Polynomy

Text určený studentům učitelství matematiky

Irena Budínová

Masarykova univerzita

Pedagogická fakulta

POLYNOMY

TEXT URČENÝ STUDENTŮM UČITELSTVÍ MATEMATIKY

MGR. IRENA BUDÍNOVÁ, PH.D.

2013

1 Obsah

2 Polynomy

Cíle kapitoly

Prostudování této kapitoly vám umožní:

- Definovat polynom
- Dělit polynomy
- Hledat Taylorův rozvoj polynomu
- Určovat největší společný dělitel polynomů
- Hledat kořeny polynomu
- Využívat Vietovy vztahy k hledání kořenů polynomu

Doba potřebná k prostudování

Cca 3 hodiny

Průvodce studiem

Již ze střední školy znáte pojem polynomu. Polynom (neboli mnohočlen) byl chápán jako matematický výraz, který je zapsán jako součet několika jednočlenů. Jednočlen se skládá z několika částí – **koeficientu** (tím může být libovolné reálné číslo) a jedné (nebo více) **proměnných** s kladným celočíselným exponentem.

V kurzu matematické analýzy jste se s polynomem setkali jako se speciálním případem (reálných) funkcí (jedné reálné proměnné), to znamená jako se zobrazením z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel. Přitom se s těmito funkcemi velice příjemně pracuje pro jejich vlastnosti: jejich definiční obor je vždy celá množina reálných čísel, v této množině jsou všude spojité a mají derivace libovolného řádu, jimiž jsou opět polynomy, atd.

Již na základní škole jste se naučili sčítat polynomy a násobit polynomy. Na střední škole se znalosti rozšířily o dělení polynomů.

Z algebraického hlediska je zvláště zajímavé, že výsledkem sčítání a násobení polynomů jsou opět polynomy. Proto polynomy tvoří algebraickou strukturu se dvěma (binárními) operacemi.

Připomeňme tvar, ve kterém jste byli zvyklí polynom zapisovat. Libovolný polynom můžeme upravit na tvar

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in \boldsymbol{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \boldsymbol{R}$.

V tomto textu rozšíříme dále znalosti z oblasti polynomů o definice důležitých pojmů a o další možnosti práce s polynomy.

Budeme používat pojmů a znalostí, se kterými jste se setkali v předcházejících kurzech algebry. Věty budeme dokazovat v případech, že důkaz není příliš náročný a jsme si jisti, že student bude schopen sledovat linii důkazu. Konec důkazu bude standardně označen čtverečkem.

Při vytváření polynomů můžeme postupovat v podstatě dvojím způsobem. Můžeme je pojímat jako funkce, s čímž jste se setkali v matematické analýze. Polynom je zde chápán jako funkce jedné proměnné x, kterou na celém definičním oboru můžeme zapsat ve tvaru $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou konstanty. Tato definice říká, že každý polynom může být vyjádřen jako konečný součet jednočlenů ve tvaru $a_k x^k$, kde proměnná je umocněna na nezáporné celé číslo.

Můžeme však také vycházet z faktu, že polynom je určen svými koeficienty a že rovnost, sčítání i násobení polynomů lze popsat pomocí rovnosti či operací s jejich koeficienty. My využijeme druhého přístupu a budeme vycházet z algebraické definice polynomu.

2.1 Algebraická definice polynomů

Definice 1 **Polynomem** nad tělesem T[1] rozumíme posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ prvků tělesa T, v níž nejvýše konečně mnoho členů je nenulových. Množinu všech polynomů nad T označujeme T[x].

Polynom $\bar{o} = (0,0,\dots,0)$ nazýváme **nulovým polynomem**.

Poznámka: Např. polynom $5x^7 + 13x^6 - 2x^3 + 2$ můžeme ztotožnit s posloupností (2, 0, 0,-2 ,0 ,0 ,13 ,5).

---

[1] Číselným tělesem rozumíme uspořádanou trojici $(T,+,\cdot)$, kde T je podmnožina množiny komplexních čísel C taková, že $0 \in T, 1 \in T$ a platí:

$(\forall x, y \in T)(x + y \in T \wedge x.y \in T)$ (je uzavřená na sčítání a násobení),

$(\forall x \in T)(-1).x \in T$ (je uzavřená na opačné prvky),

$(\forall x \in T)(x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in T)$ (je uzavřená na převrácené hodnoty nenulových prvků).

Definice 2 Na množině T[x] definujeme pro $f = (a_{0,}a_1, \dots), g = (b_{0,}b_1, \dots) \in T[x]$:

1) $f = g \Leftrightarrow \forall k \in N_0 \colon a_k = b_k$
2) $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k, \dots), f + g \in T[x]$
3) $f \cdot g = (c_0, c_1, c_2, \dots)$, $f \cdot g \in T[x]$, kde $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, atd.

Poznámka: Např. polynomy $f = 2x^3 + x^2 - x + 3$ a $g = 3x^2 + 2x + 1$ násobíme takto:

$$\begin{aligned} f \cdot g = {} & 2x^3 \cdot 3x^2 + 2x^3 \cdot 2x + 2x^3 \cdot 1 + x^2 \cdot 3x^2 + x^2 \cdot 2x + x^2 \cdot 1 - x \cdot 3x^2 - x \cdot 2x \\ & - x \cdot 1 + 3 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 1 \\ & = 6x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x^3 - 2x^2 - x + 9x^2 + 6x + 3 \\ & = 6x^5 + 7x^4 + x^3 + 8x^2 + 5x + 3, \end{aligned}$$

tedy $c_0 = 3 = 3 \cdot 1, c_1 = 5 = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1$, atd. Polynom $f \cdot g$ můžeme zapsat ve tvaru $(3, 5, 8, 1, 7, 6)$.

Věta 1 $(T[x], +, .)$ je oborem integrity[2] pro každé těleso T.

Důkaz:

- Sčítání polynomů je komutativní, tj. $f + g = g + f$.
- Sčítání polynomů je asociativní, tj. $f + (g + h) = (f + g) + h$.
- Nulový prvek je nulový polynom.
- Opačný prvek k polynomu $f = (a_0, a_1, \dots)$ je polynom $-f = (-a_0, -a_1, \dots)$.
- Násobení polynomů je komutativní.
- Násobení polynomů je asociativní.
- Jedničkou je polynom $i = (1,0,0, \dots ,0)$.
- Dělitelé nuly: je zřejmé, že jestliže polynomy f a g jsou nenulové, pak také jejich součin je nenulový. □

Poznámka: Nyní ukážeme, jakým způsobem můžeme polynom zapsaný pomocí posloupnosti zaměnit za výraz, ne který jste zvyklí ze střední školy.

Polynom $f = (a, 0,0, \dots)$ ztotožníme s prvkem $a \in T$,

$$(\boldsymbol{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots) \equiv \boldsymbol{a}.$$

Dále polynom $(0,1,0,0, \dots)$ označíme jako x, $(0,0,1,0 \dots)$ jako x^2 atd. Platí

$$\begin{gathered} (a_0, a_2, \dots, a_k) = (a_0, 0,0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots) + \cdots + (0, \dots, a_k, 0, \dots) = \\ = a_0(1,0, \dots) + a_1(0,1,0, \dots) + a_2(0,0,1,0, \dots) + \cdots + a_k(0,0, \dots ,1,0, \dots) = \\ = \boldsymbol{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} + \cdots + \boldsymbol{a_k x^k}. \end{gathered}$$

[2] Připomeňme, že obor integrity je komutativní okruh s jedničkou bez dělitelů nuly.

Definice 3 Nechť $f \in T[\mathrm{x}]$. Pak definujeme **stupeň polynomu** ($st\ f$) takto: jestliže $f \neq \bar{o}$, $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, pak definujeme

$$st\ f = n.$$

Věta 2 Pro stupně polynomů $f, g \in T[x]$ platí:

1) $st(f + g) \leq max\{st\ f, st\ g\}$,
2) $st\ (fg) = st\ f + st\ g$

Důkaz: Důkaz první části je zřejmý, proto dokážeme část 2: $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$, $g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_l x^l$, $st\ f = k$, $st\ g = l$, $fg = a_0 b_0 + a_0 b_1 x + \cdots + a_k b_l x^{k+l}$ a je zřejmé, že součin $a_k b_l$ je nenulový. Proto stupeň polynomu fg je $k + l$. □

Poznámka: Budeme uvažovat polynomy $f = x^3 + 2x^2 + x + 1$, $g = -x^3 + x^2 - 1$, $st\ f = 3, st\ g = 3$, polynom $f + g = (1 - 1)x^3 + (2 + 1)x^2 + (1 + 0)x + 1 - 1 = 3x^2 + x$, $st(f + g) = 2$, $f \cdot g = -x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$, $st\ (f \cdot g) = 6$.

2.2 Dělení polynomů

Při dělení polynomů budeme využívat znalostí, které máme o dělení celých čísel. Jistě si vzpomenete na algoritmus, kterým se dělí např. pěticiferné číslo dvojciferným číslem. Velmi podobně budeme postupovat při dělení polynomů.

Stejně jako u dělení dvou celých čísel v oboru celých čísel můžeme dostat výsledek beze zbytku nebo se zbytkem, může i výsledkem dělení dvou polynomů být polynom beze zbytku, nebo tzv. částečný podíl a zbytek.

Poznámka: Připomeňme větu o dělení se zbytkem pro celá čísla:

Ke každé dvojici celých čísel $a, b \in Z$, kde $b \neq 0$, existuje právě jedna dvojice celých čísel $q, r \in Z$ tak, že platí:

1. $a = bq + r$,
2. $0 \leq r < |b|$.

Můžeme např. uvažovat čísla $a = 51, b = 5$. Víme, že $51 : 5 = 10 + \frac{1}{5}$, částečným podílem je tedy číslo 10 a zbytek 1. Tento fakt můžeme zapsat jako

$$51 = 5 \cdot 10 + 1.$$

Mohli bychom sice volit i zápis $51 = 5 \cdot 9 + 6$, ale v souladu s předchozí větou může být zbytek po dělení pěti 0, 1, 2, 3 nebo 4.

Analogická věta o dělení se zbytkem platí také pro polynomy. Dříve, než ji uvedeme, připomeňme algoritmus dělení dvou polynomů, známý ze střední školy.

Poznámka (algoritmus dělení dvou polynomů): Máme-li dělit dva polynomy f a g, nejdříve musíme zkontrolovat, zda jsou oba polynomy uspořádány sestupně podle mocniny x. Vydělíme první člen polynomu f prvním členem polynomu g, výsledkem je φ_1. Polynom φ_1 vynásobíme polynomem g a výsledný polynom $g\varphi_1$ odečteme od polynomu f. Polynom $f - g \cdot \varphi_1$ označíme jako f_1. Je-li $st\ f_1 \geq st\ g$, pokračujeme v dělení. První člen polynomu f_1 dělíme opět prvním členem polynomu g a postupujeme analogicky jako v předchozí části. Posloupnost kroků ilustrujeme na následujícím příkladě.

Příklad 1 Vydělte polynomy f, g, je-li $f = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 2$, $g = x^2 - 3x + 2$.

Řešení:

$$(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 2) : (x^2 - 3x + 2) = \underset{\varphi_1}{\overset{}{2x^2}} + \underset{\varphi_2}{3x} + \underset{\varphi_3}{6} + \frac{r}{g}$$

$g.\varphi_1$: $2x^4 - 6x^3 + 4x^2$

$f_1 = f - g.\varphi_1$: $3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$

$g.\varphi_2$: $3x^3 - 9x^2 + 6x$

$f_2 = f - g.\varphi_1 - g.\varphi_2$: $6x^2 - 11x + 2$

$g.\varphi_3$: $6x^2 - 18x + 12$

r: $7x - 10$

Výsledkem dělení je tedy částečný podíl $q(x) = 2x^2 + 3x + 6$ a zbytek $r(x) = 7x - 10$.

Věta 3 (O dělení se zbytkem) Ke každé dvojici polynomů $f, g \in T[x]$, kde $g \neq 0$, existuje právě jedna dvojice polynomů $q, r \in T[x]$ tak, že platí:

1) $f = g \cdot q + r$,
2) $st\ r < st\ g$.

Důkaz: Nejdříve dokážeme existenci polynomů q, r:

a) Když $st\ f < st\ g$, pak $q = 0, r = f$.
b) Když $st\ f \geq st\ g$, pak postupujeme podle algoritmu dělení.

$f - g \cdot \varphi_1 = f_{1,}\ st\ f_1 < st\ f$. Pokud $st\ f_1 \geq st\ g$, pak

$f_1 - g \cdot \varphi_2 = f_{2,}\ st\ f_2 < st\ f$,

$\vdots$

$f_{k-1} - g \cdot \varphi_k = f_{k,}\ st\ f_k < st\ g$.

Sečtením těchto rovnic dostáváme $f - g \cdot (\varphi_1 + \cdots + \varphi_k) = f_k$, a pokud označíme $(\varphi_1 + \cdots + \varphi_k) = q$ a $f_k = r$, dostáváme $f = g \cdot q + r$. Tím jsme dokázali první část věty.

Nyní dokážeme, že dvojice takových polynomů je skutečně právě jedna. Důkaz provedeme sporem, předpokládejme tedy, že by existovaly dvě různé dvojice těchto polynomů:

$$f = g \cdot q + r, st\, r < st\, g,\ \ f = g \cdot \bar{q} + \bar{r}, st\, \bar{r} < st\, g.$$

Odečtením dostáváme $0 = g \cdot (q - \bar{q}) + (r - \bar{r}) \Rightarrow \bar{r} - r = g(q - \bar{q})$. Potom je zřejmé, že $st\, g > st\, (\bar{r} - r) = st\, g + st\, (q - \bar{q})$ a protože $st\, g = st\, g$, musí být $q - \bar{q} = 0$, tedy $\bar{q} = q$ a z platnosti rovnice $\bar{r} - r = g(q - \bar{q})$ musí také platit $\bar{r} = r$. Dokázali jsme, že se jedná o tutéž dvojici polynomů, což je v rozporu s předpokladem. Důkaz je tedy proveden. ☐

Příklad 2 Řešte samostatně: Vypočítejte $q(x), r(x)$, je-li $f(x) = x^5 - x^3 + 3x - 5$,

a) $g(x) = x^2 + 7$,
b) $g(x) = x - 2$.

Výsledek: a) $q(x) = x^3 - 8x, r(x) = 59x - 5$, b) $q(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 15, r(x) = 25$.

2.3 Hornerovo schéma

Naším úkolem nyní bude určit hodnotu polynomu $5x^4 - 4x^3 + 7x^2 - x + 1$ v bodě $x = 4$. Jistě bychom 4 mohli dosadit za x, ale jsme líní umocňovat 4^4, proto potřebujeme jednodušší způsob, kde bychom pracovali s jednoduššími výrazy.

Budeme postupovat následujícím způsobem: Z prvních dvou členů polynomu vytkneme x^3 a dostaneme $(5x - 4)x^3$. Z tohoto nově vzniklého výrazu a třetího členu polynomu vytkneme x^2 a máme $[(5x - 4)x + 7]x^2$. Z tohoto výrazu a čtvrtého členu polynomu vytkneme x a dostaneme $\{[(5x - 4)x + 7]x + 1\}x$. Celkově tedy bude mít původní polynom tvar

$$\{[(5x - 4)x + 7]x + 1\}x + 1$$

a když nyní dosadíme 4 za x, dostaneme $\{[(16)4 + 7]4 + 1\}4 + 1 = 1141$.

Nyní provedeme zobecnění předchozího příkladu. Když $st\, f = n \geq 1, f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, c \in T, g = x - c$, pak existuje polynom q, $st\, q = n - 1, q = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$, $r = b_n$ a platí

$$\boldsymbol{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = (x - c)(b_0x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}) + b_n}.$$

Danou situaci zapisujeme do tabulky, kterou nazýváme **Hornerovo schéma**:

	a_0	a_1	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	$\cdots$	b_{n-1}	b_n

Když roznásobíme pravou stranu předcházející rovnice (proveďte sami roznásobení, abyste se o pravdivosti tvrzení přesvědčili), dostaneme:

$$a_0 = b_0$$
$$a_1 = b_1 - cb_0$$
$$a_2 = b_2 - cb_1$$
$$\vdots$$
$$a_n = b_n - cb_{n-1}$$

Nás zajímá číslo b_n, což je hodnota daného polynomu v bodě c. Proto si předchozí posloupnost přepíšeme jako

$$b_0 = a_0$$
$$b_1 = cb_0 + a_1$$
$$b_2 = cb_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{b_n = cb_{n-1} + a_n}.$$

Příklad 3 Určete hodnotu polynomu $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x - 16$ v bodě $x = 5$.

Řešení: Pomocí Hornerova schématu nalezneme hodnotu polynomu v daném bodě. Přitom S Hornerovým schématem pracujeme podle již uvedené posloupnosti

$$b_0 = a_0$$
$$b_1 = cb_0 + a_1$$
$$b_2 = cb_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$b_n = cb_{n-1} + a_n.$$

V našem případě si tedy do prvního řádku tabulky sepíšeme koeficienty polynomu, do prvního sloupce si napíšeme hodnotu $x = 5$. Do druhého řádku opíšeme první koeficient $b_0 = a_0 = 1$ a dále počítáme: $5 \cdot 1 - 3 = 2$; $5 \cdot 2 + 2 = 12$; $5 \cdot 12 - 2 = 58$; $5 \cdot 58 + 16 = 274$.

	1	-3	2	-2	16
5	1	2	12	58	274

Zjistili jsme tedy, že hodnota polynomu v bodě 5 je 274. Výsledek tabulky však můžeme interpretovat ještě jiným způsobem. Pokud dělíme polynom $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x - 16$ polynomem $x - 5$, dostaneme částečný podíl $q(x) = x^3 + 2x^2 + 12x + 58$ a zbytek $r(x) = 274$. O tomto faktu se můžete přesvědčit dělením. Výsledek můžeme zapsat jako $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x - 16 = (x^3 + 2x^2 + 12x + 58)(x - 5) + 274$.

Hornerovo schéma tedy můžeme používat k jednoduchému dělení polynomu lineárním polynomem, jak ukážeme v následujícím příkladě.

Příklad 4 Polynomy z Příkladu 2 b) dělte pomocí Hornerova schématu.

Řešení:

	1	0	-1	0	3	-5
2	1	2	3	6	15	25

Výsledek je $q(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 15,\ r(x) = 25$.

Příklad 5 Řešte samostatně: Nalezněte hodnotu polynomu $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7$ v bodě $x = 6$. Zapište ve tvaru $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$.

Výsledek: $f(6) = 6977,\ x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7 = (x^4 + 6x^3 + 32x^2 + 194x + 1164)(x - 6) + 6977$

2.4 Využití Hornerova schématu pro nalezení Taylorova rozvoje polynomu

Jistě si vzpomenete na Taylorův polynom, pomocí něhož jste v matematické analýze mohli v okolí určitého bodu nahrazovat některé funkce. Připomeňme Taylorovu větu, která říká, že jestliže má funkce $f(x)$ v okolí bodu a derivace do $(n+1)$-ního řádu, můžeme ji v okolí bodu a vyjádřit jako

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R,$$

kde $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ je Taylorův polynom a R je zbytek po Taylorově polynomu. Tímto způsobem je možno určit přibližnou hodnotu dané funkce v bodě a.

V případě, že funkce $f(x)$ je polynom, existuje mnohem jednodušší způsob, jak najít Taylorův polynom, a to pomocí Hornerova schématu.

Definice 4 Nechť $f \in T[x]$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $st\, f = n$, $c, c_1, \dots, c_n \in T$. Pak je-li

$$f = d_0 + d_1(x-c) + d_2(x-c)^2 \dots + d_n(x-c)^n,$$

kde $d_0, \dots, d_n \in T$, pak výraz na pravé straně nazýváme **Taylorovým rozvojem (polynomem) o středu c**.

Věta 4 Ke každému $c \in T, f \in T[x]$ existuje Taylorův rozvoj polynomu f o středu c.

Důkaz: Jestliže $st\, f = 0$, pak $f = d_0$. Jestliže $st\, f \geq 1$, pak polynom f vydělíme výrazem $(x-c)$ a dostaneme

$$f = (x-c)f_1 + d_0, st\, f_1 = n-1$$
$$f_1 = (x-c)f_2 + d_1, st\, f_2 = n-2$$
$$\vdots$$
$$f_{n-1} = (x-c)f_n + d_{n-1}, st\, f_n = n-n = 0$$

to znamená, že polynom f_n je konstantní. Když nyní polynom f necháme beze změny, polynom f_1 vynásobíme výrazem $(x-c)$, polynom f_2 výrazem $(x-c)^2$, atd., až polynom f_n výrazem $(x-c)^n$ a všechny takto vzniklé polynomy sečteme, dostáváme již Taylorův polynom o středu c, tj.

$$f = d_0 + d_1(x-c) + d_2(x-c)^2 \dots + d_n(x-c)^n. \square$$

Příklad 6 Pro polynom $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ nalezněte pomocí Hornerova schématu Taylorův polynom o středu c.

Řešení: Polynom f máme upravovat následujícím způsobem: $f = (x-c)f_1 + d_0 = (x-c)[(x-c)f_2 + d_1] + d_0 = \cdots$. Do prvního řádku tabulky napíšeme koeficienty polynomu, do prvního sloupce píšeme střed c. V prvním kroku postupujeme tak, jak jsme v Hornerově schématu postupovali výše. Poslední číslo v druhém řádku je d_0. V druhém kroku již nepracujeme s koeficienty původního polynomu, ale s koeficienty polynomu f_1, tj. s čísly z druhého řádku. Končíme o sloupec dřív a poslední číslo je d_1. Takto pokračujeme dál. Tabulka má následující tvar:

	a_0	a_1	$\dots$		a_n
c	a_0	$\dots$			$\boldsymbol{d_0}$
c	a_0			$\boldsymbol{d_1}$	
c	a_0		$\boldsymbol{d_2}$		
c	$\vdots$				
c	$\boldsymbol{d_n}$				

Čísla $d_0, \dots, d_n$ jsou hledané koeficienty Taylorova polynomu.

Příklad 7 Pro polynom $f(x) = x^5$ nalezněte Taylorův polynom o středu $c = 1$.

Řešení:

	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	2	3	4	**5**	
1	1	3	6	**10**		
1	1	4	**10**			
1	1	**5**				
1	**1**					

Dostáváme tedy

$$x^5 = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$$

Poznámka: Všimněte si podobnosti koeficientů Taylorova polynomu v předcházejícím příkladu s Pascalovým koeficientem:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Vyzkoušejte, zda také polynomy x^3 nebo x^6 mají koeficienty v Taylorovu polynomu o středu $c = 1$ shodné s koeficienty z Pascalova trojúhelníku. Dále vyzkoušejte, jak vypadají Taylorovy polynomy o jiných středech, např. $c = -1$, $c = 2$, apod.

Příklad 8 Řešte samostatně: Pro polynom $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ nalezněte Taylorův polynom o středu $c = 2$.

Výsledek: $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90 = 38 - 18(x-2) + (x-2)^4$.

Definice 5 Nechť $f \in T[x]$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $st\, f = n$, $c, c_1, \dots, c_n \in T$. Je-li

$$f = d_0 + d_1(x-c_1) + d_2(x-c_1)(x-c_2) \dots + d_n(x-c_1)(x-c_2) \dots (x-c_n),$$

pak pravou stranu nazýváme **Gaussovým interpolačním polynomem**.

Věta 5 Nechť $f \in T[x], st\, f = n \geq 1, c_1, c_2, \dots, c_n \in T$. Pak existují čísla $d_1, d_2, \dots, d_n \in T$ tak, že $f = d_0 + d_1(x - c_1) + d_2(x - c_1)(x - c_2) + \cdots + d_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$. Polynom f lze tedy zapsat ve tvaru Gaussova interpolačního polynomu při zvolených číslech $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Důkaz: Polynom f dělíme výrazem $(x - c_1)$, dále výrazem $(x - c_2)$, atd. Dostáváme:

$$\begin{array}{c|c} f = (x - c_1)f_1 + d_0 & .\,1 \\ f_1 = (x - c_2)f_2 + d_1 & .\,(x - c_1) \\ \vdots & \\ f_{n-1} = (x - c_n)f_n + d_{n-1} & .\,(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_{n-1}) \\ f_n = d_n & .\,(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n) \end{array}$$

Získané polynomy zpětně roznásobíme výrazy uvedenými za čarou a posčítáme, dostáváme $f = d_0 + d_1(x - c_1) + d_2(x - c_1)(x - c_2) + \cdots + d_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$. □

Příklad 9 Napište polynom $f = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 7x - 9$ ve tvaru Gaussova interpolačního polynomu, je-li $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = -3, c_4 = 2, c_5 = -1$.

Řešení: Budeme postupovat obdobně jako při hledání Taylorova polynomu pomocí Hornerova schématu. Do levého sloupce budeme postupně psát hodnoty $c_1, \dots, c_5$.

	2	-3	-5	2	7	-9
1	2	-1	-6	-4	3	**-6**
2	2	3	0	-4	**-5**	
-3	2	-3	9	**-31**		
2	2	1	**11**			
-1	2	**-1**				
	2					

Tvar polynomu tedy je

$$f = -6 - 5(x - 1) - 31(x - 1)(x - 2) + 11(x - 1)(x - 2)(x + 3) - (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x - 2) + 2(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x - 2)(x + 1).$$

Poznámka: Gaussova interpolačního polynomu je možno využít k nalezení polynomu n-tého řádu, který je dán hodnotami v $n + 1$ bodech, jak ukážeme v následujícím příkladě.

Pouze připomeňme, že dvěma body je jednoznačně zadána přímka, třemi body parabola, atd. Pro nalezení polynomu prvního stupně proto potřebujeme hodnoty dvou bodů, polynomu druhého stupně hodnoty tří bodů, obecně pro nalezení polynomu $(n+1)$-ního stupně n bodů.

Příklad 10 Najděte polynom $f \in R[x]^3$ takový, že $f(-2) = 3, f(-1) = 1, f(2) = -2, f(3) = 5$.

Řešení: Je zřejmé, že hledaný polynom bude třetího stupně. Napíšeme si jej tedy ve tvaru Gaussova interpolačního polynomu, kde za hodnoty c_1, c_2, c_3 budeme volit hodnoty nezávisle proměnné $-2; -1; 2,$[4] tedy $f = d_0 + d_1(x+2) + d_2(x+2)(x+1) + d_3(x+2)(x+1)(x-2)$.

Do tohoto tvaru polynomu dosadíme za x hodnotu $c_1 = -2$ a protože podle zadání je $f(-2) = 3$, místo f píšeme 3, tedy $3 = d_0 + d_1(-2+2) + d_2(-2+2)(-2+1) + d_3(-2+2)(-2+1)(-2-2)$ a zjišťujeme, že $d_0 = 3$.

Obdobně pokračujeme pro $c_2 = -1$, $f(-1) = 1$, po úpravě dostaneme $1 = 3 + d_1(-1+2)$ a tedy $d_1 = -2$.

Dále za x volíme $c_3 = 2, f(2) = -2$, vyjde $d_2 = \frac{1}{4}$. Nakonec $c_4 = 3, f(3) = 5$, výsledek $d_3 = \frac{7}{20}$.

Polynom má tedy tvar $f = 3 - 2(x+2) + \frac{1}{4}(x+2)(x+1) + \frac{7}{20}(x+2)(x+$ *1(x−2)*. Po roznásobení dostáváme

$$f = \frac{7}{20}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{53}{20}x - \frac{19}{10}.$$

Sami nyní proveďte zkoušku, zda hodnoty ze zadání odpovídají nalezenému polynomu.

Příklad 11 Řešte samostatně: Pomocí Gaussova interpolačního polynomu najděte polynom $f \in R[x]$ takový, že

a) $f(2) = 2, f(-2) = -4$,

b) $f(-1) = \frac{9}{2}, f(0) = 4, f(2) = 12$.

Výsledek: a) $f = \frac{3}{2}x - 1$, b) $f = 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

Definice 6 Nechť $f \in T[x]$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $st\, f = n$, $c, c_1, \ldots, c_n \in T$. Je-li $f = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + \cdots + L_n(x)y_n$, kde $y_1, \ldots, y_n \in T$,

$$L_1(x) = \frac{(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)}{(c_1-c_2)(c_1-c_3)\ldots(c_1-c_n)},$$

[3] Symbolem $R[x]$ značíme množinu všech polynomů nad tělesem reálných čísel.
[4] Můžeme volit libovolné tři hodnoty nezávisle proměnné v libovolném pořadí, v dalším postupu musíme ale tuto volbu respektovat a dosazovat příslušné funkční hodnoty za f.

$$\vdots$$
$$L_n(x) = \frac{(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_{n-1})}{(c_n - c_1)(c_n - c_2) \dots (c_n - c_{n-1})}.$$

Pokud $c_i \neq c_j$ pro $i \neq j$, pak pravou stranu nazýváme **Lagrangeovým interpolačním polynomem.**

Poznámka: Pomocí Lagrangeova polynomu můžeme obdobně jako v případě Gaussova polynomu najít polynom procházející danými body na určitém intervalu.

Příklad 12 Pomocí Lagrangeova polynomu najděte polynom, který prochází body $[-1; 9], [1; 1], [2; 6]$.

Řešení: Polynom bude mít tvar $f = 9L_1(x) + L_2(x) + 6L_3(x)$, kde

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2),$$
$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2),$$
$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x^2 - 1).$$

Po dosazení $f = \frac{9}{6}(x^2 - 3x + 2) - \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) + \frac{6}{3}(x^2 - 1) = 3x^2 - 4x + 2$. Sami ověřte, že polynom vyhovuje požadavkům zadání.

Příklad 13 Řešte samostatně: Pomocí Lagrangeova polynomu řešte Příklad 11.

Příklad 14 Řešte samostatně: Pomocí Lagrangeova polynomu nalezněte polynom, který prochází body $[-1; 0], [0; 1], [1; 3], [2; -2]$.

Výsledek: $f = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$

2.5 Dělitelnost polynomů

Definice 7 Nechť $f, g \in T[x]$. Říkáme, že **polynom g dělí polynom f**, právě když existuje takový polynom $h \in T[x]$, že platí $f = g.h$. Píšeme pak $g \mid f$.

Věta 6 (Základní vlastnosti dělitelnosti polynomů)

Nechť $f, g \in T[x]$, $f \neq 0, g \neq 0$. Pak platí:

1) $f \mid f$

2) Pro všechna $u, v \in T[x]$ a všechna $f_1, f_2 \in T[x]$ platí: Jestliže $g|f_1$ a zároveň $g|f_2$, pak také $g|(f_1u + f_2v)$.
3) Nechť $h \in T[x]$, pak platí: Jestliže $h|g$ a zároveň $g|f$, pak také $h|f$.
4) $g|f \Rightarrow st\ g \leq st\ f$
5) $g|f$ a zároveň $f|g$ právě tehdy, když existuje takový nenulový prvek $c \in T$, že platí $g = cf$.

Důkaz:

Ad 1) $f = 1.f = f.1$

Ad 2) $g|f_1 \Rightarrow \exists h_1 \in T(x)$: $f_1 = g.h_1$, $g|f_2 \Rightarrow \exists h_2 \in T(x)$: $f_2 = g.h_2$. Potom $f_1.u + f_2.v = g.h_1.u + g.h_2.v = g.(h_1u + h_2v)$, pokud nyní označíme $h_1u + h_2v = h$, $h \in T[x]$, pak dostáváme $f_1.u + f_2.v = h$.

Ad 3) Jestliže $h|g$, potom $g = h\varphi_1$, obdobně jestliže $g|f$, potom $f = g\varphi_2$. Tedy $f = g\varphi_2 = (h\varphi_1)\varphi_2 = h(\varphi_1\varphi_2)$, kde $\varphi_1\varphi_2 \in T(x)$. Proto $h|f$.

Ad 4) Jestliže $g|f$, potom $f = g.h$. Pro stupně těchto polynomů platí $st\ f = st\ g + st\ h$, kde $st\ f \neq -\infty$, $st\ g \neq -\infty$, $st\ h \geq 0$, tedy $st\ f \geq st\ g$.

Ad 5) Jestliže $g|f$ a zároveň $f|g$, pak $f = g\varphi_1$ a zároveň $g = f\varphi_2$, potom z předchozí části důkazu víme, že $st\ g \leq st\ f$ a zároveň $st\ f \leq st\ g$, neboli $st\ f = st\ g$. Protože $st\ g = st\ f + st\ \varphi_2$, musí být $st\ \varphi_2 = 0$, neboli φ_2 je nenulová konstanta $c \in T$. ☐

Definice 8 Říkáme, že polynom $h \in T[x]$ je **společným dělitelem** polynomů $f, g \in T[x]$ právě tehdy, když platí $h|g$ a zároveň $h|f$.

Definice 9 Nechť $f, g, d \in T[x]$. Říkáme, že polynom d je **největším společným dělitelem** polynomů f, g, právě když platí:

1. $d|f \wedge d|g$,
2. Pro všechny polynomy $h \in T[x]$ platí: jestliže $h|f$ a zároveň $h|g$, pak $h|d$.

Poznámka: Největší společný dělitel je tedy ten společný dělitel dvou polynomů, který je dělitelný všemi společnými děliteli.

Poznámka: Nyní uvedeme posloupnost rovnic, která se nazývá Eukleidův algoritmus pro polynomy a je možné pomocí něj najít největší společný dělitel dvou polynomů. Dříve jste se seznámili s Eukleidovým algoritmem pro hledání největšího společného dělitele dvou celých čísel, jehož princip je obdobný a který nyní připomeneme na příkladu.

Příklad 15 Metodou Eukleidova algoritmu nalezněte největší společný dělitel čísel 450 a 294.

$$450 = 294 \cdot 1 + 156$$

$$294 = 156 \cdot 1 + 138$$
$$156 = 138 \cdot 1 + 18$$
$$138 = 18 \cdot 7 + 12$$
$$18 = 12 \cdot 1 + 6$$
$$12 = 6 \cdot 1 + 0$$

Největší společný dělitel dvou čísel je poslední nenulový zbytek v Eukleidově algoritmu, tedy $D(450, 294) = 6$.

Eukleidův algoritmus pro polynomy:

Nechť $f, g \in T[x], st\, f \geq st\, g, g \neq 0$. Vydělíme polynom f polynomem g a v dalších krocích vždy dělitele z předchozího kroku vydělíme zbytkem, a to tak dlouho, dokud po dělení nedostaneme nulový zbytek.

$$\begin{aligned}
f &= g.q_1 + r_1, st\, r_1 < st\, g, r_1 \neq 0 \\
g &= r_1.q_2 + r_2, st\, r_2 < st\, r_1, r_2 \neq 0 \\
r_1 &= r_2.q_3 + r_3, st\, r_3 < st\, r_2, r_3 \neq 0 \\
&\vdots \\
r_{k-2} &= r_{k-1}.q_k + \boldsymbol{r_k}, r_k \neq 0 \\
r_{k-1} &= r_k.q_{k+1} + 0
\end{aligned}$$

Věta 7 Pro každé dva polynomy $f, g \in T[x], g \neq 0$ existuje největší společný dělitel. Jedním z těchto největších společných dělitelů je poslední nenulový zbytek v Eukleidově algoritmu pro polynomy f a g.

Důkaz: Z poslední rovnice je zřejmé, že $r_k | r_{k-1}$, potom z předposlední rovnice $r_k | r_{k-2}$, atd. až z druhé rovnice $r_k | g$ a z první rovnice $r_k | f$, tedy r_k je společný dělitel obou polynomů f, g.

Nyní musíme dokázat, že každý společný dělitel polynomů f, g dělí r_k. Jestliže h je společný dělitel obou polynomů, pak z první rovnice je zřejmé, že $h | r_1$, z druhé rovnice, že $h | r_2$, atd. až z poslední, že $h | r_k$. $\square$

Poznámka: Podle předchozí věty největší společný dělitel neexistuje pouze v případě, že $f = g = 0$.

Poznámka: Jestliže d_1, d_2 jsou dva různí největší společní dělitelé polynomů f, g, pak podle vlastnosti 2) z Věty 6 platí $d_1 | d_2 \wedge d_2 | d_1$ a podle vlastnosti 5) existuje takové nenulové číslo $c \in T$, že $d_2 = c.d_1$.

Rovněž platí, že je-li d_1 největší společný dělitel dvou polynomů, pak $d_2 = c.d_1$ je také jejich největší společný dělitel.

Věta 8 Jestliže $d \in T[x]$ je největší společný dělitel polynomů $f, g \in T[x]$, pak množina $\{cd | d \in T, c \neq 0\}$ je **množina všech největších společných dělitelů** polynomů f, g. Řekneme, že tito společní dělitelé jsou spolu **asociovaní**.

Mezi největšími společnými děliteli polynomů f, g je právě jeden, který má u největší mocniny koeficient 1. Tento polynom budeme nazývat **normovaný největší společný dělitel** a budeme ho značit symbolem $NSD(f, g)$.

Příklad 16 Hledejte nad $Q[x]$ největšího společného dělitele polynomů $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 6$, $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 2$.

Řešení: Použijeme Eukleidův algoritmus. Vzhledem k tomu, že $NSD(f, g)$ se nezmění, pracujeme-li místo s f, g s polynomy s nimi asociovanými, vynásobíme nejprve f číslem 2 a pak provedeme dělení.

$$(2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 14x - 12) : (2x^3 - 4x^2 - x + 2) = x + \frac{-3x^2 + 12x - 12}{2x^3 - 4x^2 - x + 2},$$

tedy $q_1(x) = x, r_1(x) = -3x^2 + 12x - 12$. Polynom $r_1(x)$ změníme normováním na polynom $x^2 - 4x + 3$ a dále dělíme polynomy $g(x)$ a $r_1(x)$.

$$(2x^3 - 4x^2 - x + 2) : (\,x^2 - 4x + 4) = 2x + 4 + \frac{7x - 14}{x^2 - 4x + 3},$$

takže $q_2(x) 2x + 4, r_2(x) = 7x - 14$. Polynom $r_2(x)$ opět nahradíme polynomem normovaným a provedeme další dělení. Dostáváme

$$(x^2 - 4x + 4) : (x - 2) = x - 2,$$

tj. $q_3(x) = x - 2, r_3(x) = 0$. Tedy $NSD(f, g) = r_2(x) = x - 2$. Nalezený největší společný dělitel je skutečně nad tělesem komplexních čísel, což byl požadavek zadání.

Poznámka: Najít největší společný dělitel dvou polynomů je v některých případech možné i pomocí rozkladu obou polynomů. Za tímto účelem je potřeba si zopakovat si některé základní rozklady:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,

apod.

Definice 10 Říkáme, že polynom $f \in T[x]$ je **ireducibilní**[5] nad tělesem T, právě když $st\ f \geq 1$ a neexistují polynomy $g, h \in T[x]$ tak, aby $f = g.h, st\ g \geq 1, st\ h \geq 1$.

Definice 11 Říkáme, že polynom $f \in T[x]$ je **reducibilní** nad tělesem T, právě existují polynomy $g, h \in T[x]$ tak, že platí $f = g.h, st\ g \geq 1, st\ h \geq 1$.

Poznámka: Ireducibilní polynomy mají v oboru integrity $T[x]$ analogickou roli jako prvočísla v okruhu Z.

Věta 9 Ke každému nekonstantnímu polynomu $f \in T[x]$ existuje číslo $a \in T$ a existují ireducibilní polynomy $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in T[x]$ nad T tak, že platí

$$f = a\varphi_1 \dots \varphi_k,$$

kde φ_i, $i = 1, \dots, k$ jsou normované polynomy. Tento rozklad je jednoznačný až na pořadí polynomů $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

Větu bychom mohli formulovat i jiným způsobem: Každý nekonstantní polynom f lze nad tělesem T rozložit na součin konstanty a normovaných ireducibilních polynomů.

Důkaz: Nechť $f \in T[x]$.

- f je ireducibilní polynom nad T, pak jej normováním upravíme na tvar $f = a\varphi_1$.
- f je reducibilní polynom. Potom můžeme najít jeho rozklad polynomů ireducibilních nad T: $f = \psi_1 \dots \psi_k$. Pokud tyto polynomy upravíme na normované, dostáváme $f = a\varphi_1 \dots \varphi_k$.

Nyní je ještě třeba dokázat jednoznačnost nalezeného rozkladu. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme tedy, že existují dva různé rozklady polynomu f:

$$f = a\varphi_1 \dots \varphi_k = c\chi_1 \dots \chi_k$$

Polynomy φ_i, χ_i jsou ireducibilní nad T. Jestliže polynom φ_1 dělí polynom f, pak musí platit také $\varphi_i | (\chi_1 \dots \chi_k)$. Potom buď $\varphi_1 = \chi_1$, nebo polynomy φ_1, χ_1 jsou nesoudělné. Pokud nastane případ, že jsou nesoudělné, pak mezi polynomy $\chi_2, \dots, \chi_k$ musí být takový polynom, že je roven polynomu φ_1. Analogicky bychom uvažovali pro ostatní polynomy $\varphi_2, \dots, \varphi_k$. Docházíme tedy ke sporu s předpokladem, že rozklady jsou různé. □

Poznámka: Když v rozkladu vynásobíme stejné ireducibilní polynomy, pak

$$f = a\varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_r^{\alpha_r}, \alpha_i \in N.$$

Tento rozklad se nazývá **kanonický rozklad**.

[5] Ireducibilní znamená nerozložitelný na součin nekonstantních polynomů.

Analogii můžeme hledat v okruhu celých čísel. V další úvaze budeme pracovat s přirozenými čísly, celé číslo bychom z přirozeného získali eventuelním vynásobením znaménkem minus. Každé přirozené číslo n větší než 1 můžeme rozložit na součin prvočísel, $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, resp.

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}.$$

Např. číslo 20 580 můžeme napsat kanonickým rozkladem jako $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Věta 10 Nad tělesem komplexních čísel jsou ireducibilní polynomy právě všechny polynomy 1. stupně. Všechny polynomy stupně většího než 1 jsou reducibilní.

Věta 11 Ireducibilními polynomy nad tělesem reálných čísel jsou právě všechny polynomy 1. stupně a ty polynomy 2. stupně, které mají záporný diskriminant.

Věta 12 Ke každému $n \in N$ existuje polynom $f \in Q[x], st\, f = n$ tak, že f je ireducibilní nad tělesem Q.

Příklad 17 Najděte rozklady následujících polynomů nad $Q[x], R[x], C[x]$.

a) $x^2 + x + 1$,
b) $2x^3 + 2x^2 + x + 1$,
c) $x^4 + x^3 + x + 1$,
d) $x^6 - 2$.

Řešení:

a) Polynom můžeme rozložit způsobem známým ze střední školy, tj.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Vidíme tedy, že nad $Q[x]$ i $R[x]$ je polynom ireducibilní, nad $C[x]$ je jeho rozklad $\left(x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) $2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 2x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(2x^2+1)$, což je rozklad v $Q[x]$ i $R[x]$. V $C[x]$ můžeme dále pokračovat úpravou $(x+1)(2x^2+1) = (x+1)(2x^2 - i^2) = (x+1)\left(\sqrt{2}x - i\right)(\sqrt{2}x + i)$.

c) $x^4 + x^3 + x + 1 = x^3(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^3+1) = (x+1)(x+1)(x^2 - x + 1) = (x+1)^2(x^2 - x + 1)$, což je rozklad v $Q[x]$ i $R[x]$. V $C[x]$ rozložíme poslední závorku jako v části a) a dostáváme $(x+1)^2\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) $x^6 - 2 = (x^3 - \sqrt{2})(x^3 + \sqrt{2})$. Vidíme tedy, že polynom je nad $Q[x]$ ireducibilní. V $R[x]$ lze dále pokračovat, $(x^3 - \sqrt{2})(x^3 + \sqrt{2}) = \left(x - \sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{\sqrt{2}}x +\right.$

$\sqrt[3]{2}\big)\left(x+\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)\left(x^2-\sqrt[3]{\sqrt{2}}x+\sqrt[3]{2}\right)$. V $C[x]$ je polynom dále rozložitelný, my tak ale vzhledem ke tvaru výrazu neučiníme.

Příklad 18 Najděte největší společný dělitel polynomů f, g, je-li $f = x^4 - 2x^2 + 1$, $g = x^3 + 3x^2 - x - 3$

a) pomocí Eukleidova algoritmu,

b) rozkladem.

Řešení:

a) $(x^4 - 2x^2 + 1) : (x^3 + 3x^2 - x - 3) = x - 3 + \frac{8x^2-8}{x^3+3x^2-x-3}$.

Nyní zbytek $8x^2 - 8$ upravíme na normovaný polynom $x^2 - 1$ a pokračujeme v algoritmu.

$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x^2 - 1) = x + 3$ zb. 0.

Poslední nenulový zbytek je $8x^2 - 8$, což je jeden z největších společných dělitelů a $NSD(f, g) = x^2 - 1$.

b) V některých případech je možno polynomy f, g rozložit a tím najít společné dělitele a také největší společný dělitel.

$f = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$,

$g = x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^3 - x + 3x^2 - 3 = x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) =$
$(x^2 - 1)(x + 3) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$,

$NSD(f, g) = (x - 1)(x + 1) = (x^2 - 1)$.

Příklad 19 Řešte samostatně: Pomocí Eukleidova algoritmu nalezněte $NSD(f, g)$, je-li $f = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $g = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$.

Výsledek: $NSD(f, g) = x^2 + x + 1$

Definice 12 Říkáme, že polynomy $f, g \in T(x)$ jsou **nesoudělné**, právě když $NSD(f, g) = 1$.

Věta 13 Nechť $f, g \in T[x], g \neq 0$. Pak existují $u, v \in T[x]$ tak, že $fu + gv = NSD(f, g)$.

Je-li navíc $st\ f \geq 1, st\ g \geq 1$, pak lze najít polynomy $u, v \in T(x)$ tak, že $st\ u < st\ g \wedge st\ v < st\ f$.

Příklad 20 Pomocí Eukleidova algoritmu určete polynomy u, v tak, aby $NSD(f, g) = fu + gv$, je-li $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.

Řešení: Nejdříve najdeme $NSD(f,g)$.

$$(x^4+2x^3-x^2-4x-2):(x^4+x^3-x^2-2x-2)=1+\frac{x^3-2x}{x^4+x^3-x^2-2x-2}$$

a tento výsledek si zapíšeme ve tvaru

$$f=g\cdot q_1+r_1, q_1=1, r_1=x^3-2x.$$

Pokračujeme v dělení,

$$(x^4+x^3-x^2-2x-2):(x^3-2x)=x+1+\frac{x^2-2}{x^3-2x},$$

opět přepíšeme do tvaru

$$g=r_1q_2+r_2, q_2=x+1, r_2=x^2-2.$$

Protože $x^3-2x=x(x^2-2)$, je posledním nenulovým zbytkem polynom r_2 a tedy $NSD(f,g)=x^2-2$.

Jestliže nyní chceme najít hledaný tvar největšího společného dělitele $r_2=fu+gv$, budeme postupovat nazpět v posloupnosti rovnic

$$f=g\cdot q_1+r_1$$
$$g=r_1q_2+r_2.$$

Z druhé rovnice vyjádříme $r_2=g-r_1q_2$, kam za r_1 dosadíme z první rovnice a máme

$$r_2=g-(f-gq_1)q_2=(-q_2)f+(1+q_1q_2)g,$$

odkud je již zřejmé, že $u=-q_2=-x-1$, $v=1+q_1q_2=x+2$.

Celkově

$$x^2-2=(-x-1)(x^4+2x^3-x^2-4x-2)+(x+2)(x^4+x^3-x^2-2x-2).$$

Roznásobením pravé strany rovnice proveďte zkoušku správnosti.

Poznámka: Jestliže hledáme největší společný dělitel polynomů ve tvaru $fu+gv$ pomocí Eukleidova algoritmu, není možné polynomy normovat nebo v rámci zjednodušení používat asociované polynomy.

Věta 14 Nechť $f,g,h\in T[x]$. Pak platí:

1) Jestliže $f|gh$ a zároveň $NSD(f,g)=1$, pak $f|h$.
2) Jestliže $f|h$, $g|h$ a $NSD(f,g)=1$, pak $(fg)|h$.

Důkaz: Ad 1: Z předcházející věty víme, že existují polynomy $u,v\in T[x]$ takové, že $fu+gv=NSD(f,g)$, tedy podle předpokladu

$$fu+gv=1.$$

Pokud tuto rovnici vynásobíme polynomem h, pak dostaneme

$$fhu+ghv=h.$$

Je zřejmé, že $f|f$, dále z předpokladu $f|gh$, proto z předcházející rovnice musí také platit $f|h$.

Ad 2: Jestliže $f|h$, pak existuje $h_1 \in T[x]$ takové, že $h = fh_1$. Protože z předpokladu také $g|h$, platí po dosazení za h z předchozího kroku $g|fh_1$. Dále z předpokladu platí $NSD(f,g) = 1$, můžeme proto využít první část věty a dostáváme

$$g|h_1 \Rightarrow \exists h_2 \in T[x]: h_1 = gh_1 \Rightarrow h = fgh_2 \Rightarrow (fg)|h \quad \square$$

Úlohy k procvičení

1. Definujte polynom pomocí algebraické definice. Ukažte, jakým způsobem lze od takto definovaného polynomu přejít ke tvaru polynomu, který znáte ze střední školy.
2. Vyslovte větu o dělení se zbytkem pro polynomy.
3. Definujte Taylorův polynom.
4. Popište Eukleidův algoritmus pro dělení polynomů.
5. Definujte společný dělitel dvou polynomů a největší společný dělitel dvou polynomů.
6. Student, který počítal hodnotu polynomu, mačkal následující tlačítka na kalkulačce:
$$7 \times 6 = \times 6 = -2 = \times 6 = -3 = \times 6 = +1 = \times 6 = +2 = \times 6 =$$
Určete polynom, který student vyhodnocoval a hodnotu x.
7. Ověřte, že platí $t^4 + t^2 - 3t + 7 = (t^3 + 3t^2 + 10t + 27)(t - 3) + 88$. Sestavte Hornerovo schéma, které odpovídá dané rovnici.
8. Dělte polynom $-5x^4 + 4x^2 - 3x + 4$ polynomem $x^3 + 2x^2 - 4$.
9. Nalezněte polynom, který prochází body $[-1; -7], [0; -3], [1; -1], [2; 11]$.
10. Najděte největší společný dělitel polynomů $f = x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1$, $g = x^3 - x^2 - x + 1$ pomocí Eukleidova algoritmu a pomocí rozkladu.

Výsledky:

6. $7x^6 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x$, $c = 6$
7.

	1	0	1	-3	7
3	1	3	10	27	88

8. $-5x + 10 + \frac{-16x^2 - 23x + 44}{x^3 + 2x^2 - 4}$
9. $2x^3 - x^2 + x - 3$
10. $x^2 - 1$

3 Algebraické rovnice

Cíle kapitoly

Prostudování této kapitoly vám umožní:

- Definovat algebraickou rovnici
- Hledat kořeny polynomu
- Zopakovat si řešení lineární a kvadratické rovnice
- Seznámit se s obecným řešením rovnice 3. stupně
- Připomenout řešení binomické a reciproké rovnice

Doba potřebná k prostudování

Cca 3 hodiny

Průvodce studiem

Definice 13 Algebraickou rovnicí budeme rozumět rovnici tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots a_1 x + a_0 = 0 \,,$$

kde $a_i \in \boldsymbol{R}$ pro $i = 0, 1, \dots, n$.

Poznámka: Řešit algebraickou rovnici znamená hledat kořeny polynomu na levé straně rovnice. V další části budeme ukazovat hledání řešení některých typů algebraických rovnic, ale také algebraických nerovnic.

Budeme se zabývat výhradně rovnicemi, jejichž koeficienty jsou reálná čísla. Existují také rovnice s komplexními koeficienty, tj. jde o rovnice, na jejichž levé straně je polynom nad tělesem komplexních čísel. Protože se však s takovými polynomy v běžné praxi obvykle nesetkáte, omezíme se na polynomy nad tělesem reálných čísel.

Připomeňme však, že polynom s reálnými koeficienty může mít reálné i komplexní kořeny.

3.1 Kořeny polynomu

Definice 14 Číslo $c \in T$ nazýváme **kořen polynomu** $f \in T[x]$, právě když $f(c) = 0$.

Věta 15 (Bezoutova věta): Číslo $c \in T$ je kořen polynomu $f \in T[x]$, právě když

$$(x-c)|f.$$

Důkaz: Pro libovolné $c \in T$ a libovolné $f \in T[x]$ platí $f = (x-c)g + r$.

1) c je kořen, pak $f(c) = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow f = (x-c)g \Rightarrow (x-c)|f$
2) $(x-c)|f \Rightarrow f = (x-c)h, h \in T[x] \Rightarrow f(c) = 0 \Rightarrow c$ je kořen. □

Definice 15 Číslo $c \in T$ nazýváme **k-násobným kořenem polynomu** $f \in T[x], k \in N$, právě když platí:

1) $(x-c)^k|f$
2) $(x-c)^k$ nedělí f.

Příklad 21 Kořenem jaké násobnosti je číslo 2 pro polynom $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?

Řešení: Budeme postupovat pomocí Hornerova schématu:

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

Číslo 2 je tedy 3-násobným kořenem polynomu f a platí

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)(x^4 - 3x^3 + x^2 + 4) \\ &= (x-2)^2(x^3 - x^2 - x - 2) = (x-2)^3(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Příklad 22 V polynomu $f = x^5 - ax^2 - ax + 1$ nalezněte a tak, aby číslo $c = -1$ bylo alespoň 2-násobným kořenem.

Řešení:

	1	0	0	-*a*	-*a*	1
-1	1	-1	1	-(1+*a*)	1	0
-1	1	-2	3	-(4+*a*)	5+*a*	

Musí platit $5 + a = 0$, tedy $a = -5$. Skutečně, polynom $x^5 + 5x^2 + 5x + 1$ vydělíme polynomem $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ a dostáváme

$$x^5 + 5x^2 + 5x + 1 = (x+1)^2(x^3 - 2x^2 + 3x + 1).$$

Poznámka: Při hledání kořenů algebraických rovnic je užitečné následující tvrzení, platné pro algebraické rovnice s reálnými koeficienty.

Věta 16 Nechť

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots a_1 x + a_0 = 0$$

je algebraická rovnice. Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou její kořeny (reálné i komplexní).

Nechť $A = max\{|a_i|;\ i = 0, \dots, n{-}1\}$. Pak platí:

1. Pro každý index $i, i = 1, 2, \dots, n$ platí nerovnost $|x_i| < 1 + \frac{A}{|a_n|}$.
2. Počet kladných reálných kořenů je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti nenulových koeficientů $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ nebo o sudé číslo menší.

Důsledek: Jsou-li všechny koeficienty polynomu kladná reálná čísla, nemůže mít tento polynom kladné kořeny.

Příklad 23 Najděte intervaly, ve kterých leží reálné kořeny rovnice $2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 11x + 5 = 0$.

Řešení: $a_n = 2, A = 11$, tedy $x_i \in 1 + \frac{A}{|a_n|} = 1 + \frac{11}{2} = \frac{13}{2}$. Každý z kořenů rovnice tedy leží v intervalu $x_i \in \left(-\frac{13}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

V posloupnosti koeficientů 2, 3, -7, 6, -11, 5 jsou čtyři znaménkové změny, proto v intervalu $\left(0, \frac{13}{2}\right)$ leží 4 nebo 2 kořeny.

Definice 16 Říkáme, že těleso T je **algebraicky uzavřené**, právě když každý polynom $f \in T[x]$ stupně alespoň 1 má v tělese T alespoň 1 kořen.

Příklad 24 Těleso racionálních čísel není algebraicky uzavřené. Např. polynom $f = x^2 - 2$ má racionální koeficienty, jeho stupeň je 2, ale jeho kořeny $k = \pm\sqrt{2}$ nepatří do množiny racionálních čísel. Podobně těleso reálných čísel není algebraicky uzavřené. Např. polynom $f = x^2 + 1$ má reálné koeficienty, jeho stupeň je 2, ale nemá reálné kořeny, neboť $k = \pm i$.

Věta 17 (Základní věta algebry): Každý polynom s komplexními koeficienty, jehož stupeň je alespoň 1, má alespoň 1 komplexní kořen.

Jiná formulace základní věty algebry může být následující: Těleso komplexních čísel je algebraicky uzavřené.

Poznámka: Všechny známé důkazy základní věty algebry využívají metod matematické analýzy. Pro provedení důkazu bychom museli vycházet z některé věty matematické analýzy, jejímž důsledkem je základní věta algebry. Proto důkaz nebudeme provádět.

Věta 18 Nechť $f \in T[x], st\, f = n \geq 1$. Pak polynom f má v C n kořenů, když $k-$násobný kořen počítáme za k kořenů. Ke každému polynomu $f \in T[x], st\, f \geq 1$ tedy existují čísla $a, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in C$ taková, že $f = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$.

Důkaz: Podle základní věty algebry existuje kořen α_1 takový, že $f = (x-\alpha_1)f_1, st\, f_1 = n-1$. Jestliže $n-1 \geq 1$, pak existuje kořen α_2 polynomu f_1 takový, že $f_1 = (x-\alpha_2)f_2$, tedy $f = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2$, atd. Nakonec $f = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)f_n$, $st\, f_n = 0$, tedy polynom f_n je konstantní, $f_n = a$. □

Věta 19 Nechť $f \in R[x], c \in C, f(c) = 0$. Pak číslo $\bar{c} \in C$ je také kořenem polynomu f a má stejnou násobnost jako kořen c.[6]

Důkaz: 1) Nechť c je kořenem polynomu s reálnými koeficienty $f = a_0x^n + \cdots + a_n$. Pak $f(c) = a_0c^n + \cdots + a_n = 0$. Stačí nám dokázat, že $\overline{f(c)} = f(\bar{c})$:

$$\bar{0} = \overline{f(c)} = \overline{a_0c^n + \cdots + a_n} = \overline{a_0c^n} + \cdots + \overline{a_n} = \overline{a_0}.\overline{c^n} + \cdots + \overline{a_n} =$$
$$= a_0(\bar{c})^n + \cdots + a_n = f(\bar{c}) = 0.$$

Je tedy i $\bar{c}$ kořenem polynomu f.

2) Nechť c je $k-$násobný kořen polynomu $f, k \in N, c \notin R, \bar{c} \neq c$. Dokážeme, že $\bar{c}$ je rovněž $k-$násobný kořen.

$$f = (x-c)f_1 = (x-c)(x-\bar{c})f_2 = [x^2 - (c+\bar{c})x + c\bar{c}]f_2$$

Protože $c + \bar{c} = 2a$ a $c\bar{c} = a^2 + b^2$, má polynom $x^2 - (c+\bar{c})x + c\bar{c}$ a proto i polynom f_2 reálné koeficienty.

$$f = (x-c)(x-\bar{c})f_2 = (x-c)(x-\bar{c})(x-c)(x-\bar{c})f_4 = \cdots$$
$$= (x-c)^k(x-\bar{c})^k h,$$

kde polynom h nemůže mít kořeny $c, \bar{c}$. Tedy $\bar{c}$ je $k-$násobný kořen. □

3.2 Derivace polynomu

Definice 17 Nechť $f \in T(x), f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Pak polynom $f' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$ nazýváme **derivací** polynomu f.[7]

---

[6] Připomeňme, co je číslo $\bar{c}$, které nazýváme číslo komplexně sdružené k číslu c. Jestliže $c = a + bi, a, b \in R$, pak $\bar{c} = a - bi$. Dále platí pro čísla $c_1, c_2 \in C$ platí: $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$, $\overline{c_1.c_2} = \overline{c_1}.\overline{c_2}$, pro $k \in N$: $\overline{z_1^k} = (\overline{z_1})^k$, pro $a \in R$: $\bar{a} = a$

Věta 20 Pro derivaci polynomů $f, g \in T[x]$ platí:

1) $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2) $(f.g)' = f'.g + g'.f$
3) $k \in N, (f^k)' = k.f^{k-1}.f'$
4) $c' = 0$ pro $c \in T$

Poznámka: Důkaz této věty byl podrobně proveden v matematické analýze.

Věta 21 Nechť $k \in N, k \geq 2, c \in T, f \in T[x]$. Pak platí: Je-li číslo c k-násobným kořenem polynomu f, pak číslo c je $(k-1)$-násobným kořenem polynomu f'. Je-li c jednoduchým kořenem polynomu f, pak c není kořenem polynomu f'.

Důkaz: Nechť c je k-násobný kořen polynomu f. Pak platí

$$(x-c)^k | f \Rightarrow f = (x-c)^k.h, h \in T[x].$$

Pro derivaci polynomu f platí

$$f' = k(x-c)^{k-1}.h + (x-c)^k.h' = (x-c)^{k-1}[kh + (x-c)h']$$
$$\Rightarrow (x-c)^{k-1} | f.$$

To, že c není k-násobným kořenem polynomu f', dokážeme sporem. Kdyby $(x-c)^k$ dělilo polynom f', pak by platilo $f' = (x-c)^k.h_1$. Z předchozího předpokladu $(x-c)^k | f$ by pro derivaci muselo platit

$$(x-c)^k h_1 = (x-c)^{k-1}[kh + (x-c)h'].$$

Krácením dostáváme

$$(x-c)h_1 = kh + (x-c)h'.$$

Nyní volíme $x = c$ a po dosazení dostáváme

$$0 = k.h(c).$$

Protože k je na c nezávislé, musí být $h(c) = 0$, což znamená, že $h = (x-c)g, g \in T[x]$ a

$$f = (x-c)^k h = (x-c)^k(x-c)g = (x-c)^{k+1}g.$$

To by znamenalo, že číslo c je $(k+1)$-násobným kořenem polynomu f, což je spor s původním předpokladem, že c je pouze k-násobný kořen polynomu f. □

Poznámka: Naopak věta neplatí: Je-li číslo c kořenem polynomu f', pak nemusí být kořenem polynomu f. Např. $f = (x-3)^5 + 7$, $f(3) \neq 0$, $f' = 5(x-3)^4$ a číslo 3 je 4-násobným kořenem polynomu f'.

---

[7] S derivací jste se seznámili již dříve při studiu matematické analýzy. Derivace byla definována obecně pro funkci a pomocí derivací bylo možno vyšetřovat různé vlastnosti funkcí, jako jsou lokální extrémy funkce, konvexita, konkávita, vyšetřování průběhu funkce, aj.

Příklad 25 V polynomu $f = ax^4 + bx^3 + 1$ nalezněte koeficienty a, b tak, aby kořen 1 byl alespoň dvojnásobný.

Řešení: Je-li 1 dvojnásobným kořenem polynomu f, pak je 1 jednoduchým kořenem polynomu f'. Nalezneme proto derivaci polynomu f a určíme hodnoty polynomů f, f' v bodě 1:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$$
$$f(1) = a + b + 1$$
$$f'(1) = 4a + 3b$$

Nyní budeme řešit následující soustavu rovnic:

$$a + b + 1 = 0$$
$$4a + 3b = 0$$

Vyřešením zjišťujeme, že $a = 3, b = -4$, tedy polynom f má tvar

$$f = 3x^4 - 4x^3 + 1.$$

Příklad 26 Řešte Příklad 22 pomocí derivace.

Řešení:

$f'(x) = 5x^4 - 2ax - a$, $f(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$, $f'(-1) = 5 + 2a - a = 5 + a$, $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow a = -5$. Výsledkem je polynom $f = x^5 + 5x^2 + 5x + 1$.

Věta 22 Nechť $k \in N, k \geq 2, c \in T, f \in T[x]$. Pak následující výroky jsou navzájem ekvivalentní:

1) c je k −násobným kořenem polynomu f.
2) $(x - c)^k | f$ a zároveň $(x - c)^{k-1}$ nedělí f.
3) Existuje polynom $g \in T[x]$ takový, že $f = (x - c)^k . g$ a zároveň $g(c) \neq 0$.
4) $f(c) = 0, f'(c) = 0, f''(c) = 0, \dots, f^{(k-1)}(c) = 0, f^{(k)} \neq 0$.
5) c je $(k - 1)$ −násobným kořenem polynomu $d = NSD(f, f')$.

Poznámka: Jestliže hledáme vícenásobné kořeny polynomu f, můžeme postupovat následujícím způsobem:

1. Najdeme $NSD(f, f') = d$.
2. Jestliže $d = 1$, pak f nemá žádné násobné kořeny.
3. Jestliže $d \neq 1$, pak každý kořen polynomu d je také kořenem polynomu f, a to vícenásobným kořenem: jeho násobnost je o 1 vyšší, než byla v polynomu d.

Příklad 27 Ukažte, že polynom $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2 \in R[x]$ má pouze jednoduché kořeny.

Řešení: Budeme postupovat podle předchozí poznámky. Najdeme derivaci polynomu f, což je $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$. Sami se pomocí Eukleidova algoritmu přesvědčte, že $NSD(f, f') = 1$. Polynom $f(x)$ má tedy skutečně pouze jednoduché kořeny.

Věta 23 Nechť $f \in T[x], d = NSD(f, f'), f = d.g$. Pak platí: Polynom g má stejné kořeny jako polynom f a každý kořen polynomu g je jednoduchý.

Příklad 28 Nechť je například polynom $f = (x-1)^3(x+2)^5(x+7)$, polynom $d = (x-1)^2(x+2)^4$. Pak polynom $g = (x-1)(x+2)(x+7)$ a $f = d.g$.

3.3 Polynomy s celými koeficienty

Věta 24 Nechť $p \in Z,\ p \neq 0,\ q \in N, NSD(p,q) = 1, c = \frac{p}{q}, f = a_n x^n + \cdots + a_0 \in Z[x]$. Když c je kořenem polynomu f, pak pro libovolné $m \in Z$ platí:

1) $p | a_0$,
2) $q | a_n$,
3) $(p - mq) | f(m)$.

Důkaz: $c = \frac{p}{q}$ je kořen polynomu, tj. $f(c) = 0$. Pro polynom f můžeme tedy psát

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Jestliže nyní tuto rovnici vynásobíme výrazem q^n, dostáváme

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

1) Poslední člen $a_0 q^n$ převedeme na pravou stranu a ze všech předcházejících členů vytkneme p, dostáváme:
$$p[a_n p^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-1}] = -a_0 q^n,$$
tedy $p | a_0 q^n$ a protože p a q jsou nesoudělná čísla, musí platit $p | a_0$.
2) Obdobně jako v předchozím kroku převedeme člen $a_n p^n$ na pravou stranu a ze všech následujících členů vytkneme q, dostáváme:
$$q[a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0 q^{n-1}] = -a_n p^n,$$
obdobnou úvahou jako v kroku 1) zjišťujeme, že $q | a_n$.
3) Polynom f můžeme vyjádřit ve tvaru Taylorova polynomu o středu m:
$$f = c_0 + c_1(x-m) + \cdots + c_{n-1}(x-m)^{n-1} + c_n(x-m)^n.$$
Je zřejmé, že $f_m = c_0$. Když nyní za x dosadíme kořen $c = \frac{p}{q}$, dostáváme

$$f(c) = c_0 + c_1\left(\frac{p-mq}{q}\right) + \cdots + c_{n-1}\left(\frac{p-mq}{q}\right)^{n-1} + c_n\left(\frac{p-mq}{q}\right)^n = 0,$$

rovnici vynásobíme výrazem q^n a dostáváme

$$c_0q^n + c_1(p-mq)q^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(p-mq)^{n-1}q + c_n(p-mq)^n = 0.$$

Stejnou úvahou jako v krocích 1) a 2) vidíme, že $(p-mq)|c_0q^n$ a protože $NSD(p-mq,q) = 1$, platí $(p-mq)|c_0$, neboli $(p-mq)|f(m)$. $\square$

Poznámka: Pomocí poslední věty můžeme najít všechny racionální kořeny polynomů s celými koeficienty. Část 3) poslední věty přitom využíváme tak, že za m volíme čísla 1 a -1, tedy

$$(p-q)|f(1) \wedge (p+q)|f(-1).$$

Příklad 29 Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $f = 2x^5 + x^4 - 12x^3 - 20x^2 - 19x - 6$.

Řešení: Hledané kořeny budou tvaru $c = \frac{p}{q}$, kde $p|(-6)$, $q|2$.

Dělitelé čísla -6: $1,2,3,6,-1,-2,-3,-6$.

Kladní dělitelé čísla 2: $1,2$.

Nyní vytvoříme tabulku, kde v prvním řádku budou všechny možnosti $\frac{p}{q}$, v druhém řádku odpovídající možnosti $p+q$ a ve třetím řádku $p-q$. Protože $f(-1) = 4$, zvýrazníme ve druhém řádku všechny dělitele čísla 4, $f(1) = -54$, ve třetím řádku zvýrazníme všechny dělitele čísla -54. Kandidáti na kořeny potom budou ta čísla $\frac{p}{q}$, u nichž budou zvýrazněny oba dva spodní řádky.

$\frac{p}{q}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-6}{1}$
$p+q$	**2**	3	3	**4**	5	7	0	**1**	**-1**	**-2**	**-1**	-5
$p-q$	0	**-1**	**1**	**2**	**1**	5	**-2**	**-3**	**-3**	-4	-5	-7

Kandidáti na kořeny jsou tedy tato čísla: $3, \frac{-1}{2}, -2$. Tyto kořeny prověříme pomocí Hornerova schématu:

	2	1	-12	-20	-19	-6
$\frac{-1}{2}$	2	0	-12	-14	-14	0
3	2	6	6	4	0	
-2	2	2	2	0		

Z Hornerova schématu vidíme, že

$$f = \left(x + \frac{1}{2}\right).(2x^4 - 12x^2 - 14x - 12) = (2x + 1)(x^4 - 6x^2 - 7x - 6)$$
$$= (2x + 1)(x - 3)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = (2x + 1)(x - 3)(x + 2)(x^2 + x + 1)$$

Polynom $x^2 + x + 1$ nemá reálné kořeny a tedy všemi hledanými racionálními kořeny jsou čísla $3, \frac{-1}{2}, -2$.

Příklad 30 Řešte samostatně: Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $f = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

Výsledek: Kandidáti na kořeny: $2, \frac{1}{2}, -3, \frac{-1}{3}$, $f = (x + 3)(2x - 1)(3x^2 + 2x - 4)$, racionální kořeny jsou $-3, \frac{1}{2}$.

Poznámka: Pomocí předchozího postupu lze řešit také některé algebraické nerovnice, jak ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 31 Řešte nerovnici $x^3 + 4x^2 + x - 6 \leq 0$.

Řešení: Číslo p je dělitelem čísla -6, číslo q je dělitelem čísla 1. Dosadíme-li číslo 1 do výrazu na levé straně nerovnice, zjistíme, že hodnota je 0. Levou stranu nerovnice si označíme jako $f(x)$ a zjištěný fakt jako $f(1) = 0$, což znamená, že 1 je kořenem. Z tohoto důvodu nebudeme do tabulky zapisovat řádek pro $p - q$, protože pro nulu nemůžeme hledat dělitele. Dále $f(-1) = 4$.

$\frac{p}{q}$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
$p + q$	**2**	3	**4**	7	0	**-1**	**-2**	-5

Po dosazení kandidátů $-3, -2, 1, 3$ do Hornerova schématu zjistíme, že kořeny polynomu jsou čísla $-3, -2, 1$ a zadanou nerovnici můžeme přepsat do tvaru

$$(x - 1)(x + 2)(x + 3) \leq 0.$$

Nyní můžeme postupovat pomocí číselné osy a nulových bodů (proveďte sami). Výsledkem jsou všechna čísla $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle -2; 1\rangle$.

3.4 Vietovy vztahy

Při řešení určitých příkladů je vhodné využívat vztahy mezi kořeny a koeficienty polynomu, o nichž pojednává následující věta.

Věta 25 Nechť $r_1, r_2, \dots, r_n \in T$ jsou všechny kořeny polynomu $f \in T[x], st\, f = n, f = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$. Pak platí tzv. **Vietovy vztahy:**

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$$
$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n$$
$$\vdots$$
$$(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n} = r_1 r_2 \dots r_{n-1} + r_1 r_2 \dots r_{n-2} r_n + \cdots + r_2 r_3 \dots r_{n-1} r_n$$
$$(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = r_1 r_2 r_3 \dots r_{n-1} r_n$$

Důkaz: Jsou-li $r_1, r_2, \dots, r_n$ kořeny polynomu f, platí $a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$. Když pravou stranu roznásobíme a porovnáme koeficienty u stejných mocnin x, dostaneme Vietovy vztahy. □

Příklad 32 Pomocí Vietových vztahů nalezněte polynom, jestliže známe kořeny $-1, -1, -1, 3, 4$.

Řešení: Máme pět kořenů, víme tedy, že $n = 5$. Koeficient a_5 můžeme volit libovolně, proto zvolíme $a_5 = 1$. Potom

$$-\frac{a_4}{1} = -1 - 1 - 1 + 3 + 4 = 4$$
$$\frac{a_3}{1} = 1 + 1 - 3 - 4 + 1 - 3 - 4 - 3 - 4 + 12 = -6$$
$$(-1)^3 \frac{a_2}{1} = -1 + 3 + 4 + 3 + 4 - 12 + 3 + 4 - 12 - 12 = -16$$
$$(-1)^4 \frac{a_1}{1} = -3 - 4 + 12 + 12 + 12 = 29$$
$$(-1)^5 \frac{a_0}{1} = (-1).(-1).(-1).3.4 = -12$$

Úpravou dostáváme $a_0 = 12, a_1 = 29, a_2 = 16, a_3 = -6, a_4 = -4, a_5 = 1$. Polynom f má tvar

$$f = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12.$$

Můžeme provést kontrolu roznásobením:

$$f = a_n (x+1)^3.(x-3).(x-4) = 1.(x+1)^3.(x-3).(x-4)$$
$$= x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12.$$

Příklad 33 Řešte samostatně: Pomocí Vietových vztahů nalezněte polynom, jestliže znáte kořeny $i, i, -1 - i$.

Výsledek: $f = x^3 + (1-i)x^2 + (1-2i)x - 1 - i$

Poznámka: Pomocí Vietových vztahů můžeme jednoduchým způsobem zpaměti řešit některé kvadratické rovnice s celočíselnými kořeny. Máme-li rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, platí $r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2}$, $r_1 . r_2 = \frac{a_0}{a_2}$. Např. v případě polynomu $x^2 + 5x + 6$ platí pro kořeny $r_1 + r_2 = -5$ a $r_1 . r_2 = 6$. Řešíme-li tuto soustavu rovnic, dostaneme $r_1 = -2, r_2 = -3$.

Příklad 34 Nalezněte koeficienty a tvar kvadratického polynomu $ax^2 + bx + c$, jestliže víte, že součin kořenů je roven $-\frac{5}{2}$ a součet kořenů $-\frac{3}{2}$.

Řešení: Podle Vietových vztahů platí:

1) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
2) $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Víme tedy, že $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$ a $\frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$. Nyní můžeme vzhledem k tvaru zlomků předpokládat, že $a = 2$, potom $b = 3$ a $c = -5$. Hledaný polynom má tedy tvar $2x^2 + 3x - 5$.

Příklad 35 Je dána kvadratická rovnice $x^2 + 11x + 19 = 0$, symboly x_1, x_2 označme její dva různé reálné kořeny. Vypočtěte hodnotu výrazu $x_1^2 + x_2^2$.

Řešení: K řešení využijeme znalosti Vietových vztahů

1) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$,
2) $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$,

tedy $x_1 + x_2 = -11$, $x_1 x_2 = 19$. Úpravou výrazu $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$ dostáváme $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ a po dosazení $x_1^2 + x_2^2 = (-11)^2 - 2.19 = 83$.

Příklad by bylo samozřejmě možno řešit i bez Vietových vztahů výpočtem kořenů rovnice pomocí vzorce, ale vzhledem k tomu, že kořeny nejsou racionální, by byl postup poměrně náročný, jak se můžete sami přesvědčit.

Příklad 36 Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6$, jestliže víte, že pro kořeny polynomu platí vztah $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

Řešení: Podle Vietových vztahů platí:

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$
2) $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 5$
3) $x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = 2$
4) $x_1 x_2 x_3 x_4 = -6$

Do první rovnice dosadíme vztah $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ a dostáváme

$$2(x_1 + x_2) = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2, x_3 + x_4 = 2$$

Z druhé rovnice úpravou dostaneme

$$x_1x_2 + x_1(x_3 + x_4) + x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4 = x_1x_2 + (x_3 + x_4).(x_1 + x_2) + x_3x_4$$
$$= x_1x_2 + 2.2 + x_3x_4 = 5 \Rightarrow x_1x_2 + x_3x_4 = 1$$

Tuto upravenou rovnici dáme dohromady se čtvrtou rovnicí:

2) $x_1x_2 + x_3x_4 = 1$

4) $(x_1x_2).(x_3x_4) = -6$

Zavedeme substituci $x_1x_2 = u \Rightarrow x_3x_4 = 1 - u \Rightarrow u(1 - u) = -6$

$$u^2 - u - 6 = 0$$

$$u_1 = 3, u_2 = -2$$

Návratem k původním proměnným dostáváme $x_1x_2 = 3, x_3x_4 = -2$.

Nyní budeme řešit současně rovnice $x_1x_2 = 3$ a $x_1 + x_2 = 2$, zavedeme substituci $x_1 = v \Rightarrow x_2 = 2 - v$ a řešením rovnice

$$v^2 - 2v + 3 = 0$$

dostáváme dva kořeny $x_1 = 1 + i\sqrt{2}, x_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

Obdobně postupujeme pro rovnice $x_3x_4 = -2$ a $x_3 + x_4 = 2$, dostáváme další dva kořeny $x_3 = 1 + \sqrt{3}, x_4 = 1 - \sqrt{3}$.

Jelikož se jedná o polynom čtvrtého stupně, která má 4 kořeny, našli jsme všechny kořeny.

Příklad 37 Řešte samostatně: Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$, jestliže mezi kořeny polynomu platí vztah $x_1x_2 = x_3x_4$.

Výsledek: $x_1 = -2 - i, x_2 = -2 + i, x_3 = 1 + 2i, x_4 = 1 - 2i$

Nyní stručně popíšeme základní metody řešení některých vybraných typů algebraických rovnic.

3.5 Lineární rovnice

Jedná se o rovnici typu $\boldsymbol{ax + b = 0}, a \neq 0$. Tato rovnice má vždy řešení, a to ve tvaru

$$x = -\frac{b}{a}.$$

3.6 Kvadratická rovnice

Jedná se o rovnici tvaru $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}, a\neq 0$. S tímto typem rovnice jste se poprvé setkali na základní škole, kde jste řešili kvadratické rovnice ve speciálním tvaru. Obecně jste se kvadratické rovnice naučili řešit na střední škole. Nyní připomeneme, jakým způsobem se kvadratické rovnice řeší.

Pro výpočet kořenů využijeme úpravy kvadratické rovnice pomocí metody doplnění na úplný čtverec.

$$ax^2+bx+c=a[x^2+px+q]=a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q\right]$$

Nyní výraz $\frac{p^2}{4}-q$ označíme písmenem d. Pomocí vzorce pro rozdíl čtverců dostáváme

$$a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-d\right]=a\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{d}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{d}\right)=0$$

Provedeme diskusi vzhledem k poslednímu členu: Pokud má být výraz $a\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{d}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{d}\right)$ nulový, potom musí být nulová první nebo druhá závorka, tedy

$$\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{d}\right)=0\vee\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{d}\right)=0.$$

Protože $p=\frac{b}{a}$, $d=\frac{p^2}{4}-q=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, dostáváme pro kořeny kvadratické rovnice známý vztah

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Výraz $b^2-4ac=D$ nazýváme **diskriminant** a podle toho, zda vychází kladný nebo záporný, můžeme rychle rozhodnout o tom, zda má rovnice reálné nebo komplexní kořeny.

Připomeňme, že v některých jednoduchých případech s celočíselnými koeficienty je vhodné použít Vietových vztahů k rychlejšímu nalezení kořenů. Např. pro rovnici $x^2+7x+10=0$ platí $x_1.x_2=10, x_1+x_2=-7$, kořeny jsou tedy $x_1=-2, x_2=-5$.

3.7 Kubická rovnice

Kubická rovnice je rovnice tvaru $\boldsymbol{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0}, a_3\neq 0$. Při řešení nejprve vydělíme tuto rovnici číslem a_3 a po přeznačení koeficientů dostáváme rovnici

$$x^3+a\,x^2+b\,x+c=0$$

Zavedeme substituci $x=t-\frac{a}{3}$. Po dosazení a úpravě dostaneme rovnici v tzv. redukovaném tvaru

$$t^3+p\,t+q=0$$

Označíme $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dále nechť $K = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ označuje jednu (pevně zvolenou) z obou hodnot druhé odmocniny. Nechť dále u značí libovolnou (pevnou) ze tří třetích odmocnin $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + K}$ a konečně v značí tu z třetích odmocnin $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - K}$, která splňuje vztah $3uv = -p$. Potom kořeny rovnice $t^3 + p\,t + q = 0$ jsou

$$t_1 = u + v, \quad t_2 = \varepsilon.u + \varepsilon^2.v, \quad t_3 = \varepsilon^2.u + \varepsilon.v\,.$$

Posledně uvedené vzorce se nazývají **Cardanovy vzorce**.

O tom, zda jsou kořeny kubické rovnice reálné či komplexní, lze rozhodnout podle hodnoty **diskriminantu**, který má tvar $D = -4\,p^3 - 27\,q^2$. Nyní se omezíme na kubickou rovnici $t^3 + p\,t + q = 0$ s reálnými nenulovými koeficienty (v případě $p = 0$ nebo $q = 0$ je řešení triviální).

a) $D = 0$: $t_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, $t_2 = t_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

b) $D > 0$: jeden kořen reálný a dva imaginární komplexně sdružené kořeny, určené Cardanovými vztahy.

c) $D < 0$: tři reálné kořeny, které však nelze najít pomocí Cardanových vzorců (tzv. „cassus irreducibilis“). Je nutné použít goniometrické řešení:

Nejprve z rovnice $\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}$ vypočítáme hodnotu úhlu φ (jednu pevně zvolenou).

Hledané kořeny jsou pak určeny následujícími vztahy:

$$t_1 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)}\cos\frac{\varphi}{3}, t_2 = -2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}\right),\ t_3 = -2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Je zřejmé, že Cardanovy vzorce i posledně uvedené vztahy jsou pro praktické počítání velmi pracné a zdlouhavé. Také obdržené výsledky je velmi obtížné upravit do použitelného tvaru. Pro naše účely bude proto vhodnější hledat řešení kubické rovnice způsobem, který jsme uvedli v kapitole 3.3 a který umožňuje určovat kořeny rovnice s celočíselnými koeficienty.

3.8 Rovnice 4. stupně

Jedná se o rovnici typu $\boldsymbol{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0}, a_4 \neq 0$. Tato rovnice je rovnice posledního stupně, která je obecně řešitelná. Obecné řešení rovnice čtvrtého stupně je však natolik pracné a zdlouhavé, že se v praxi se takřka nepoužívá a my jej zde nebudeme uvádět. V rovnicích ve školské praxi si vystačíme s jednoduššími způsoby řešení (převedení rovnice ve tvaru bikvadratické rovnice $ax^4 + bx^2 + c = 0$ pomocí substituce na kvadratickou rovnici, řešení binomické nebo reciproké rovnice).

3.9 Rovnice vyšších stupňů

Pro rovnice 5. stupně a stupňů vyšších už žádný obecný algoritmus řešení neexistuje[8]. Podle teorie, vytvořené francouzským matematikem Galoisem, pro každé $n \geq 5$ existuje algebraická rovnice stupně n, která není řešitelná algebraickými metodami. Mnohé rovnice vyšších stupňů řešit můžeme, musí mít ale speciální tvar. Buďto je možné postupné „hádání" kořenů, nebo je rovnice takového tvaru, který umožňuje řešit rovnici jako binomickou nebo reciprokou. Obě tyto metody jsou probírány na středních školách a my je připomeneme v následujících kapitolách.

Další metodou, jak získat kořeny algebraické rovnice, je užití numerických metod. Tyto metody se užívají velmi často v souvislosti s rozvojem výpočetní techniky. Obecný postup sestává ze tří kroků: ohraničení kořenů (podle Věty 16), jejich separace a aproximace. Pokud hledáme kořeny polynomů s reálnými koeficienty pomocí uvedených numerických metod, pak využíváme toho, že polynom je funkce spojitá v oboru reálných čísel. Mezi dnes užívané metody patří metoda půlení intervalů, metoda prosté iterace, metoda tečen (Newtonova metoda) a Halleyova metoda. Těmito problémy se nebudeme zabývat.

3.10 Některé typy algebraických rovnic

Binomická rovnice

Binomická rovnice je rovnice typu $\boldsymbol{x^n} = \boldsymbol{a}, n \in N, a \in C$. Podle základní věty algebry existuje n řešení této rovnice. Tato řešení jsou tvaru

$$x = \sqrt[n]{|a|}\left[\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right]$$

a tvoří v rovině vrcholy pravidelného n −úhelníku. Tento n −úhelník leží v Gaussově rovině na kružnici, která má střed v počátku souřadnicových os a poloměr $r = \sqrt[n]{|a|}$. Při hledání těchto kořenů postupujeme následujícím způsobem:

1. Napíšeme si hledaný kořen ve tvaru $x_k = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
2. Nalezneme poloměr $r = \sqrt[n]{|a|} \in R$.
3. Nalezneme úhel φ, pro který platí $n\varphi = \alpha + 2k\pi, k \in Z$, tedy $\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, kde $k = 0, 1, \dots, n-1$. Úhel α najdeme podle toho, kde v Gaussově rovině leží číslo a. Je to úhel, který svírá průvodič čísla a s reálnou osou.

[8] Nelze najít univerzální vzorec, který by obsahoval jen koeficienty, konečný počet aritmetických operací a konečný počet odmocnin.

Příklad 38 Řešte v C rovnici $x^3 - 2 = 0$. Kořeny znázorněte v Gaussově soustavě souřadnic.

Řešení: Rovnici si nejdříve přepíšeme do tvaru $x^3 = 2$.

1) Napíšeme si hledané kořeny ve tvaru $x_k = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
2) $r = \sqrt[3]{2}$.
3) $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 2\pi$, protože číslo 2 leží v Gaussově rovině na kladné části reálné osy. Potom $\varphi = \frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$.

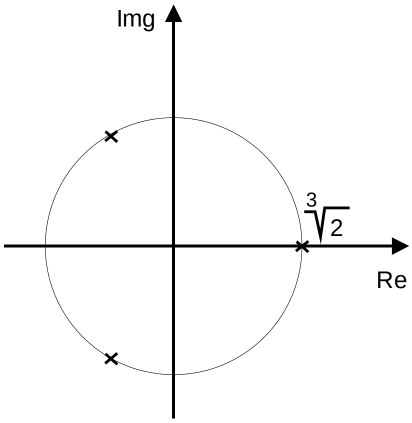
Řešením jsou tři kořeny v následujícím tvaru:

$$x_0 = \sqrt[3]{2}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt[3]{2}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

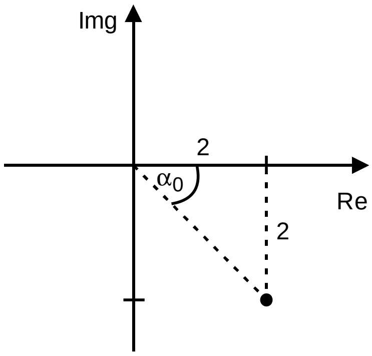
Vidíme, že první kořen je reálný, ostatní jsou komplexní. V Gaussově rovině tvoří kořeny vrcholy rovnostranného trojúhelníku.



Příklad 39 Řešte rovnici $x^5 = 2 - 2i$.

Řešení: Jestliže hledáme poloměr pro číslo $z = a \pm bi$, potom platí $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $r = \sqrt[n]{\sqrt{a^2 + b^2}}$. V našem případě tedy $|z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $r = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}$.

Číslo $2 - 2i$ leží ve čtvrtém kvadrantu, úhel α v tomto případě zjišťujeme jako $\alpha = 2\pi - \alpha_0$, kde α_0 vypočítáme z následujícího pravoúhlého trojúhelníku:



$\alpha_0 = \frac{\pi}{4}, \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Kořenů je pět a platí pro ně

$$x_k = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{5}\right), k = 0,1,2,3,4.$$

Příklad 40 Řešte samostatně binomické rovnice:

1) $x^3 - 27 = 0$
2) $x^3 = 4\sqrt{3} + 4i$
3) $x^4 + 16 = 0$

Výsledky:

1) $x_0 = 3, x_1 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), x_2 = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$
2) $x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right), x_1 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right), x_2 = 2\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right)$
3) $x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), x_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), x_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right), x_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

Reciproká rovnice

Reciproká rovnice má tvar

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots a_1 x + a_0 = 0,$$

kde $a_{n-i} = a_i$ pro $i = 1,2,\dots,n$, nebo $a_{n-i} = -a_i$ pro $i = 1,2,\dots,n$.

Název reciproká získala proto, že je-li c její kořen, je $\frac{1}{c}$ (reciproká hodnota) také kořenem.

Rozlišujeme reciprokou rovnici **sudého stupně** pro sudé n a **lichého stupně** pro liché n. Dále rozlišujeme rovnici 1. druhu, je-li $a_{n-i} = a_i$, a 2. druhu, je-li $a_{n-i} = -a_i$.

Reciprokou rovnici řešíme následujícím způsobem:

- Každá reciproká rovnice 2. druhu má kořen $c = 1$. Pokud ji vydělíme dvojčlenem $(x-1)$, dostaneme reciprokou rovnici 1. druhu.
- Každá reciproká rovnice 1. druhu, lichého stupně má kořen $c = -1$. Pokud ji vydělíme dvojčlenem $(x+1)$, dostaneme reciprokou rovnici 1. druhu, sudého stupně.
- Reciprokou rovnici 1. druhu, sudého stupně lze převést na algebraickou rovnici polovičního stupně dělením výrazem $x^{n/2}$, dále zavedeme substituci

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Příklad 41 Najděte kořeny rovnice $2x^7 + 5x^6 - 3x^4 + 3x^3 - 5x - 2 = 0$.

Řešení: Jedná se o rovnici 2. druhu, lichého stupně. Budeme postupovat následujícím způsobem:

1) Pomocí Hornerova schématu ověříme kořeny $-1; 1$. Číslo 1 bude určitě kořenem rovnice.

	2	5	0	-3	3	0	-5	-2
1	2	7	7	4	7	7	2	0
-1	2	5	2	2	5	2	0	
-1	2	3	-1	3	2	0		

Vidíme, že 1 je jednoduchým kořenem a -1 je dvojnásobným kořenem. Pokud bychom tato čísla dále prověřovali, již bychom v Hornerově schématu v posledním sloupci nedostali nulu, jak si můžete sami ověřit. Přepíšeme tedy rovnici do tvaru

$$(x-1)(x+1)^2(2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2) = 0$$

a můžeme si všimnout, že ve třetí závorce máme novou reciprokou rovnici, tentokrát 1. druhu, sudého stupně.

2) Upravíme rovnici $2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0$ vydělením výrazem x^2 a přesuneme k sobě členy se stejným koeficientem:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

3) Volíme substituci $x + \frac{1}{x} = t$, je potřeba zjistit, čemu je rovno $x^2 + \frac{1}{x^2}$:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Získané výrazy dosadíme do rovnice $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ a dostaneme

$$2(t^2-2)+3t-1=0 \Rightarrow 2t^2+3t-5=0 \Rightarrow t_1=-\frac{5}{2}, t_2=1.$$

Vrátíme se k původní proměnné. Je-li $t=-\frac{5}{2}$, pak $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$, tuto rovnici vynásobíme výrazem $2x$ (za předpokladu, že $x \neq 0$) a dostáváme rovnici $2x^2+5x+2=0$, jejímž řešením jsou čísla $x_1=-2, x_2=-\frac{1}{2}$.

Je-li $t=1$, pak $x+\frac{1}{x}=1$ a obdobnou úpravou jako v předchozím kroku dostáváme rovnici $x^2-1+x=0$, jejímž řešením jsou $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Celkovým řešením je potom množina

$$\left\{-2,-1,-\frac{1}{2},1,\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Příklad 42 Řešte samostatně reciprokou rovnici $3x^8+x^7-4x^6-x^5+2x^4-x^3-4x^2+x+3=0$.

Výsledek:

$$x \in \left\{-1,1,\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\frac{-2\pm i\sqrt{5}}{3}\right\}.$$

Úlohy k procvičení

1. Definujte algebraickou rovnici a její kořeny.
2. Vyslovte a dokažte Bezoutovu větu.
3. Je těleso celých čísel algebraicky uzavřené? Vysvětlete.
4. Napište Vietovy vztahy pro polynom 5. stupně.
5. Zjistěte násobnost kořenů $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -2$ pro polynom $f(x) = 8x^7 + 4x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x - 1$.
6. Pomocí derivace najděte vícenásobné kořeny polynomu $f(x) = 4x^5 + 20x^4 + 25x^3 - 10x^2 - 20x + 8 \in Q[x]$.
7. Je dána kvadratická rovnice $x^2 - 5x + 3 = 0$. Označme c_1, c_2 její kořeny. Určete hodnotu výrazu $(c_1 + c_2)^2 - 3c_1c_2$.
8. Na příkladě polynomu $f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 12x + 2$ vysvětlete, jakým způsobem je možno hledat racionální kořeny polynomu s celými koeficienty. Najděte všechny racionální koeficienty.
9. Na množině reálných čísel řešte nerovnici $4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 12x + 2 < 0$.
10. Na množině komplexních čísel řešte rovnici $5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$.

Výsledky:

5. c_1 je trojnásobný kořen, c_2 není kořenem.
6. $c_1 = \frac{1}{2}$ je trojnásobným kořenem, $c_2 = -2$ je dvojnásobným kořenem.
7. 16
8. $c = \frac{1}{2}$.
9. Nemá řešení.
10. $x \in \left\{i; -i; 5; \frac{1}{5}\right\}$.

4 Polynomy více proměnných

Cíle kapitoly

Prostudování této kapitoly vám umožní:

- Definovat polynom více proměnných
- Stanovit stupeň polynomu více proměnných
- Lexikograficky uspořádat polynom více proměnných
- Definovat symetrický a homogenní polynom
- Definovat elementární symetrické polynomy

Doba potřebná k prostudování

Cca 2 hodiny

Průvodce studiem

Definice 18 Polynomem o n proměnných $x_1, \dots, x_n$ rozumíme součet konečného počtu členů

$$f = A_1 + A_2 + \cdots + A_r,$$

kde $A_i = a_i x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $a_i \in T$ je koeficient členu A_i, $k_1, \dots, k_n$ jsou celá nezáporná čísla. Polynom o n proměnných nad tělesem T značíme symbolem $f \in T[x_1, \dots, x_n]$. **Stupněm členu** $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ nazýváme číslo $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

Příklad 43 Stupněm členu $5x^3y^5$ je 8.

Poznámka: V dalším textu bude užitečný také pojem výšky členu. Nechť $f(x_1, \dots, x_n)$ je polynom n proměnných a $a_i x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ je jeho libovolný člen. Pak uspořádanou n-tici celých nezáporných čísel $(k_1, \dots, k_n)$ nazveme **výškou členu.**

Definice 19 **Stupeň nenulového polynomu** $f \in T[x_1, \dots, x_n]$ je roven maximálnímu ze stupňů jeho členů s nenulovými koeficienty. Polynom, jehož všechny členy mají stejný stupeň s, nazýváme **homogenní polynom** (stupně s).

Příklad 44 Polynom $x + y$ je homogenní polynom stupně 1, polynom $x^2 - 2xy$ je homogenní polynom stupně 2, polynom $x^2y + 3y^3$ je homogenní polynom stupně 3.

Definice 20 Členy $A = ax_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $B = bx_1^{l_1}x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ nazveme **sdruženými členy** právě tehdy, když $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_n = l_n$.

Poznámka: Sdružené členy podle možností okamžitě sečítáme. Platí $A + B = (a + b)\, x_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$.

Definice 21 Množina $T[x_1, \dots, x_n]$ je vzhledem k operacím $+, \cdot$ oborem integrity (operace jsou všeobecně definovány, $(T[x_1, \dots, x_n], +)$ je grupa a $(T[x_1, \dots, x_n], \cdot)$ je komutativní pologrupa).

Věta 26 Každý polynom $f \in T[x_1, \dots, x_n]$ lze napsat ve tvaru součtu homogenních polynomů navzájem různých stupňů, přičemž toto vyjádření je jednoznačné (až na pořadí).

Poznámka: V případě polynomů jedné proměnné bylo možno jeho členy seřadit sestupně nebo vzestupně vzhledem k exponentu proměnné. Tuto metodu však u polynomů více proměnných nelze použít. Musíme proto definovat jiný postup.

Věta 27 Nechť $A = x_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $B = x_1^{l_1}x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ jsou dva členy o n proměnných. Řekneme, že člen A je před členem B, existuje-li index i, $1 \leq i \leq n$, splňující

$$k_1 = l_1, \dots, k_{i-1} = l_{i-1}, k_i > l_i.$$

Jestliže člen A je před členem B nebo $A = B$, píšeme $A \gg B$.

Věta 28 Relace $\gg$ je relace lineárního uspořádání na množině všech členů o n proměnných (relace je antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní).

Definice 22 Relaci $\gg$ nazýváme **relací lexikografického uspořádání** členů o n proměnných. Jsou-li členy polynomu $f \in \boldsymbol{T}[x_1, \dots, x_n]$ uspořádány pomocí této relace, říkáme, že jsme členy polynomu f uspořádali lexikograficky. Člen, který je před všemi ostatními členy tohoto polynomu f, nazýváme **vedoucí člen polynomu** f.

Příklad 45 Určete lexikografické uspořádání polynomu $f(x, y, z) = (x - 2y^2)(x^2z + z)$ a jeho vedoucí člen.

Řešení: Roznásobením dostáváme $f(x, y, z) = x^3z + xz - 2x^2y^2z - 2y^2z = x^3z - 2x^2y^2z + xz - 2y^2z$, což je lexikografické uspořádání polynomu. Přesvědčíme se o tom pomocí výšek členů: $(3,0,1), (2,2,1), (1,0,1), (0,2,1)$. Vedoucím členem polynomu je x^3z.

Věta 29 Nechť $f, g \in T[x_1, \dots, x_n]$ jsou libovolné dva reálné nenulové polynomy n proměnných. Pak součin vedoucích členů polynomů f a g je vedoucím členem součinu $f \cdot g$.

Definice 23 Polynom $f(x_1, \dots, x_n) \in T[x_1, \dots, x_n]$ se nazývá **symetrický**, jestliže se nezmění žádnou permutací proměnných, tzn. pro libovolnou permutaci $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ indexů $1, 2, \dots, n$ platí:

$$f(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Množinu všech symetrických polynomů n proměnných nad tělesem reálných čísel budeme označovat $R_s[x_1, \dots, x_n]$.

Poznámka: Symetrický polynom dvou proměnných splňuje podmínku $f(x, y) = f(y, x)$, symetrický polynom tří proměnných podmínku $f(x, y, z) = f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x)$. Polynom $x + y$ je symetrický polynom stupně 1, polynom $x^2 + x + y + y^2$ je symetrický polynom stupně 2.

Věta 30 Nechť $A = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ je vedoucí člen symetrického polynomu $f(x_1, \dots, x_n)$. Pak platí $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

Příklad 46 Nalezněte lexikografické uspořádání symetrického polynomu $f(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z)$ a jeho vedoucí člen.

Řešení: Roznásobením dostáváme $f(x, y, z) = x^2y + x^2z + xy^2 + 2xyz + xz^2 + y^2z + yz^2$, což je lexikografické uspořádání polynomu. Vedoucím členem polynomu je x^2y.

Věta 31 Nechť $A = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ je člen o n proměnných. Pak existuje pouze konečně mnoho vedoucích členů symetrických polynomů o n proměnných, které jsou za členem A.

Příklad 47 Buď dán polynom $f(x, y, z) = x^3y + 2x^2y^2 + x^3z + 2x^2z^2 - x^2y^2z^2 + xy^3 + xz^3 + 2y^2z^2 + y^3z + yz^3$. Určete všechny jeho vedoucí členy.

Řešení: Výšky členů polynomu jsou po řadě $(3,1,0), (2,2,0), (3,0,1), (2,0,2), (2,2,2), (1,3,0), (1,0,3), (0,2,2), (0,3,1), (0,1,3)$. Uspořádáme-li tyto výšky pomocí relace uspořádání $>$, dostaneme $(3,1,0) > (3,0,1) > (2,2,2) > (2,2,0) > (2,0,2) > (1,3,0) > (1,0,3) > (0,3,1) > (0,2,2) > (0,1,3)$. Vedoucím členem f je tedy člen x^3y. Nerovnosti $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ z Věty 30 však platí ještě pro výšky $(2,2,2)$ a $(2,2,0)$ a proto dalšími vedoucími členy polynomu jsou $x^2y^2z^2$ a $2x^2y^2$.

Mohli bychom říci, že daný polynom je součtem tří jednoduchých symetrických polynomů, jejichž vedoucími členy jsou x^3y, $x^2y^2z^2$, $2x^2y^2$. Způsob, jakým symetrické polynomy rozkládáme do součtu jednoduchých symetrických polynomů, ukážeme v následující části.

4.1 Elementární symetrické polynomy

Definice 24 Polynomy z $R[x_1, \dots, x_n]$ tvaru:

$$\sigma_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$\sigma_2(x_1, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$
$$\vdots$$
$$\sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_{n-1} + x_1x_2 \dots x_{n-2}x_n + \cdots + x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n$$
$$\sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n$$

nazýváme **elementární symetrické polynomy** n proměnných.

Poznámka: Elementární polynom σ_1 je tedy součtem všech proměnných $x_1, \dots, x_n$, polynom σ_2 je součtem všech součinů jejich dvojic, polynom σ_3 trojic, atd. Polynom σ_n je nakonec součinem všech proměnných $x_1, \dots, x_n$. Pro případ $n = 3$ a zavedené označení proměnných x, y, z je tedy:

$$\sigma_1 = x + y + z$$
$$\sigma_2 = xy + xz + yz$$
$$\sigma_3 = xyz$$

Symetrické polynomy se vyskytují ve Vietových vztazích a dále je můžeme použít pro řešení soustavy rovnic, kterou bychom neuměli řešit pomocí metod známých ze základní a střední školy, jak ukážeme.

Následující **hlavní věta o symetrických polynomech** řeší existenci a jednoznačnost vyjádření libovolného symetrického polynomu pomocí elementárních symetrických polynomů.

Věta 32 Každý symetrický polynom $f(x_1, \dots, x_n) \in R_S[x_1, \dots, x_n]$ lze vyjádřit jako polynom n proměnných $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ nad R, tzn.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

přičemž toto vyjádření je jednoznačné.

Příklad 48 Pro mocninné součty $s_k = x_1^k + x_2^k$ užitím binomické věty

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

dostáváme

$$s_1 = x_1 + x_2 = \sigma_1,$$
$$s_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$
$$s_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$

atd. Pro obecné převedení symetrického polynomu na součet elementárních symetrických polynomů nám bude sloužit následující algoritmus.

Algoritmus pro nalezení všech vedoucích členů symetrických polynomů stupně $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, které stojí za vedoucím členem $ax_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ $(k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n)$:

1. Napíšeme výšku vedoucího členu polynomu, tj. posloupnost exponentů $k_1, \dots, k_n$.
2. V této posloupnosti najdeme poslední číslo větší než 1. Od tohoto čísla odečteme 1, čísla „před“ ponecháme beze změny a čísla „za“ volíme co nejmenší tak, aby platilo $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_s$ a $l_1 + l_2 + \cdots + l_s = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.
3. Postup opakujeme, dokud nedostaneme posloupnost 1, 1, …, 1.

Pak v získané posloupnosti výšek členů jsou popsány všechny vedoucí členy symetrických polynomů daného stupně, které stojí za zadaným vedoucím členem.

Při hledání symetrického polynomu $f(x_1, \dots, x_n)$ ve tvaru $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ k prvnímu vedoucímu členu $ax_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ vytvoříme odpovídající člen $\varphi_1 = \sigma_1^{k_1-k_2} \cdot \sigma_2^{k_2-k_3} \cdot \dots \cdot \sigma_n^{k_n}$. Obdobně pokračujeme pro další vedoucí členy.

Polynom f lze napsat ve tvaru $f = a\varphi_1 + A\varphi_2 + B\varphi_3 + \cdots + W\varphi_t$, kde a je koeficient prvního vedoucího členu a konstanty $A, B, \dots$ jsou **neurčité koeficienty**, které najdeme dosazováním konkrétních hodnot za $x_1, \dots, x_n$.

Příklad 49 Převeďte polynom $f = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + \cdots$ do tvaru $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Řešení: Nejdříve sestavíme posloupnost exponentů a vytvoříme odpovídající vedoucí členy obecného symetrického polynomu, jehož vedoucí člen je $x_1^2x_2^2$. Takový polynom by měl tvar : $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + \cdots + x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_3x_4$. Ke každému vedoucímu členu potom vytvoříme odpovídající člen φ_k:

2	2			$\varphi_1 = \sigma_1^{2-2}\sigma_2^2 = \sigma_2^2$
2	1	1		$\varphi_2 = \sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 = \sigma_1\sigma_3$
1	1	1	1	$\varphi_3 = \sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^1 = \sigma_4$

Pro polynom f tedy platí

$$f = a\sigma_2^2 + A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_4,$$

kde $a = 1$ a koeficienty A, B dopočítáme dvěma volbami za x_1, x_2, x_3, x_4.

Volba 1: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,1,0)$, $f = x_1^2x_2^2 + \cdots = 1 + 1 + 1 = 3$, $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 1 + 1 = 3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 + 1 + 1 = 3$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3 = 1$, $\sigma_4 = 0$. Dosazením do rovnice $f = \sigma_2^2 + A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_4$ dostáváme

$$3 = 9 + 3A \Rightarrow A = -2.$$

Volba 2: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,1,1)$, sami si můžete dosazením ověřit, že $f = 6, \sigma_1 = 4, \sigma_2 = 6, \sigma_3 = 4, \sigma_4 = 1$. Platí tedy

$$6 = 36 + 16A + B \Rightarrow B = 2.$$

Tím dostáváme hledaný tvar polynomu

$$f = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4.$$

Příklad 50 Symetrický polynom $f = (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$ převeďte do proměnných $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Řešení: Roznásobením bychom získali $f = x^4y^2 - 2x^4yz + x^4z^2 - 2x^3y^3 + \cdots$ Můžeme tedy psát posloupnost exponentů vedoucích členů. Vyškrtávat přitom budeme všechny řádky, kde má posloupnost více členů než 3, protože polynom f má 3 proměnné.

4	2					$\varphi_1 = \sigma_1^2\sigma_2^2$
4	1	1				$\varphi_2 = \sigma_1^3\sigma_3$
3	3					$\varphi_3 = \sigma_2^3$
3	2	1				$\varphi_4 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$
3	1	1	1			$\times$
2	2	2				$\varphi_6 = \sigma_3^2$
2	2	1	1			$\times$
2	1	1	1	1		$\times$
1	1	1	1	1	1	$\times$

$$f = \sigma_1^2\sigma_2^2 + A\sigma_1^3\sigma_3 + B\sigma_2^3 + C\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + D\sigma_3^2.$$

Máme 4 neurčité koeficienty, proto budou potřeba 4 různé volby (všimněte si, že např. volby (1,1,0) a (0,1,1) jsou z hlediska výsledku totožné, což je způsobeno symetričností polynomu):

Volba 1: $(x, y, z) = (1,1,0)$, $f = (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2 = 0, \sigma_1 = x + y + z = 2, \sigma_2 = xy + xz + yz = 1, \sigma_3 = xyz = 0$

$$0 = 4 + B \Rightarrow B = -4$$

Volba 2: $(x, y, z) = (1,1,1), f = 0, \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1$

$$0 = 81 + 27A - 27.4 + 9C + D \Rightarrow 27 = 27A + 9C + D$$

Volba 3: $(x, y, z) = (1,1,-2)$, $f = 0$, $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1.1 + 1.(-2) + 1.(-2) = -3, \sigma_3 = -2$

$$0 = 27.4 + 4D \Rightarrow D = -27$$

Volba 4: $(x, y, z) = (1,1,-1)$, $f = 0$, $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.1 + 1.(-1) + 1.(-1) = -1, \sigma_3 = -1$

$$0 = 1 - A + 4 + C - 27 \Rightarrow 22 = -A + C$$

Nyní budeme řešit soustavu rovnic pro zbývající neurčité koeficienty:

$$27 = 27A + 9C - 27$$

$$22 = -A + C$$

Řešením této soustavy je $A = -4, C = 18$. Celkem

$$f = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2.$$

Příklad 51 Řešte samostatně: Převeďte polynom $f = x^3 + y^3 + z^3$ do proměnných $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Výsledek: $f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

Příklad 52 Řešte samostatně: Převeďte polynom $f = (x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)$ do proměnných $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Výsledek: Vedoucí člen x^4y^2, $f = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2$

Symetrické polynomy mají využití v aplikačních úlohách. My však ukážeme pouze dva jednoduché příklady, abychom ilustrovali užitečnost symetrických polynomů v různých typech úloh.

Příklad 53 Řešte v oboru reálných čísel následující soustavu rovnic

$$x^3 + y^3 = 35$$

$$xy = 6.$$

Řešení: Sami si můžete výpočtem ověřit, že $x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$ a $xy = \sigma_2$. Tedy dostáváme novou soustavu rovnic

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 35$$

$$\sigma_2 = 6$$

Dosazením druhé rovnice do první dostáváme rovnici $\sigma_1^3 - 18\sigma_1 - 35 = 0$, postupným hádáním a dosazováním do Hornerova schématu najdeme jediný reálný kořen $\sigma_1 = 5$. Protože $\sigma_1 = x + y$, budeme nyní řešit soustavu

$$x + y = 5$$

$$xy = 6,$$

jejímž řešením je množina dvou uspořádaných dvojic $\{[3,2], [2,3]\}$.

Provedeme zkoušku dosazením do původního zadání a v obou případech obdržíme identitu $35 = 35 \wedge 6 = 6$.

Příklad 54 Kvádr má hrany o délkách a, b, c. Platí $a + b + c = 6$ a $ab + ac + bc = 9$. Určete objem krychle, která má stejně dlouhou tělesovou úhlopříčku jako zadaný kvádr.

Řešení: Označíme délku hrany krychle k. Tělesová úhlopříčka kvádru má délku $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, délka tělesové úhlopříčky krychle je $\sqrt{3}k$. Dostáváme tedy rovnici

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3}k,$$

kterou umocníme a máme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3k^2.$$

Polynom $a^2 + b^2 + c^2$ je symetrický polynom a platí $a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, tedy

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 3k^2.$$

Ze zadání přitom víme, že $\sigma_1 = a + b + c = 6$ a $\sigma_2 = ab + ac + bc = 9$. Takže

$$6^2 - 2.9 = 3k^2,$$

úpravou $k^2 = 6$, $k = \sqrt{6}$. Hledaný objem krychle potom je

$$V = k^3 = 6\sqrt{6}.$$

Příklad 55 Řešte samostatně soustavu rovnic:

$$x^3 + y^3 = 28$$

$$x + y = 4$$

Výsledek: {[3,1], [1,3]}.

Úlohy k procvičení

1. Definujte polynom n proměnných a jeho stupeň.
2. Definujte homogenní a symetrický polynom.
3. Určete stupně následujících polynomů. Jsou homogenní nebo symetrické?
    a. $x - y$,
    b. $3xy + 2x^2$,
    c. $4xy^2 + 3x + 3y + 4x^2y$,
    d. $5x + y^2 - 7$,
    e. $xy^2 + yz^2 + zx^2$,
    f. $xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2y + y^2z + z^2x$.
4. Užitím binomické věty napište mocninný součet $s_4 = x_1^4 + x_2^4$ pomocí elementárních symetrických polynomů.
5. Vyjádřete polynom $(x + y)(y + z)(z + x)$ pomocí elementárních symetrických polynomů.

Výsledky:

3. a. 1, homogenní, b. 2, homogenní, c. 3, symetrický, d. 2, není homogenní ani symetrický, e. 3, homogenní, f. 3, homogenní a symetrický
4. $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$
5. $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$.

Literatura

BARBEAU, E. J.: *Polynomials.* Springer – Verlag New York Inc., 1989

BIRKHOFF, G., MAC LANE, S.: *Prehľad modernej algebry.* Praha: SNTL, 1979

BLAŽEK, J., KOMAN, M., VOJTÁŠKOVÁ, B.: *Algebra a teoretická aritmetika.* Praha: SPN, 1985

HERMAN, J., KUČERA, R., ŠIMŠA, J.: *Metody řešení matematických úloh I.* Brno: PřF MU, 1996

HORÁK, P.: *Polynomy*. 1. vydání. Brno: UJEP, 1978.