}\, i$ je řešením rovnice $5x^2 + 4x + 8 = 0$.

3) $\boldsymbol{D = 0}$

Dosazením $D = 0$ do vztahů pro výpočet reálných a imaginárních kořenů

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ a $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$

dostáváme v obou případech dvojnásobný kořen $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$, neboť pro $D = 0$ je rovnice (15) ekvivalentní s rovnicí $2ax + b = 0$, a tím pádem i s rovnicí $x = -\frac{b}{2a}$.

Můžeme tedy vcelku o kořenech obecné kvadratické rovnice říci:

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$ a a, b, c jsou daná reálná čísla, jejíž diskriminant je $D = b^2 - 4ac$, má v oboru komplexních čísel

- pro $D > 0$ dva reálné různé kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

- pro $D < 0$ dva imaginární komplexně sdružené kořeny

$$x_{1,2} \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a},$$

- pro $D = 0$ dvojnásobný reálný kořen

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$

4.3 Vztahy kořenů a koeficientů kvadratické rovnice

Věta 4.2 (Vietovy vzorce pro $\boldsymbol{n} = 2$)

Jsou-li čísla x_1, x_2 kořeny kvadratické obecné rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, pak platí následující vztahy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Důkaz:

a) Pro $\boldsymbol{D} \geq \mathbf{0}$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Pak platí

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

b) Pro $\boldsymbol{D} < 0$

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Pak platí

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a} + \frac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a} \cdot \frac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{b^2-i^2|D|}{4a^2} = \frac{b^2+4ac-b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$ [4].

Věta 4.3

Je-li obecná kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ převedena, nebo je ve tvaru normovaném, tedy ve tvaru

$$x^2 + px + q = 0, \tag{16}$$

pak pro koeficienty p, q

$$p = \frac{b}{a}, \qquad q = \frac{c}{a}$$

platí stejné vztahy jako v případě obecné rovnice, tedy

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Důkaz plyne z věty 4.2 pro $p = b, q = c, a = 1$.

Platí také věta obrácená.

[4] $|b^2 - 4ac| = 4ac - b^2$

Věta 4.4

Jsou-li a, b, c reálná čísla, $a \neq 0$ a platí-li pro čísla r, s, že $r + s = -\frac{b}{a}$, $r \cdot s = \frac{c}{a}$, pak

a) r, s jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$,

b) kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má jen kořeny r, s.

Důkaz věty 4.4:

a) Protože $a \neq 0$, můžeme rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ upravit na tvar

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0.$$

Podle vztahů $-(r + s) = \frac{b}{a}$ a $r \cdot s = \frac{c}{a}$ dostáváme

$$a[x^2 - (r + s)x + r \cdot s] = 0,$$

úpravou

$$a(x^2 - rx - sx + r \cdot s) = 0$$

dostáváme

$$a(x - r)(x - s) = 0.$$

Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má tedy kořeny r, s, neboť platí $a(r - r)(r - s) = 0$ a také $a(s - r)(s - s) = 0$.

Je zřejmé, že rovnice $a(x - r)(x - s) = 0$, jež je ekvivalentní rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, má tytéž kořeny jako rovnice $(x - r)(x - s) = 0$, jejíž úpravou dostáváme normovanou kvadratickou rovnici $x^2 + px + q = 0$.

Při řešení některých úloh proto využíváme tuto rovnici nebo rovnici $(x - r)(x - s) = 0$.

b) Předpokládáme, že kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, a tedy upravená s ní ekvivalentní rovnice $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, má ještě další kořen $t \neq r, t \neq s$.

Pak platí

$$a(t - r)(t - s) = 0.$$

To však znamená, že buď $t = r$ nebo $t = s$, což odporuje našemu předpokladu.

4.4 Některé důsledky vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Z poznatků o rozkladech kvadratické rovnice v součin kořenových činitelů vyplývají některé snadno odvoditelné důsledky.

Věta 4.5

Platí-li o kořenech kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, že $r = s$, má rovnice diskriminant roven nule.

Důkaz: Platí-li o kořenech kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, že $r = s$, pak rozklad na kořenové činitele má tvar

$$a(x - r)(x - r) = 0 \Rightarrow a(x^2 - 2rx + r^2) = 0 \Rightarrow ax^2 - 2arx + ar^2 = 0$$

a diskriminant rovnice $D = 4a^2r^2 - 4a \cdot ar^2 = 0$.

Je-li kvadratická rovnice normovaná, pak $a = 1$ a $D = 4r^2 - 4r^2 = 0$.

Platí také věta obrácená.

Věta 4.6

Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminant roven nule, pak pro kořeny r, s platí $r = s$.

Důkaz: Je-li $D = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$ a $c = \frac{b^2}{4a}$.

Dále po vynásobení $4a$ rovnice $ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0$ dostáváme

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 0 \Rightarrow (2ax + b)^2 - b^2 + b^2 = 0 \Rightarrow (2ax + b)^2 = 0$$

$$(2ax + b)(2ax + b) = 0 \Rightarrow r = s = -\frac{b}{2a}.$$

V případě normované kvadratické rovnice dostáváme po dosazení $r = s = -\frac{p}{2}$.

Účelná je následující úmluva: Má-li kvadratická rovnice $D = 0$, říkáme, že $x = -\frac{b}{2a}$ nebo $x = -\frac{p}{2}$ je její dvojnásobný kořen.

Věta 4.7

Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s reálnými koeficienty imaginární kořen $a_1 + a_2 i$, $a_2 \neq 0$, má též s ním kořen komplexně sdružený $a_1 - a_2 i$.

Důkaz: Označme $a_1 + a_2 i = r$. Druhý kořen nechť je $s = u + vi$. Pak platí

$$r + s = (a_1 + a_2 i) + (u + vi) = -\frac{b}{a} \Rightarrow i(a_2 + v) = 0 \Rightarrow a_2 + v = 0 \Rightarrow v = -a_2$$

$$r \cdot s = (a_1 + a_2 i) \cdot (u + vi) = c \Rightarrow i(a_2 u + a_1 v) = 0 \ \wedge v = -a_2 \Rightarrow a_2 u - a_1 a_2 = 0$$
$$\Rightarrow a_2(u - a_1) = 0 \wedge a_2 \neq 0 \Rightarrow u - a_1 = 0 \Rightarrow u = a_1$$

Celkem tedy $s = u + vi = a_1 - a_2 i$.

Poznámka

Věta 4.7 platí pro každý polynomy s reálnými koeficienty.

Důkaz plyne ze základní věty algebry. Daný polynom lze rozložit na součin lineárních polynomů s reálným kořenem a kvadratických polynomů s komplexními kořeny, na které použijeme větu 4.7.

Zajímavé jsou kvadratické rovnice tvaru:

a) $ax^2 + bx + a = 0$ rovnice typu (17)
b) $ax^2 + bx - a = 0$ rovnice typu (18)

Příklad rovnice typu (18): $x^2 - 1 = 0$.

Rovnice typu (17) nebo (18) nazýváme kvadratickými rovnicemi reciprokými.

Věta 4.8 O kořenech reciproké rovnice

a) Má-li rovnice typu (17) kořen x_1, má také kořen $\frac{1}{x_1}$.
b) Má-li rovnice typu (18) kořen x_1, má také kořen $\frac{-1}{x_1}$.

Důkaz:

a) Podle věty 4.2 platí $x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{a} = 1.$

Pak tedy musí $x_2 = \frac{1}{x_1}.$

Kořeny jsou vzájemně převrácené. Rovnice má tedy dva kořeny x_1 a $\frac{1}{x_1}$.

b) Podle věty 4.2 platí $x_1 \cdot x_2 = -\frac{a}{a} = -1,$

a tedy $x_2 = \frac{-1}{x_1}.$

Více se reciprokými rovnicemi budeme zabývat v kapitole 6.

4.5 Grafické řešení kvadratických rovnic

Mějme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$. Upravíme-li tuto rovnici na tvar

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}, \tag{19}$$

na levé straně se objeví funkce $f: y = x^2$, na straně pravé funkce $q: y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$. Oborem obou funkcí je množina všech reálných čísel.

Číslo $x = r$, pro které nabudou obě funkce stejné hodnoty, je řešením kvadratické rovnice (19), a tedy i kvadratické rovnice (10). Naopak pro každé r, které je kořenem rovnice (10), platí $r^2 = -\frac{b}{a}r - \frac{c}{a}$, tj. pro $x = r$ mají funkce p a q stejnou hodnotu.

V grafickém znázornění se výše uvedená skutečnost projeví společným bodem grafů obou funkcí, jehož x-ová souřadnice je rovna kořenu r kvadratické rovnice.

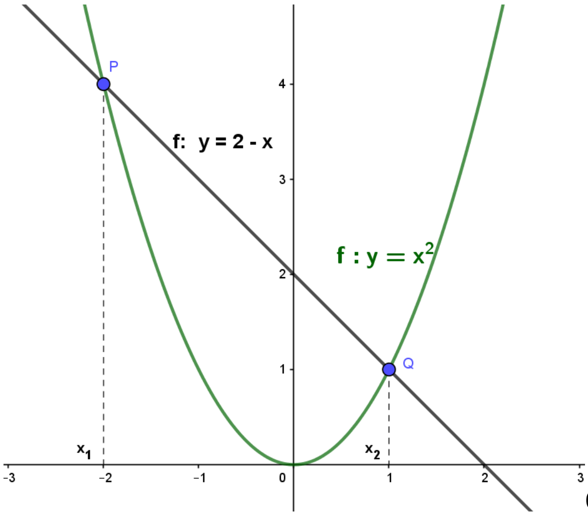
Grafem funkce $f: y = x^2$ je parabola s osou shodnou se souřadnicovou osou y a vrcholem v počátku soustavy souřadnic. Grafem druhé funkce $f: y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ je přímka, kterou snadno zobrazíme pomocí dvou bodů tak, jak jsme ji zobrazovali v kapitole 3. Lineární rovnice.

Přímka může mít v rovině vzhledem k parabole tři různé obecné polohy.

1) Přímka a parabola se protínají, mají dva různé společné body, a rovnice (19) má tedy dva různé kořeny.

Úloha: Řešte kvadratickou rovnici $x^2 + x - 2 = 0$.

Rovnici přepíšeme do ekvivalentního tvaru $x^2 = 2 - x$ a sestrojíme grafy funkcí $f: y = x^2$, $f: y = 2 - x$. Grafem druhé funkce je přímka procházející body $[0,2], [2,0]$. Z následujícího obrázku lze vyčíst, že grafy mají dva společné body $P = [-2,4], Q = [1,1]$.



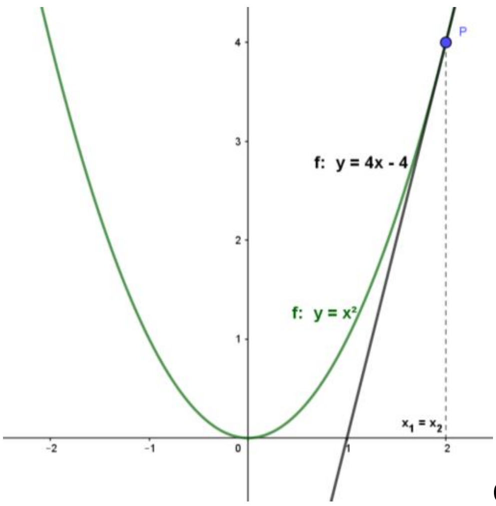
Obr. 16

Jejich x-ové souřadnice jsou kořeny naší zadané rovnice, tedy $x_1 = -2, x_2 = 1$.

2) Přímka a parabola se dotýkají, rovnice (19) má tedy jeden dvojnásobný kořen.

Úloha: Řešte kvadratickou rovnici $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Sestrojíme graf funkce $f: y = x^2$ a $f: y = 4x - 4$, který prochází body $[1,0], [2,4]$. Tyto grafy mají jeden společný průsečík $[2,4]$. Rovnice má tedy jeden dvojnásobný kořen $x_1 = x_2 = 2$.

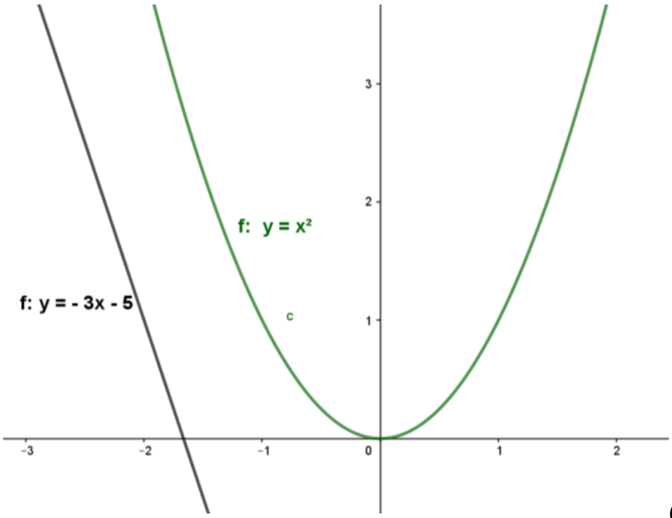


Obr. 17

3) Přímka s parabolou nemají společný bod, rovnice (19) nemá řešení.

Úloha: Řešte kvadratickou rovnici $x^2 + 3x + 5 = 0$.

Funkce $f: y = x^2$, $f: y = -3x - 5$ nemají žádný společný bod. Zadaná rovnice tedy nemá v oboru reálných čísel řešení.



Obr. 18

5. Binomické rovnice

Definice 5.1 Binomická rovnice

Rovnice tvaru

$$x^n - c = 0, \tag{20}$$

kde c je dané komplexní číslo, x je neznámá a $n > 1$ je přirozené číslo, se nazývá *binomická rovnice.*

Poznámka

Rovnice (20) vznikla převedením rovnice $ax^n + b = 0$ na normovaný tvar, tj. vydělením nenulovým číslem a

$$x^n = -\frac{b}{a}.$$

Následným položením výrazu $-\frac{b}{a} = c$ jsme dostali rovnici tvaru

$$x^n = c. \tag{21}$$

5.1 Řešení binomické rovnice

Naším úkolem bude najít množinu všech řešení, v tomto případě množinu všech komplexních čísel, které vyhovují binomické rovnice (20). Nalezení kořenů můžeme řešit buď algebraicky, nebo goniometricky.

Algebraické řešení binomické rovnice

Algebraické řešení spočívá v tom, že levou stranu rovnice (20), kde c je reálné číslo a x neznámá, se snažíme rozložit pomocí vzorců v součin dvou nebo více činitelů obsahujících neznámou. Položíme-li tyto činitele rovny nule, dostaneme rovnice nižších stupňů, jejichž kořeny jsou zároveň kořeny dané rovnice (20).

Úloha: Algebraicky řešte rovnici $x^6 - 64 = 0$.

Levou stranu rovnice můžeme přepsat na tvar

$$(x^3)^2 - (2^3)^2 = 0,$$

kdy rozkladem polynomu v součin nižších polynomů dostáváme

$$(x^3 - 2^3)(x^3 + 2^3) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)(x+2)(x^2 - 2x + 4x).$$

Získali jsme rovnici v součinovém tvaru

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4)(x+2)(x^2 - 2x + 4x) = 0,$$

ze které již snadno získáme kořeny zadané rovnice.

i) $(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$

ii) $(x^2 + 2x + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$

iii) $(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -2$

iv) $(x^2 - 2x + 4x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{5,6} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$

Závěr: Rovnice má v oboru reálných čísel dva kořeny $x_1 = 2, x_5 = -2$. V oboru komplexním dva komplexně sdružené kořeny $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$ a další dva komplexně sdružené kořeny $x_{5,6} = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Poznámka

(a) Algebraické řešení binomických rovnic je značně obtížné. Jednoduché algebraické řešení mají pouze binomické rovnice třetího až šestého stupně. Proto se podíváme a více zaměříme na *řešení goniometrické.*

(b) Řešení binomické rovnice budeme hledat v oboru komplexních čísel. Důvodem je totiž situace, kdy by v rovnici (20) c bylo záporné a museli bychom řešit $\sqrt[n]{-c}$, což v $\mathbb{R}$ řešit neumíme. Mohli bychom si potom pro řešení rovnice (20) v oboru reálném stanovit podmínku, že c bude vždy kladné. Raději se proto obecně zaměříme na řešení v $\mathbb{C}$, ve kterém mají všechny binomické rovnice (20) řešení.

Goniometrické řešení *v množině komplexních čísel*

Nechť $x \in \mathbb{C}$ je řešením binomické rovnice $x^n = c$, pak jeho goniometrické vyjádření je

$$x = |x|(cos\alpha + isin\alpha), \qquad 0 \le \alpha < 2\pi,$$

kde α je argument komplexního čísla x.

Číslo $c \in \mathbb{C}$ lze goniometricky vyjádřit

$$c = |c|(cos\varphi + isin\varphi), \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

kde φ je argument komplexního čísla c.

Z rovnice (21) plyne, že je-li x řešením binomické rovnice, pak platí

$$[|x|(cos\alpha + isin\alpha)]^n = |c|(cos\varphi + isin\varphi).$$

Umocněním a využitím Moivreovy věty dostáváme

$$|x|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = |c|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Z rovnosti dvou komplexních čísel plyne

$$|x|^n = |c| \qquad \Rightarrow \qquad |x| = \sqrt[n]{|c|}$$

$$\cos n\alpha = \cos\varphi \qquad \Rightarrow \qquad n\alpha = \varphi + 2k\pi$$

$$\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

$$\sin n\alpha = \sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad n\alpha = \varphi + 2k\pi$$

$$\alpha = \frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Řešení pak nabývá tvaru

$$x_k = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right); \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Z výše uvedeného vzorce by bylo možné vyvodit, že existuje nekonečně mnoho řešení, neboť k probíhá po celé nekonečné množině $\mathbb{Z}$. Musíme si ovšem uvědomit, že funkce *sinus* a *kosinus* jsou funkce periodické, a proto tomu tak není.

Je-li $k \geq n$, hodnoty kořenů se opakují, tj. nabývají hodnot kořenů pro $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Pro ilustraci si ukážeme, že např. pro $k = n$ dostaneme stejné číslo jako pro $k = 0$.

Nechť $k = n$, pak

$$x_n = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{n} + \sin\frac{\varphi + 2n\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right)$$
$$= \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})\right).$$

Nechť $k = 0$, pak

$$x_0 = \sqrt[n]{|c|}\cos\frac{\varphi + 2\cdot 0\cdot\pi}{n} + \sin\frac{\varphi + 2\cdot 0\cdot\pi}{n} = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})\right).$$

Odtud plyne, že $x_n = x_0$.

Závěr: Binomická rovnice (21) má tedy v $x \in \mathbb{C}$ k kořenů, jež značíme $x_0, \ x_1, \cdots, x_{n-1}$. Jejich obrazy, které leží na kružnici $l\left(O;\ r = \sqrt[n]{|c|}\right)$, znázorňujeme v Gaussově rovině komplexních čísel – všechny komplexní kořeny mají od počátku soustavy souřadnic O stejnou vzdálenost $\sqrt[n]{|c|}$ a vzájemně jsou pootočeny o úhel $\Delta\psi = \frac{\varphi+2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi+2k\pi+2\pi-\varphi-2k\pi}{n} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{n}}$. Obrazy kořenů leží na vrcholech pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice.

Úloha: Goniometricky řešte rovnici $x^6 - 64 = 0$.

Rovnici upravíme do tvaru binomické rovnice (21), tedy na tvar $x^6 = 64$ a následně vyjádříme v goniometrickém tvaru.

Poloha obrazu reálného čísla 64 je na kladné poloose reálné části v Gaussově rovině, a proto úhel $\varphi = 0$. Pak můžeme psát

$$64 = |64|(\cos 0 + i \sin 0).$$

Podle vztahu pro určení kořenů binomické rovnice platí

$$x_k = \sqrt[6]{|64|}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{6} + i\sin\frac{0+2k\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Kořeny získáme postupným dosazením k do $x_k = 2\left(\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right)$.

$x_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2\,(1 + 0) = 2$

$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

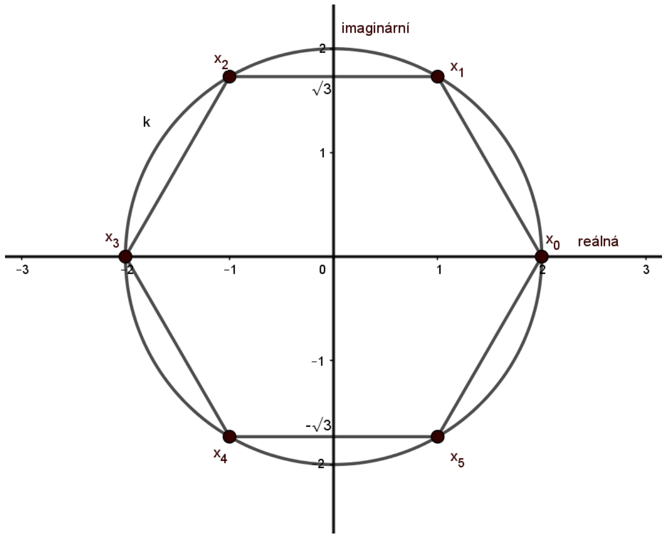
$x_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\ sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

$x_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1 + 0) = -2$

$x_4 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\ sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

$x_5 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\ sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

Závěr: Binomická rovnice $x^6 - 64 = 0$ má 6 různých kořenů. Jejich obrazy leží na kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic a jsou vzájemně pootočeny o úhel $\frac{\pi}{3}$. Obrazy kořenů leží ve vrcholech šestiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru $r = \sqrt[n]{|c|} = \sqrt[6]{|64|} = 2$.



Obr. 19

Speciálním případem binomické rovnice $x^n - c = 0$, kde $c = 1$, je rovnice $x^n - 1 = 0$ neboli $x^n = 1$.

Nyní převedeme 1 na goniometrický tvar. Máme tedy komplexní číslo s hodnotou 1; $z = 1$, jeho odmocnina je $|z| = \sqrt{1^2} = 1$.

$$\cos\varphi = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \text{argument } \varphi = 0$$

$$\sin\varphi = \frac{0}{1} = 0$$

Dostáváme tedy $1 = (\cos 0 + i \sin 0)$. Dosadíme-li do obecného vzorce pro kořeny binomické rovnice, získáme

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Získaná čísla jsou komplexními jednotkami[5], jejichž obrazy leží v Gaussově rovině pro $n > 2$ ve vrcholech pravidelného n-úhelníku vepsaného do jednotkové kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic, přitom jeden z vrcholů, obraz kořene $x_0 = 1$, leží v bodě 1 na reálné ose.

Poznámka

(a) Kořeny binomické rovnice $x^n - 1 = 0$ mají důležitou vlastnost, a to, že součinem dvou libovolných kořenů získáme opět kořen rovnice $x^n - 1 = 0$.
(b) Další důležitou vlastností kořenů binomické rovnice $x^n - 1 = 0$ je, že pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ platí vztah $x_k = x_1^k$.

Úloha: Řešte binomickou rovnici $x^8 - 1 = 0$.

Úpravou dostáváme rovnici $x^8 = 1$.

Nyní převedeme 1 na goniometrický tvar. Z výše uvedeného můžeme rovnou napsat

$$1 = (\cos 0 + i \sin 0).$$

Pro výpočet kořenů využijeme $x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, kde $n = 8$.

Kořeny zadané rovnice jsou čísla

$x_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0 = 1$

$x_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$x_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i$

$x_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

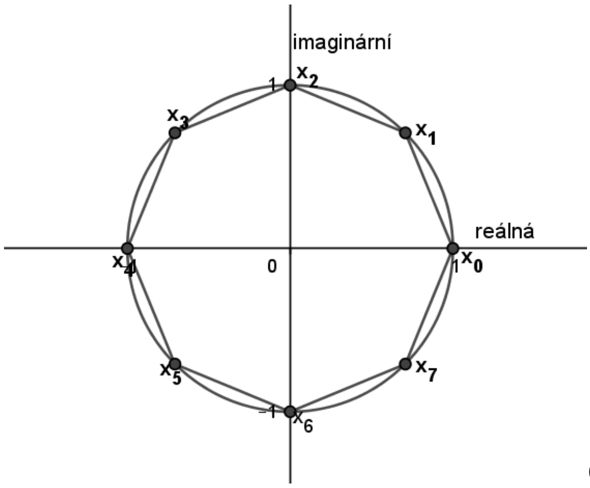
$x_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1$

$x_5 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$x_6 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$

$x_7 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$

[5] Komplexní jednotky jsou všechna komplexní čísla, které mají absolutní hodnotu rovnu 1, tj. všechna čísla, jejichž obrazy leží v Gaussově rovině na jednotkové kružnici.



Obr. 20

Závěr: Binomická rovnice $x^8 - 1 = 0$ má 8 různých kořenů. Jejich obrazy leží na kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic a jsou vzájemně pootočeny o úhel $\frac{\pi}{4}$. Obrazy kořenů leží ve vrcholech pravidelného osmiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice.

5.2 Řešení některých dalších binomických rovnic

1) Řešte binomickou rovnici $x^4 - i = 0$.

Rovnici převedeme na tvar $x^4 = i$. Poloha obrazu imaginární jednotky i leží na kladné poloose imaginární osy v Gaussově rovině. Potom $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Nyní převedeme i na goniometrický tvar

$$i = |i| \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right)$$

$$|c| = \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

Kořeny jsou pootočeny o úhel $\Delta\psi = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$.

Obecný vztah pro výpočet kořenů zadané rovnice je

$$x_k = \sqrt[4]{|i|} \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} + i \sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

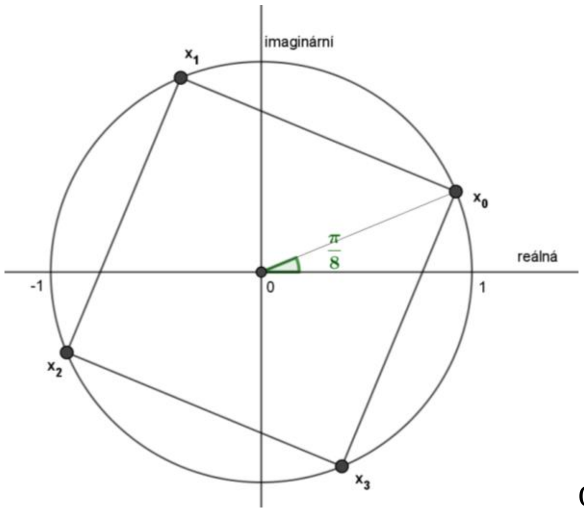
Po dosazení za k získáme čtyři kořeny

$x_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$

$x_1 = \cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi$

$x_2 = \cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi$

$x_3 = \cos\frac{13}{8}\pi + i\sin\frac{13}{8}\pi.$



Obr. 21

Závěr: Binomická rovnice $x^4 - i = 0$ má čtyři různé kořeny. Jejich obrazy leží na jednotkové kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic a jsou navzájem pootočené o úhel $\frac{\pi}{2}$, leží tedy ve vrcholech čtverce. Protože $|c| = 1$, tak se jedná o komplexní jednotky zobrazení kořenů v Gaussově rovině.

2) Řešte binomickou rovnici $x^3 + i = 0$.

Rovnici převedeme na tvar $x^3 = -i$. Poloha obrazu imaginární jednotky $-i$ leží na záporné poloose imaginární osy v Gaussově rovině. Potom $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Nyní převedeme $-i$ na goniometrický tvar.

$$-i = |-i|\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$|c| = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

$$x^3 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

Kořeny jsou pootočeny o úhel $\Delta\psi = \frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}$**.**

Obecný vztah pro výpočet kořenů zadané rovnice potom bude

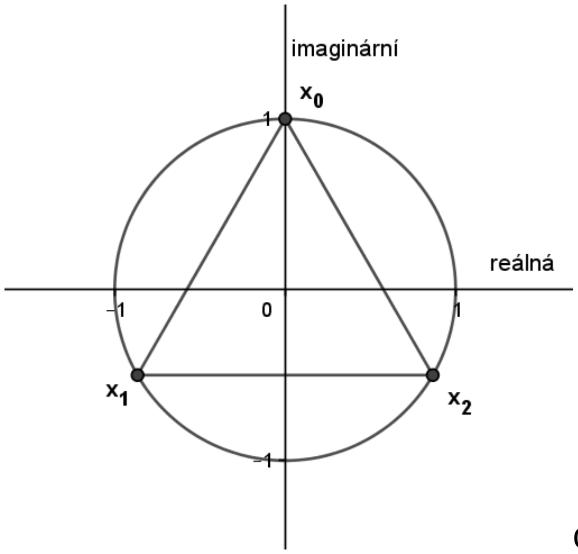
$$x_k = \sqrt[3]{|1|}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Kořeny zadané rovnice potom budou čísla

$$x_0 = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 1\,(0 + i) = i$$

$$x_1 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$x_2 = 1\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$



Obr. 22

Obrazy tří různých kořenů binomické rovnice $x^3 + i = 0$ leží na jednotkové kružnici ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku o délce strany $a = \sqrt{3}$, vzájemně pootočené o úhel $\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}$**.**

3) Řešte binomickou rovnici $x^5 + 1 - i\sqrt{3} = 0$.

Rovnici převedeme na tvar $x^5 = -1 + i\sqrt{3}$.

Nyní převedeme výraz na pravé straně na goniometrický tvar

$$|c| = \sqrt{\left(-1 + \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$\cos\varphi = -\frac{1}{2}, \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ \varphi = \frac{2}{3}\pi.$

Kořeny jsou pootočeny o úhel $\Delta\psi = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{5}}$.

Pro kořeny zadané rovnice potom platí

$x_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{5}\right)$, kde $k = 0, 1, 2, 3, 4.$

Kořeny zadané rovnice potom budou čísla

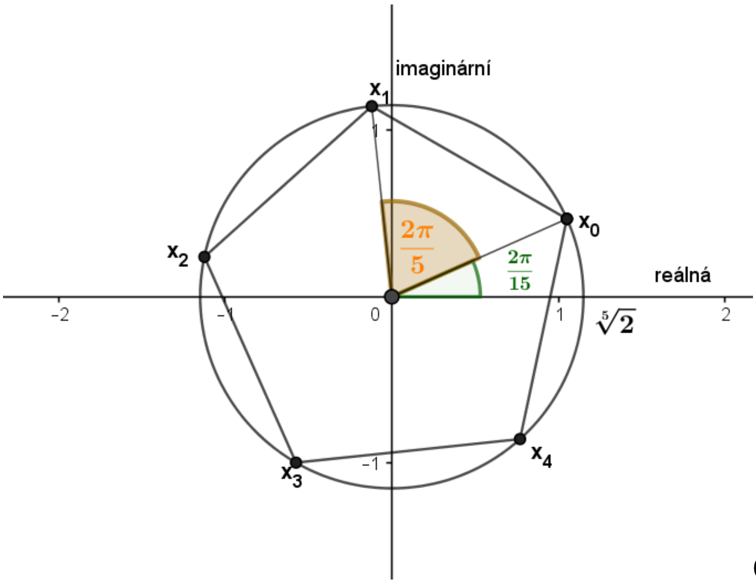
$x_0 = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15})$

$x_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{15} + i\ sin\frac{8\pi}{15}\right)$

$x_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{15} + i\ sin\frac{14\pi}{15}\right)$

$x_3 = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{20\pi}{15} + i\sin\frac{20\pi}{15})$

$x_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{26\pi}{15} + i\ sin\frac{26\pi}{15}\right)$.



Obr. 23

Závěr: Binomická rovnice $x^5 + 1 - i\sqrt{3} = 0$ má pět různých kořenů, které leží ve vrcholech pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru $r = \sqrt[5]{2}$. Obrazy kořenů jsou vzájemně pootočeny o úhel $\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{5}}$.

6. Reciproké rovnice

Definice 6.1 Reciproká rovnice

Rovnici tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (22)$$

nazýváme *rovnicí reciprokou*, a to prvního nebo druhého druhu, platí-li pro koeficienty $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ vztahy

- I. druhu $\quad a_n = a_0, \quad a_{n-1} = a_1, \quad a_{n-2} = a_2, \dots$
- II. druhu $\quad a_n = -a_0, \quad a_{n-1} = -a_1, \quad a_{n-2} = -a_2 \dots$

Příklad

Reciproká rovnice I. druhu $\quad 4x^3 + 3x^2 + 3x + 4 = 0$

Reciproká rovnice II. druhu $\quad 4x^3 + 3x^2 - 3x - 4 = 0$

6.1 Kořeny reciproké rovnice

Věta 6.1 O kořenech reciproké rovnice

(a) Má-li reciproká rovnice I. i II. druhu kořen α, potom má i kořen $\frac{1}{\alpha}$.

Důkaz: Dle předpokladu je α kořenem rovnice (22). Dosaďme do této rovnice kořen $x = \frac{1}{\alpha}, \alpha \neq 0$. Dostáváme

$$a_n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + a_{n-2} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{\alpha} + a_0 = 0.$$

Na levé straně rovnice vytkneme $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$. Potom získáme rovnici tvaru

$$\frac{1}{\alpha^n} (a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \alpha + a_n) = 0$$

ekvivalentní s rovnicí $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, která má podle předpokladu kořen α. Rovnost je proto splněna a $x = \frac{1}{\alpha}$ je kořenem rovnice (22).

(b) Reciproká rovnice (22) má všechny kořeny nenulové, neboť absolutní člen a_0, který je součinem kořenů, je roven koeficientu a_n, tj. různý od nuly.

(c) Reciproká rovnice I. druhu lichého stupně má vždy kořen $x_1 = -1$.

(d) Reciproká rovnice II. druhu má vždy kořen $x_1 = 1$.

6.2 Řešení reciprokých rovnic

Způsoby řešení reciprokých rovnic rozdělíme na řešení reciprokých rovnic I. a II. druhu, přičemž u rovnic I. druhu se budeme zabývat řešením rovnic sudého a lichého stupně.

Řešení rovnic I. druhu

a) sudého stupně tvaru $a_n x^{2k} + a_{n-1} x^{2k-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$

Sečteme-li první a poslední člen, druhý a předposlední atd. a podělíme x^k, dostaneme

$$a_n \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_{n-1} \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \cdots a_k = 0. \qquad (23)$$

Je-li nová neznámá $y = x + \frac{1}{x}$ (24), potom

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \text{ neboli}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y^2 - 2.$$

Dále pak

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2 \frac{1}{x} + 3x \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} \qquad \Rightarrow \qquad \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

neboli

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = y^3 - 3y.$$

Dále pak můžeme za $x^4 + \frac{1}{x^4}$ dosadit výraz proměnné y. Rozvineme-li $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ podle binomické věty, získáme

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + \binom{4}{1} x^3 \cdot \frac{1}{x} + \binom{4}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \binom{4}{3} x \cdot \frac{1}{x^3} + \binom{4}{4} \frac{1}{x^4}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4x^2 + 6 + 4\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = y^4 + 4(y^2 - 2) + 6$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = y^4 + 4y^2 - 2.$$

Podobně bychom dostali $x^5 + \frac{1}{x^5}$ atd. podle stupně reciproké rovnice.

Dosazením za dvojčleny do (23) obdržíme rovnici k-tého stupně, tedy

$$b_k y^k + b_{k-1} y^{k-1} + b_{k-2} y^{k-2} + \cdots b_0 = 0. \tag{25}$$

Tato rovnice má k kořenů $y_1, y_2, \ldots, y_{2k}$, jejichž dosazením do substituce $y = x + \frac{1}{x}$ získáme kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$. Situace se omezila na řešení jediné rovnice k-tého stupně (25) a k kvadratických rovnic s neznámou x (24).

Výše uvedený poznatek můžeme shrnout do následující věty.

Věta 6.2

Řešení reciproké rovnice I. druhu sudého stupně $2k$ lze převést na řešení algebraické rovnice polovičního stupně, tj. k-tého stupně, a řešení k kvadratických rovnic.

Důsledek:

(a) Každá reciproká rovnice I. druhu stupně ≤ 9 je algebraicky řešitelná.
(b) Každá reciproká rovnice II. druhu stupně ≤ 10 je algebraicky řešitelná.

Věta 6.3 Reciproká rovnice čtvrtého stupně tvaru

(a) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ má čtyři kořeny, jež dva z nich jsou hodnoty převrácené.
(b) $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$, která má jeden kořen $+1$, druhý kořen -1 a další dva vzájemně převrácené.

Důkaz:

(a) Po vydělení rovnice x^2, $x^2 \neq 0$, neboť dle věty 6. 1. b) $x = 0$ není kořenem (22), dostáváme

$$ax^2 + bx + c + b\frac{1}{x} + a\frac{1}{x^2} = 0, \text{ což můžeme zapsat ve tvaru}$$

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Je-li opět zavedena substituce $y = x + \frac{1}{x}$, potom $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y^2 - 2$.

Výše upravenou rovnici můžeme zapsat do tvaru

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

nebo též do tvaru kvadratické rovnice

$$ay^2 + by + c - 2a = 0,$$

která má dva kořeny y_1, y_2.

Nyní se vrátíme k substituci.

Rovnice $y_1 = x + \frac{1}{x}$ je kvadratická rovnice s neznámou x

$$x^2 - y_1 x + 1 = 0,$$

která je ovšem i rovnicí reciprokou a má tedy dva kořeny x_1 a $x_2 = \frac{1}{x_1}$, jež jsou navzájem převrácenými čísly.

Podobně rovnice $y_2 = x + \frac{1}{x}$ je kvadratickou a zároveň reciprokou rovnicí s neznámou x

$$x^2 - y_2 x + 1 = 0$$

se dvěma navzájem převrácenými kořeny x_3 a $x_4 = \frac{1}{x_3}$.

(b) Rovnici přepíšeme do tvaru $a(x^4-1)+bx(x^2-1)=0$, dále budeme pokračovat v úpravě rovnice

$$(x^2-1)[a(x^2+1)+bx]=0.$$

Aby rovnost platila, musí buď

$(x^2-1)=0,$ nebo $ax^2+bx+a=0.$

Z první rovnice získáme kořeny $x_1=-1, x_2=1$ (tyto kořeny jsou rovny svým převráceným hodnotám), druhá rovnice je reciproká, má tedy kořeny x_3, x_4, pro které platí $x_4=\frac{1}{x_3}$.

Úloha: Řešte v $\mathbb{C}$ reciprokou rovnici čtvrtého stupně.

(a) $5x^4-26x^3+10x^2-26x+5=0.$

Celou rovnici vydělíme x^2 a dostaneme

$$5x^2-26x+10-26\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^2}=0$$

$$5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-26\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$$

Zavedeme substituci $\left(x+\frac{1}{x}\right)=y$, potom $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=y^2-2$

$$5(y^2-2)-26y+10=0$$

$$5y^2-10-26y+10=0$$

$$y(5y-26)=0.$$

Aby rovnost platila, musí platit:

i) $y=0 \quad \Rightarrow \quad x+\frac{1}{x}=0$, vynásobíme celou rovnici $x\neq 0$

$$x^2+1=0$$

$$x^2-(-1)=0$$

$$x^2-i^2=0$$

$$(x-i)(x+i)=0$$

$x_1=i, x_2=-i$

ii) $5y - 26 = 0$

$y = \frac{26}{5} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$, vynásobíme celou rovnici $5x \neq 0$

$$5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{10} = \frac{26 \pm 24}{10}$$

$x_3 = 5,\ x_4 = \frac{1}{5}$

Závěr: Reciproká rovnice má čtyři kořeny $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = 5$, $x_4 = \frac{1}{5}$.

b) Lichého stupně tvaru $a_{2n+1}x^{2k+1} + a_{2n}x^{2k} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$

Jak již bylo uvedeno výše (dle věty 6. 1. c)), rovnice má kořen $x_1 = -1$, což snadno dokážeme dosazením. Dělením kořenovým činitelem $x + 1$ získáme reciprokou rovnici sudého stupně, kterou již umíme řešit podle reciprokých rovnic stupně sudého.

Věta 6.4 Reciproká rovnice třetího stupně tvaru

(a) $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ má tři kořeny, jeden jednotkový, další dva jsou navzájem převrácené hodnoty,

(b) $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ má tři kořeny, jeden jednotkový, další dva jsou navzájem převrácené hodnoty.

Důkaz:

(a) Rovnici upravíme do součinového tvaru

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$$

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(ax^2 - ax + bx + a) = 0.$$

Aby rovnost platila, musí být buď:

$x + 1 = 0,$ anebo $ax^2 - x(a - b) + a = 0.$

$$x_1 = -1$$

$$x_{2,3} = \frac{(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4a^2}}{2a}.$$

(b) Rovnici opět upravíme do součinového tvaru a dostaneme

$$(x-1)[ax^2 + x(a+b) + a] = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_{2,3} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4a^2}}{2a}.$$

Reciproká rovnice třetího stupně má opravdu tři kořeny. Rovnice $ax^2 - x(a-b) + a = 0$, resp. $ax^2 + x(a+b) + a = 0$ jsou kvadratické rovnice reciproké, jejichž kořeny x_2, x_3 jsou převrácené hodnoty (podle věty 4. 8 a)).

Úloha: Řešte v $\mathbb{C}$ reciprokou rovnici třetího stupně.

(a) $x^3 + \frac{13}{3}x^2 + \frac{13}{3}x + 1 = 0.$

Z věty 6. 1. c) má naše rovnice kořen $x_1 = -1$.

Vydělením kořenovým činitelem $(x+1)$

$$\left(x^3 + \frac{13}{3}x^2 + \frac{13}{3}x + 1\right) \div (x+1) = x^2 + \frac{10}{3}x + 1$$

$$\underline{-x^3 - x^2}$$

$$\frac{10}{3}x^2 + \frac{13}{3}x + 1$$

$$\underline{-\frac{10}{3}x^2 - \frac{10}{3}x}$$

$$x + 1$$

získáme kvadratickou rovnici $3x^2 + 10x + 3 = 0$, kde

$$x_{2,3} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6},$$

potom $x_2 = -3$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

Rovnice má tedy tři kořeny $x_1 = -1, x_2 = -3$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

Řešení rovnic II. druhu tvaru $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}a_{n-2}x^{n-2} + \cdots - a_{n-2}x^2 - a_{n-1}x^1 - a_n = 0$

Z výše uvedeného (6. 1. d)) mají rovnice II. druhu kořen $x_1 = 1$ (o čemž se lze přesvědčit dosazením). Vydělíme-li rovnici kořenovým činitelem $x - 1$, dostaneme rovnici stupně $n - 1$, což je rovnice I. druhu, kterou jsme výše vyřešili.

Úloha: Řešte v $\mathbb{C}$ reciprokou rovnici pátého stupně

$$8x^5 - 62x^4 + 155x^3 - 155x^2 + 62x - 8 = 0.$$

Rovnice má jeden kořen $x_1 = 1$. Vydělíme rovnici kořenovým činitelem $(x - 1)$

$$(8x^5 - 62x^4 + 155x^3 - 155x^2 + 62x - 8) \div (x - 1) = 8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8$$

a dostaneme rovnici stupně čtvrtého, kterou již umíme řešit.

Rovnici čtvrtého stupně vydělíme x^2 a získáme $8x^2 - 54x + 101 - 54\frac{1}{x} + 8\frac{1}{x^2} = 0.$

Upravíme na tvar $8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 54\left(x + \frac{1}{x}\right) + 101 = 0$ a zavedeme substituci

$$y = x + \frac{1}{x}, y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Získáme rovnici $8y^2 - 54y + 85 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{2916 - 2720}}{16} = \frac{54 \pm 14}{16}, \text{ tj.}$$

$y_1 = \frac{17}{4},\ y_2 = \frac{5}{2}.$

Nyní se vrátíme k substituci a zjistíme zbylé čtyři kořeny naší zadané rovnice.

$y_1 = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{17}{4} = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad 17x = 4x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 17x + + 4 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}, \text{ tj.}$$

$x_2 = 4, x_3 = \frac{1}{4}$

$y_2 = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2} = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad 5x = 2x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 5x + + 2 = 0$

$$x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}, \text{ tj.}$$

$x_4 = 2, x_5 = \frac{1}{2}$

Závěr: Reciproká rovnice má pět kořenů $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = \frac{1}{4}, x_4 = 2, x_5 = \frac{1}{2}$, přičemž jeden je jednotkový a zbylé čtyři jsou navzájem po dvou převrácená čísla.

Poznámka

Po vyřešení předchozích příkladů si položme otázku, proč reciproké rovnice neřešíme pomocí Hornerova schématu z oddílu 1.4, ale pomocí zdlouhavého způsobu a substituce? Neusnadnilo by nám Hornerovo schéma práci? V následujícím oddíle se pokusíme jeden příklad vyřešit oběma způsoby a uvidíme, k jakému závěru dojdeme.

Úloha: Řešte příklad $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$.

i) Jako první se příklad pokusíme vyřešit metodami výše uvedenými.

Rovnice $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$ je rovnicí I. druhu lichého stupně, proto $x_1 = -1$.

Vydělením kořenovým činitelem snížíme rovnici na čtvrtý stupeň.

$$(2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2) \div (x + 1) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2$$

Celou rovnici vydělíme x^2 a dostaneme

$$2x^2 - 5x + 6 - 5\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Zavedeme substituci $\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$, potom $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y^2 - 2$

$$2(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0$$

$$2y^2 - 4 - 5y + 6 = 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici a dostaneme $y_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$.

Nyní se vrátíme k substituci a zjistíme zbylé čtyři kořeny naší zadané rovnice.

$$y_1 = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad 2 = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad 2x = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x - 1) = 0$$

$x_2 = 1, x_3 = 1$

$y_2 = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 2x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - x + 2 = 0$

$$x_{4,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$$

$x_4 = \frac{-1+i\sqrt{15}}{4}$, $x_5 = \frac{-1-i\sqrt{15}}{4}$

$P = \left\{-1, 1, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}\right\}$.

ii) Nyní příklad vyřešíme pomocí Hornerova schématu.

Do horního řádku sepíšeme všechny koeficienty. Potenciálním řešením by mohla být čísla $\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2} \pm \frac{2}{1}, \pm\frac{2}{2}$.

	2	−3	1	1	−3	2
−1	2	−5	6	−5	2	0
1	2	−3	3	−2	0	
1	2	−1	2	0		

Z posledního řádku Hornerova schématu nám vyjde rovnice $2x^2 - x + 2 = 0$, do které ať zkoušíme, jak zkoušíme, žádné z potencionálních řešení nesedí. Jedná se o kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme pomocí vzorce na výpočet kořenů

$$x_{4,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$$

a zjistíme, že má dva komplexně sdružené kořeny, potom

$P = \left\{-1, 1, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}\right\}$.

Závěr: Na první pohled je řešení pomocí Hornerova schématu opět rychlejší a přehlednější. Ovšem u příkladů, které nemají pouze racionální řešení, tedy řešení, jež se dá zapsat ve tvaru zlomku, narazíme na problém. Hornerovo schéma nám totiž jiné než racionální kořeny nezjistí. My jsme měli v zadaném příkladu štěstí. Komplexně sdružené kořeny jsme vypočítali až po zjednodušení Hornerovým schématem. Může se ale stát, že zadaný příklad bude mít všechna řešení např. v oboru komplexních čísel, nebo pouze čísla iracionální. V tom případě řešení pomocí Hornerova schématu musíme nechat stranou a příklad vyřešit pomocí algoritmu na řešení reciprokých rovnic. Postup je to sice zdlouhavý, avšak zajímavý a krásný. A o tom matematika je.

7. Systém lineárních rovnic o dvou neznámých a praktické využití na ZŠ

7.1 Systém rovnic

Motivační úloha

Dva metry látky a pět metrů záclony stojí 299 Kč, tři metry látky a čtyři metry záclony stojí 284 Kč. Kolik stojí metr látky a kolik metr záclony?

Volba neznámých: cena za 1 m látky …l

cena za 1 m záclony …z

Vytvoření rovnic: dva metry látky a pět metrů záclony stojí 299 Kč: $2l + 5z = 299$

tři metry látky a čtyři metry záclony stojí 284 Kč: $3l + 4z = 284$

Sestavení soustavy:

$$2l + 5z = 299$$

$$3l + 4z = 284$$

Zde jsme sestavili soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, aniž bychom měli nějaké povědomí o tomto tématu. Nyní se můžeme podívat na samotné soustavy rovnic.

Rovnice (popř. nerovnice, jež nejsou předmětem této práce) lze spojovat do důležitých celků, které nazýváme systémy rovnic (popř. nerovnic).

Systémem nebo též soustavou dvou rovnic o dvou neznámých x, y rozumíme zápis ve tvaru

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2, \qquad (26)$$

kde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ a x, y jsou proměnné.

Poznámka

(a) Jestliže by nastala situace, kdy $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, soustava dvou rovnic se omezuje na jedinou rovnici, a to $a_2x + b_2y = c_2$. Tato rovnice má buď nekonečně mnoho řešení, nebo žádné.

(b) Jestliže by nastala situace, kdy $a_1 = b_1 = 0$ a zároveň $c_1 \neq 0$, první rovnice soustavy (26) nemá řešení, a tedy nemá řešení ani celá soustava (26).

V našem budoucím výkladu se proto omezíme pouze na soustavy (26), v nichž alespoň pro jeden z koeficientů a_1, b_1 platí, že je různý od nuly, a zároveň jeden z koeficientů a_2, b_2 je různý od nuly.

Příkladem systému dvou rovnic o dvou neznámých mohou být rovnice

$$3x + 2y = 7$$
$$4x - 2y = 0. \qquad (27)$$

Mezi jednotlivými rovnicemi, z nichž se soustava skládá, platí vztah konjunkce. Naše daná soustava (27) má tedy význam: platí $3x + 2y = 7$ a zároveň $4x - 2y = 0$.

Obecně *řešením soustavy* nazýváme uspořádanou dvojici $[x_0, y_0]$, která je řešením obou jejich rovnic.

Uspořádaná dvojice čísel [1, 2] je řešením uvedené soustavy (27), neboť je současně řešením první a zároveň i druhé rovnice.

Uspořádaná dvojice čísel [2, 3] není řešením uvedené soustavy (27), protože po dosazení čísla 2 za proměnnou x a čísla 3 za proměnnou y vzniká výrok, který je nepravdivý.

7.2 Metody řešení soustav rovnic

Existuje několik metod při řešení soustav. My si zde ukážeme nejjednodušší metodu *sčítací a dosazovací* a pro zajímavost metodu *porovnávací.* Při řešení soustav nesmíme zapomenout využívat ekvivalentní úpravy.

Poznámka

Zásadní myšlenka při řešení soustav lineárních rovnic spočívá v převodu původní soustavy na soustavu novou se stejnou množinou řešení za pomoci ekvivalentních úprav.

- Přičtení násobku některé rovnice soustavy ke zbývající rovnici této soustavy (tzn. přičtení levé strany ke straně levé a pravé strany ke straně pravé).
- Vynásobení některé rovnice soustavy nenulovým číslem (tj. nenulovým číslem vynásobíme obě strany rovnice).
- Vzájemná výměna obou rovnic soustavy.

7.2.1 Sčítací metoda

Principem sčítací metody je vhodné sečtení obou rovnic za účelem eliminace jedné neznámé.

Sčítací metodou vyřešíme soustavu (27), tj. soustavu

$$3x + 2y = 7$$

$$4x - 2y \ = 0.$$

Postup řešení: Levé strany sečteme (v našem případě nemusíme žádnou z rovnic upravovat, neboť koeficienty u neznámé y jsou v obou rovnicích stejné s rozdílným znaménkem) a součet položíme roven součtu pravých stran, tj.

$$7x = 7,$$

odkud dostáváme výsledek pro neznámou x

$$x = 1.$$

Hodnotu $x = 1$ můžeme dosadit např. do první z rovnic a získáme hodnotu pro $y = 2$.

Výsledek: Daná soustava rovnic má jediné řešení a tím je uspořádaná dvojice $[x, y] = [1,2]$.

7.2.2 Dosazovací metoda

Podstata dosazovací metody spočívá ve vyjádření jedné neznámé z některé rovnice a následné dosazení do rovnice druhé. Je-li to možné, vyjadřujeme tu neznámou, u které je koeficient roven jedné.

$$6x - 2y = 16 \tag{28}$$

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{6}y = \frac{1}{2} \tag{29}$$

Abychom mohli tuto soustavu vyřešit dosazovací metodou, musíme z jedné rovnice vhodně vyjádřit libovolnou neznámou, kterou následně dosadíme do rovnice druhé.

Postup řešení: Po drobné úpravě rovnice (29), kdy jsme celou rovnici vynásobili 6, se dostáváme na tvar $8x - y = 3$, odkud již můžeme vyjádřit y

$$y = 8x - 3.$$

Hodnotu y dosadíme do rovnice (28).

$$6x - 2(8x - 3) = 16$$

$$6x - 16x + 6 = 16$$

$$-10x = 10$$

$$x = -1$$

Hodnotu $x = -1$ dosadíme do rovnice (29) a dostáváme $y = -11$.

Výsledek: Daná soustava rovnic má jediné řešení a tím je uspořádaná dvojice $[x, y] = [-1, -11]$.

Poznámka

Výslednou hodnotu první vypočítané neznámé dosazujeme raději do rovnice původní, kdybychom při úpravách a vyjadřování chybovali, mohlo by nám to výsledek ovlivnit.

7.2.3 Porovnávací metoda

Princip porovnávací metody spočívá ve vyjádření jedné neznámé z obou rovnic, které následně porovnáme.

$$-x + \frac{1}{3}y = -\frac{4}{3} \qquad (30)$$

$$\frac{2}{5}x + 2y = -\frac{44}{5} \qquad (31)$$

Postup řešení: Obě rovnice si nejprve musíme upravit. Rovnici (30) vynásobíme 3, rovnici (31) číslem 5 a dostaneme

$$-3x + y = -4$$

$$x + 5y = -22.$$

Z obou rovnic vyjádříme neznámou x a porovnáme tato vyjádření mezi sebou

$$\frac{y}{3} + \frac{4}{3} = -22 - 5y.$$

Odtud po jednoduchých úpravách dostáváme hodnotu $y = -5$, kterou dosadíme zpět do rovnice (31). Získáme $x = -3$.

Výsledek: Daná soustava rovnic má jediné řešení a tím je uspořádaná dvojice $[x, y] = [-3, -5]$.

Závěr: To, jakou metodu při řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých využijeme, záleží čistě na nás. Při správném řešení všechny metody povedou ke zdárnému cíli.

U sčítací metody může být hlavním problémem sečtení v situaci, kdy musíme obě rovnice rozšířit na jejich nejmenší společný násobek a nepracujeme tak s „hezkými čísly".

U metody dosazovací, popř. porovnávací se může v některých případech zdát složité jednu neznámou z jedné rovnice, popř. z obou rovnic vyjádřit.

Diskuse o počtu řešení

Při řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých se můžeme setkat s následujícími třemi závěry.

1. Soustava má jedno řešení a tím je uspořádaná dvojice čísel, přičemž první hodnota udává výsledek pro neznámou x a druhá hodnota pro neznámou y.
2. Soustava má nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když levá i pravá strana jedné z rovnic soustavy je násobkem (i nenulovým) rovnice zbývající.
3. Soustava nemá žádné řešení – neexistuje ani jedna uspořádaná dvojice čísel, která by vyhovovala dané soustavě rovnic.

7.3 Grafické řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Mějme rovnici o dvou neznámých $ax + by = c$. Obrazem množiny všech řešení této rovnice je přímka o rovnici $ax + by = c$, přičemž $b \neq 0$ nebo $a \neq 0$ a a, b, c jsou reálná čísla.

Grafem soustavy rovnic je pak množina všech společných bodů příslušných přímek. V našem případě tedy budeme hledat průnik grafů dvou lineárních funkcí, které získáme vyjádřením neznámé y z každé rovnice a dostaneme tedy dvě funkce proměnné x.

Podle polohy přímek, kterou vůči sobě zaujímají, daná soustava může mít jedno, nebo žádné, nebo nekonečně mnoho řešení. V tomto případě by se jednalo o přímky různoběžné, nebo rovnoběžné různé, nebo splývající.

Úloha: Řešte graficky soustavu rovnic:

a) $x + 2y = 4$
$4x - 2y = 11$

Postup: Z každé rovnice si vyjádříme y a dostaneme rovnice dvou lineárních závislostí.

$$p: y = -\frac{x}{2} + 2$$

$$q: y = 2x - \frac{11}{2}$$

Nyní si určíme souřadnice alespoň dvou různých bodů (pro obě rovnice zvlášť), které procházejí grafem lineární závislosti.

Např. pro přímku p:

$x = 2 \rightarrow y = 1$ $\quad A = [2,1]$

$x = 0 \rightarrow y = 2$ $\quad B = [0,2]$

Např. pro přímku q:

$x = 0 \rightarrow y = -\frac{11}{2}$ $\quad C = [0, -\frac{11}{2}]$

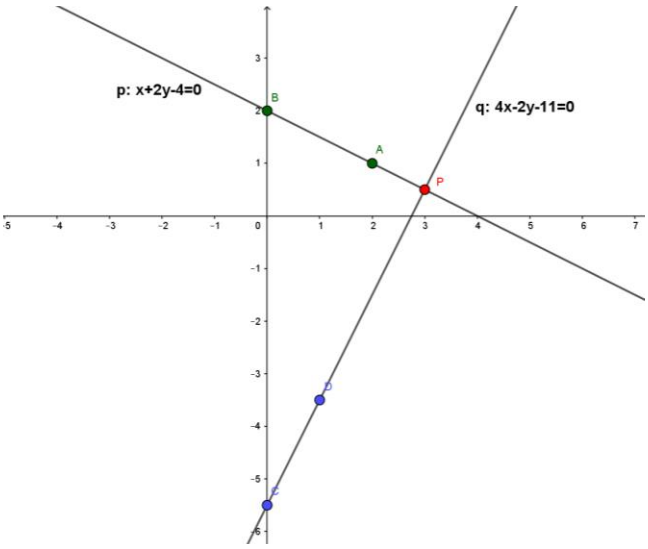
$x = 1 \rightarrow y = -\frac{7}{2}$ $\quad D = [1, -\frac{7}{2}]$

Přímka p, jež je grafem lineární závislosti dané rovnice $y = -\frac{x}{2} + 2$, prochází body

$$A = [2,1], B = [0,2].$$

Přímka q, jež je grafem lineární závislosti dané rovnice $y = 2x - \frac{11}{2}$, prochází body

$$C = [0, -\frac{11}{2}], D = [1, -\frac{7}{2}].$$



Obr. 24

Závěr: Na obr. 24 vidíme dvě různoběžné přímky, které se protínají v jednom společném bodě, tím je bod o souřadnicích $x = 2, y = \frac{1}{2}$. Naše soustava má tedy pouze jedno řešení a tím je průsečík přímek $P = [3, \frac{1}{2}]$.

b) $x + 2y = 1$

$2x + 4y = 4$

Postup: Z každé rovnice si opět vyjádříme y a dostaneme rovnice dvou lineárních závislostí.

$$p: y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$q: y = -\frac{x}{2} + 1$$

Opět si určíme souřadnice alespoň dvou různých bodů (pro obě rovnice zvlášť), které procházejí grafem lineární závislosti.

Např. pro přímku p:

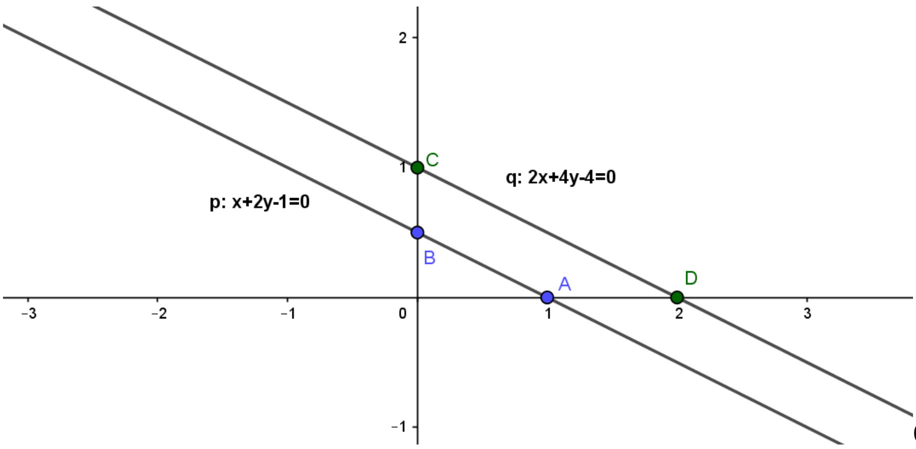
$x = 1 \rightarrow y = 0$ $\quad A = [1,0]$

$x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$ $\quad B = [0, \frac{1}{2}]$

Např. pro přímku q:

$x = 0 \rightarrow y = 1$ $\quad C = [0,1]$

$x = 2 \rightarrow y = 0$ $\quad D = [2,0]$



Obr. 25

Závěr: Z obr. 25 můžeme vyčíst, že přímky jsou rovnoběžné různé, proto daná soustava rovnic nemá žádné řešení.

c) $-2x + y = 1$

$4x - 2y = -2$

Postup: Z každé rovnice si opět vyjádříme y a dostaneme rovnice dvou lineárních závislostí.

$$y = 2x + 1$$

$$y = 2x + 1$$

Nyní si určíme souřadnice alespoň dvou různých bodů (pro obě rovnice zvlášť), které procházejí grafem lineární závislosti.

Např. pro přímku p:

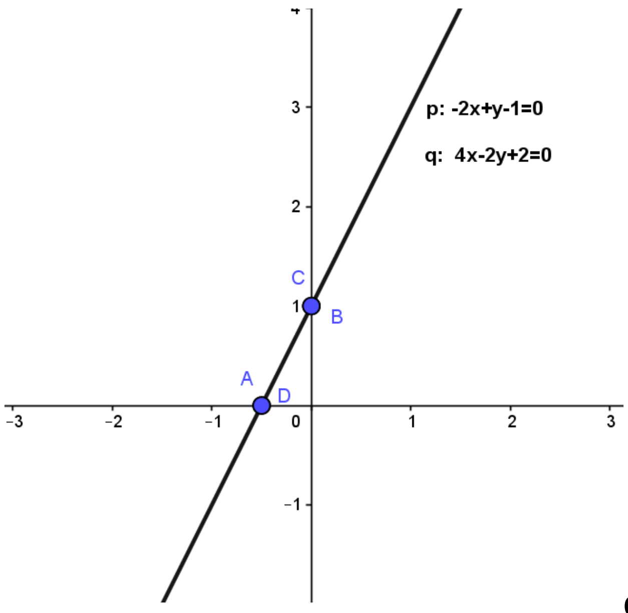
$x = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 0 \qquad A = [-\frac{1}{2}, 0]$

$x = 0 \rightarrow y = 1 \qquad B = [0,1]$

Např. pro přímku q:

$x = 0 \rightarrow y = 1 \qquad C = [0,1]$

$x = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 0 \qquad D = [-\frac{1}{2}, 0]$



Obr. 26

Závěr: Na obr. 26 vidíme, že naše zadané přímky jsou totožné, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení. Množinu všech řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\{[x, 2x + 1]; x \in R\}.$$

7.4 Slovní úlohy vedoucí na soustavu rovnic řešené na ZŠ

1) V hotelu jsou k dispozici dvojlůžkové a třílůžkové pokoje. Hotel nabízí celkem 83 lůžek ve 33 pokojích. Kolika dvojlůžkovými a kolika trojlůžkovými pokoji hotel disponuje?

Pro lepší přehled si můžeme vytvořit jednoduchou tabulku s údaji, které známe.

	Počet pokojů	Počet lůžek na pokojích
Dvojlůžkové	X	2x
Třílůžkové	Y	3y
Celkem	33	83

Vytvoření soustavy z tabulky:

$$x + y = 33 \tag{32}$$

$$2x + 3y = 83 \tag{33}$$

Postup řešení: Soustavu můžeme řešit jakoukoliv z výše uvedených metod. My volíme metodu dosazovací.

Z rovnice (32) si vyjádříme např. x a dostaneme novou rovnici $x = 33 - y$, kterou dosadíme do rovnice (33).

Získáme vztah $2 \cdot (33 - y) + 3y = 83$. Po roznásobení závorky a malé úpravě dostaneme rovnici $66 + y = 83$, ze které již získáme hodnotu pro $y = 17$.

Vrátíme se zpět k původní rovnici (32), kam hodnotu $y = 17$ dosadíme a získáme hodnotu $x = 16$.

Početní kontrola: Počet lůžek ve dvojlůžkových a třílůžkových pokojích je 83.

$$2 \cdot 16 + 3 \cdot 17 = 83$$

Celkový počet pokojů je 33.

$$17 + 16 = 33$$

Odpověď: V hotelu se nachází 16 dvojlůžkových a 17 třílůžkových pokojů.

2) Chemik chce ve své laboratoři připravit 200 g 64% lihu. Máme v dostatečném množství 80% líh, který budeme ředit vodou. Kolik 80% lihu a kolik vody, ve které je 0 % lihu, budeme potřebovat?

Pro lepší přehled si opět můžeme vytvořit jednoduchou tabulku s údaji, které známe.

	Počet gramů	% roztok
Líh	x	$0{,}8x$
Voda	y	$0y$
Celkem	200	64

Vytvoření soustavy z tabulky:

$$x + \quad y = 200 \tag{34}$$

$$0{,}8x + 0 \cdot y = 0{,}64 \cdot 200 \tag{35}$$

Postup řešení: Soustavu můžeme řešit jakoukoliv z výše uvedených metod. My volíme metodu sčítací.

Celou rovnici (34) vynásobíme $(-0{,}8)$.

$$-0{,}8x - 0{,}8y = -160$$

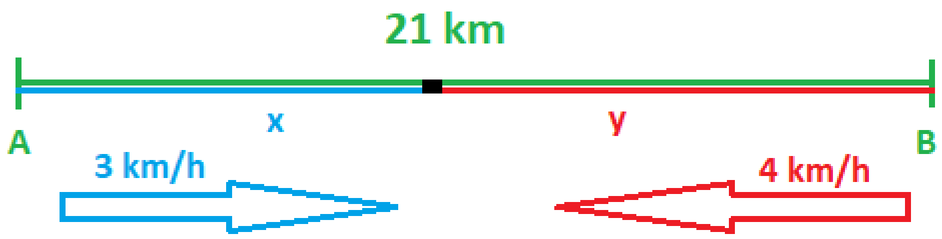
$$0{,}8x + 0 \cdot y = 0{,}64 \cdot 200$$

Po sečtení těchto rovnic získáme $-0{,}8y = -32$, tedy $y = 40$. Po dosazení $y = 40$ do (34) dostáváme $x = 160$.

Z tabulky vyčteme, že hodnota x je hodnotou pro líh a y pro vodu.

Odpověď: K namíchání správného roztoku budeme potřebovat 160 g 80% lihu a 40 g vody.

3) Cesta z místa A do místa B je dlouhá 21 kilometrů. Pavel jde rychlostí 3 km/h a vychází z místa A ve stejný čas jako Michal z místa B rychlostí 4 km/h. Kolik kilometrů ujde Pavel a kolik kilometrů Michal k místu setkání?



Obr. 27

Sestavení soustavy:

$$x + y = 21 \tag{36}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \tag{37}$$

Postup řešení: Při řešení této úlohy můžeme využít metodu dosazovací. Z rovnice (37) si vyjádříme x, tedy $x = \frac{3}{4}y$, a tuto hodnotu dosadíme do rovnice (36).

$$\frac{3}{4}y + y = 21 \quad /\cdot 4$$

$$3y + 4y = 84$$

$$7y = 84 \quad /\div 7$$

$$y = 12$$

Hodnotu pro y dosadíme zpět do rovnice (36) a dostáváme $x = 9$.

Odpověď: Pavel ujde k místu setkání 9 km, Michal 12 km.

Závěr

Tato bakalářská práce se zabývala některými rovnicemi v algebře. Čtenáři měla poskytnout nejen pevný základ a ucelený soubor poznatků, které by mu posloužily při studiu daného tématu, ale díky velkému množství jednotlivých postupů a řešených příkladů také pocit jistoty důležitý pro aplikaci získaných znalostí při studiu následném.

Začátek práce je věnován převážně teorii. Nejprve jsem zmínila obecné znalosti o polynomech a důležitých větách, které nás dovedly až k algebraickým rovnicím. Nezbytnou součástí práce bylo využití všech těchto poznatků k řešení jednotlivých typů rovnic.

V dalších kapitolách jsem se již více věnovala metodám a postupům řešení jednotlivých typů rovnic, jež jsem doplnila o grafická řešení, která jsou součástí matematiky i na ZŠ a SŠ. U kvadratických rovnic jsem se snažila o odvození vzorců pro kořeny rovnice. Toto by pro čtenáře mohlo být nejen zajímavé, ale i přínosné. U binomických rovnic jsem ukázala dvě možná řešení, a to algebraické a binomické. Ne vždy se však metoda algebraická dá v praxi efektivně využít.

Závěr práce je věnován soustavám lineárních rovnic o dvou neznámých, se kterými se setkáme již na ZŠ. Zmínila jsem zde tři možné metody, a to metodu sčítací, dosazovací a porovnávací, a pokusila se je porovnat. Zajímavou součástí kapitoly jsou slovní úlohy a příklady z praxe, které by pro žáka mohly představovat možnost setkat se s matematikou z jiného úhlu.

Jelikož možných příkladů a dalších typů algebraických rovnic je opravdu mnoho, za sebe doufám, že tato práce podnítí čtenáře k vyhledání dalších informací, obohatí jej a zdokonalí jeho matematický obzor.

Seznam použité literatury

Odborná literatura

[1] BOSÁK, Juraj. *Rovnice a nerovnosti.* 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelství, 1963.

[2] HORÁK, Pavel. *Algebra a teoretická aritmetika II.* 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 1993. ISBN 80-210-0816-4.

[3] HORÁK, Pavel. *Polynomy.* 1. vyd. Brno: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Přírodovědecká fakulta, 1978.

[4] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry.* 1. vyd. Praha: ČSAV, 1953.

[5] SCHWARZ, Štefan. *O rovnicích.* Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1940. Cesta k vědění, svazek 1.

[6] ŠIK, František. *Algebra I: Polynomy a algebraické rovnice.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1962

[7] ŠISLER, Miroslav, ANDRYS, Josef. *O řešení algebraických rovnic.* 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1966. Škola mladých matematiků, svazek 13.

[8] ŠKRÁŠEK, Josef. *Základy vyšší matematiky.* 6. vyd. Praha: SNTL, 1974.

Přehled středoškolské matematiky

[9] BYDŽOVSKÝ, Bohumil, TEPLÝ, Stanislav, VYČICHLO, František. *Aritmetika pro V. – VII. Třídu středních škol.* 6. vyd. Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1935.

[10] LIEBL, Petr. *Rovnice a nerovnice pro I. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku.* 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1986. Učebnice pro gymnázia.

Učebnice pro základní školy

[12] ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří. *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 9. ročník základní školy. 1*. vyd. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-228-7.

[11] ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 1. díl. 3*. vyd. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-439-1.