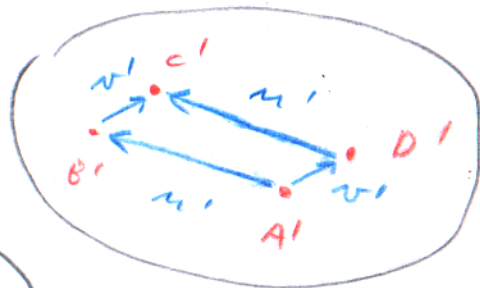
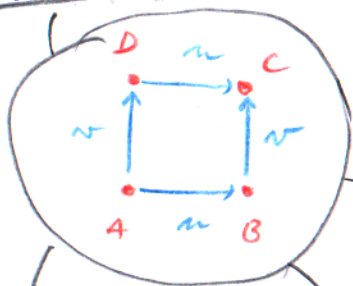


GEOMETRIE 3 ... JARO 2020

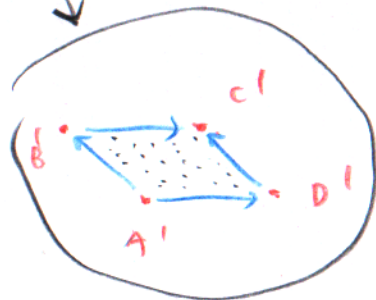
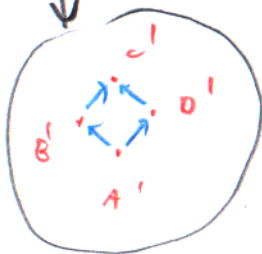
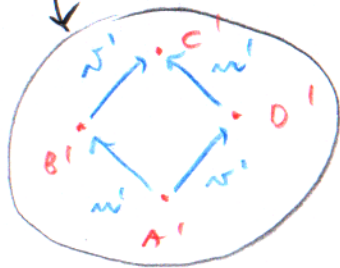
UMÍMĚ

- afinní & eukleidovská geometrie pomocí vektorů (algebry) ...

- afinní zobrazení mezi afinními prostory



- shodná, podobná, ekviafinní zobrazení mezi eukleidovskými prostory



(- a jistě mnoho dalších věcí ...)

CHCEME UMĚT - projektivní zobrazení mezi
projektivními prostory

- tj. zejména projektivní rozšíření
(o "nevlastní body") a vyměření
předchozích věcí v tomto RÁMCI!

PLÁN

- OPAKOVÁNÍ vybraných věcí z minulého
semestru (MA0009)
- konkrétní PŘÍKLADY shodných^a afinních
zobrazení (podobných)
- projektivní ROZŠÍŘENÍ prostoru a souřadnic
- projektivní ZOBRAZENÍ a základní věta
projektivní geometrie!
- UŽITEK, rozpoznání základních transforma-
cí apod.

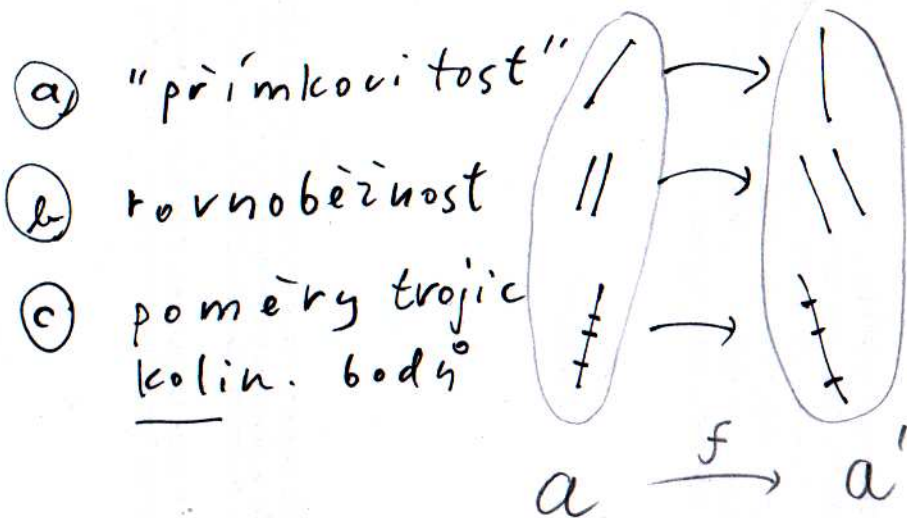
OPAKOVÁNÍ

... převzato z
materiálu v. číslování
stránek

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

• z loňské geometrie víme:

af. zobr. zachovává



(... pokud se zrovna
nerobrazují do.)

• podle obecné logiky čekatme:

af. zobr. zachovává...

... AFINNÍ STRUKTURU

$$\begin{array}{ccc}
 a \times a & \rightarrow & V \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 a' \times a' & \rightarrow & V'
 \end{array}$$

??

co by to jako mělo být
a jak skloubit
s předchozím?

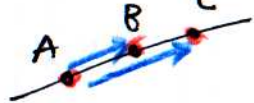
- vlastnosti (a) - (c) rozumíme
v obecném AF. prostoru:

(a) přímka  ... podpr. dim 1

(b) rovnoběžnost  ... $\vec{B} = \vec{e}$

(c)

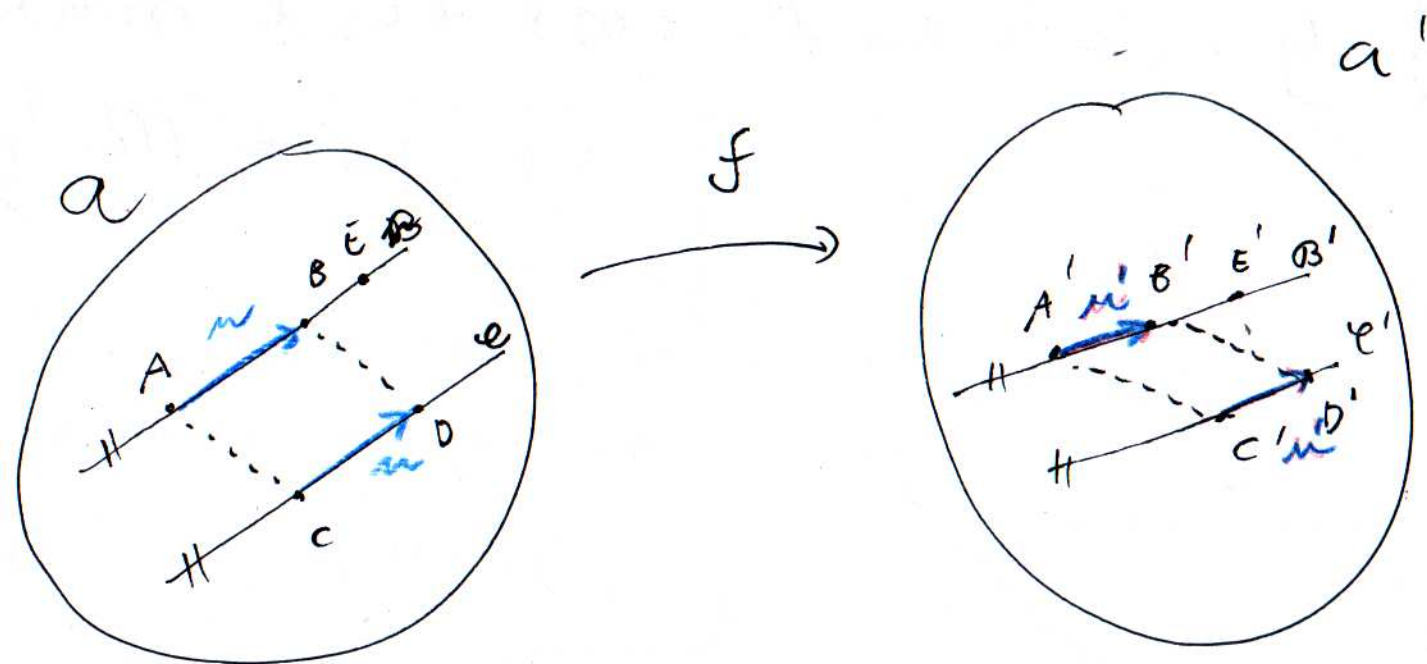
poměr



... $d = \frac{\vec{AC}}{\vec{AB}}$... $\vec{AC} = d \cdot \vec{AB}$

\mathbb{R}

Přidp ... $f: a \rightarrow a'$ afinni (podle a)-(c)

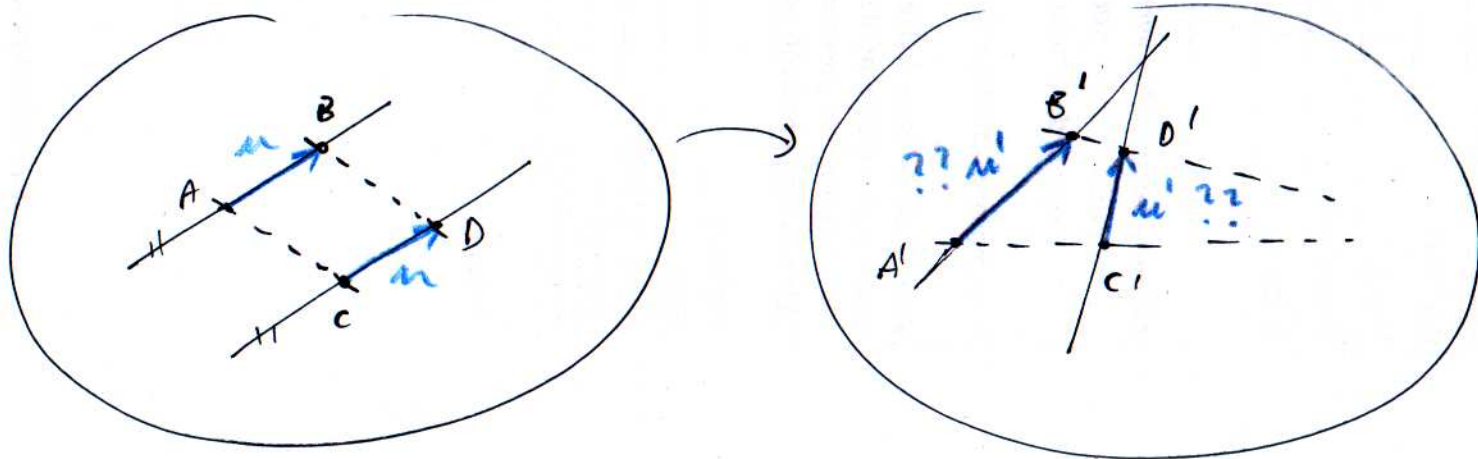


f ... indukce zobrazení mezi
 z měřeními $\vec{f}: \vec{a} \rightarrow \vec{a}'$,
 které je navíc LINEÁRNÍ!

Tj. \bullet $\vec{m} \parallel \vec{AB} \mapsto \vec{A'B'} \parallel \vec{m}$... dobrá def. obraz
 \bullet $\vec{m} \parallel \vec{CD} \mapsto \vec{C'D'} \parallel \vec{m}$... vektorů (nezávislé
 na určující dvojici
bodů)

\bullet $\vec{AE} = d \cdot \vec{AB} \mapsto \vec{A'E'} = d \cdot \vec{A'B'}$
 \bullet $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} \mapsto \vec{A'D'} = \vec{A'B'} + \vec{A'C'}$ } ... LINEÁRNÍ

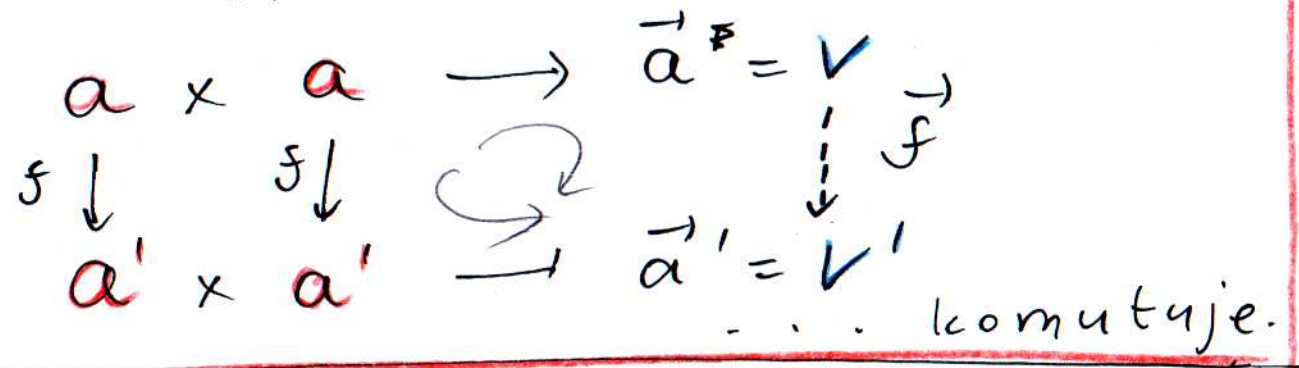
Nic z toho nefunguje např. pro obecná
 PROJEKTIVNÍ ZOBRA:



EKVIVALENTNÍ DEF. AF. ZOBR:

$f: a \rightarrow a'$ je AFINNÍ, pokud zachovává afinní strukturu,

tj. ek. induk. zobr. $\vec{f}: \vec{a} \rightarrow \vec{a}'$ takže, je LINEÁRNÍ



konkrétně ...

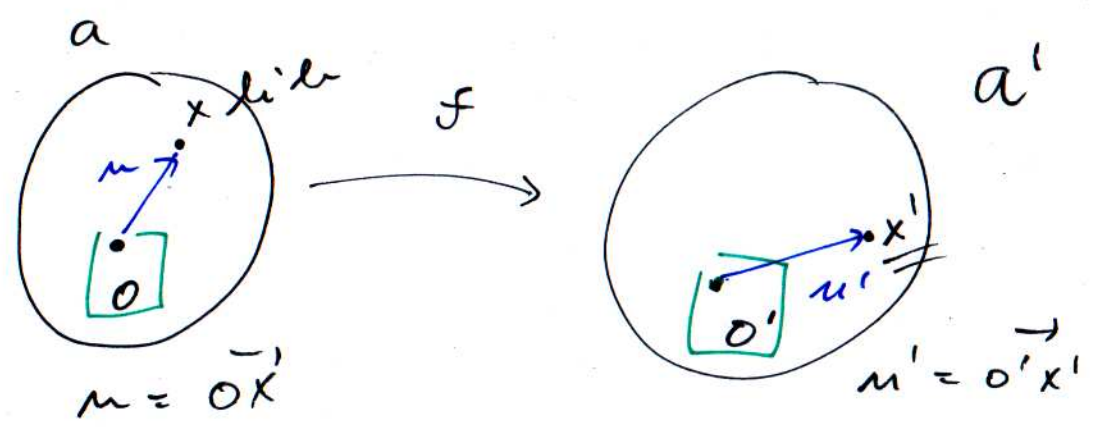
$$\vec{f}(\vec{AB}) = \vec{f(A)}\vec{f(B)}$$

neboli ...

$$(\vec{AB})' = \vec{A'B'}$$

POZNÁMKA

- lin. zobor. $\vec{a} \rightarrow \vec{a}'$ NEURČUJE
- af. zobor $a \rightarrow a'$ úplně ...
(viz ^{napr.} posunutí)
- ALE s obrazem jednoho dalšího bodu
ANO:



$F(\vec{OX}) = \vec{O'X'}$

$F: X \text{ (lib)} \mapsto X' = \boxed{O'} + \boxed{F(\vec{OX})}$

obraz jednoho bodu (pointing to the $F(\vec{OX})$ box)

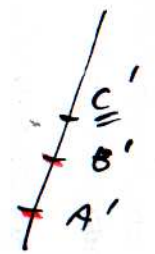
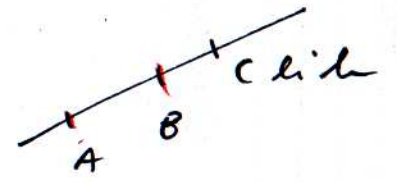
lin. část (next to the entire equation)

VĚTA O URČENOSTI

AF. 208R.

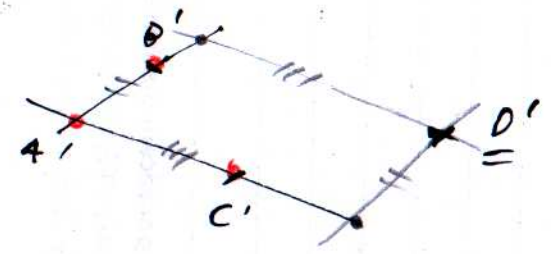
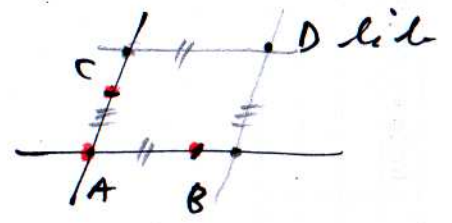
• Vloni ... z vlastností (a) - (c) plyne ...

$m = \boxed{1}$



... stačí znát obrazy $\boxed{2}$ bodů

$m = \boxed{2}$



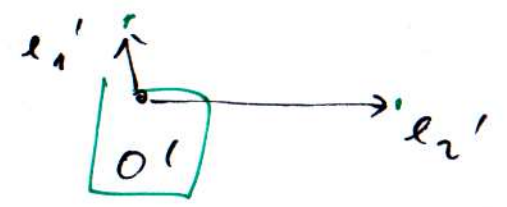
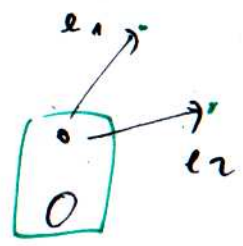
... stačí ... $\boxed{3}$ bodů

etc.

OBECNĚ:

AFINNÍ ZOBRA. $f: a \rightarrow a'$
 \uparrow
 dim n
 je určeno obrázky $n+1$ bodů
 v obecné poloze.

Důkaz...



$\vec{f}: \vec{a} \rightarrow \vec{a}'$ je určeno obrázkem
 báze, a ta má n prvků

- vlastnosti (a) - (c) nejsou úplně nezávislé:

Pokud (a), potom (b) \Leftrightarrow (c).



- ve skutečnosti platí ještě něco mnohem silnějšího:

Pokud bijektivní zobr. zach. (a),
potom také (b) a (c) !!

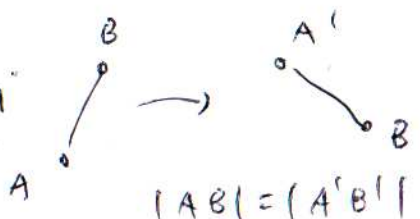
pozn. "základní věta afinní geometrie".

(viz časem jako důsledek
základní věty projektivní geom...)

SHODNÁ ZOBRAZENÍ

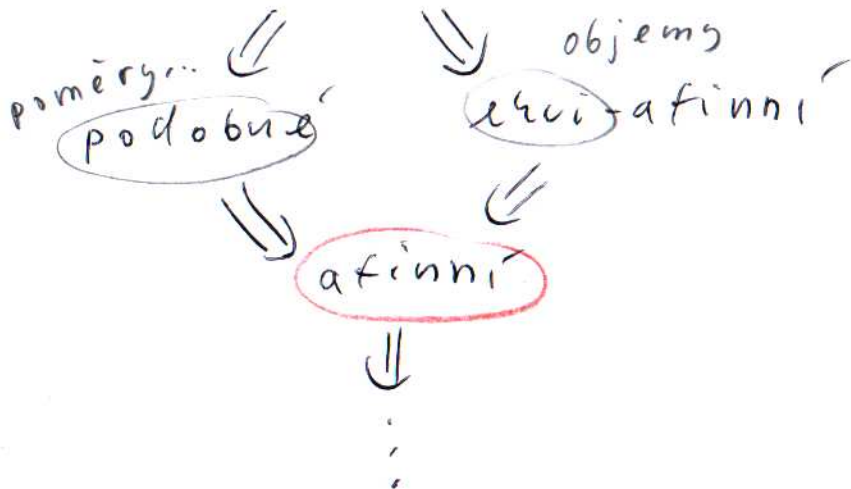
od jažživa víme, že

SHODNÁ zobr. zachovávají

• vzdálenosti  $|AB| = |A'B'|$

(tj. shodnosti úseček)

shodné



letos jsme se naučili, jak
algebraicky popsat
AFINNÍ zobr... (viz s. 27)

Jak v tomto duchu
vyměříme

shodná (resp. podobná,
ekv.-afinní)

mezi **afinními** ??

8 **AFINNÍ** zobrazení ... $f: a \rightarrow a'$
 $x \mapsto x' = \boxed{0'} + \boxed{\vec{f}(\vec{ox})}$ (viz s. 28)

obraz jednoho bodu

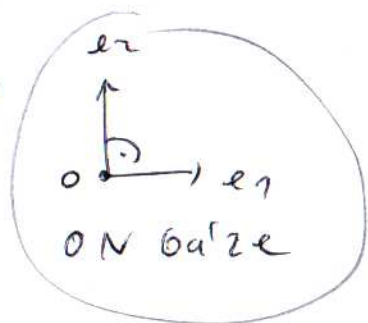
indukovaná
lineární zobr.

ti. vzhledem k sour. soust.:

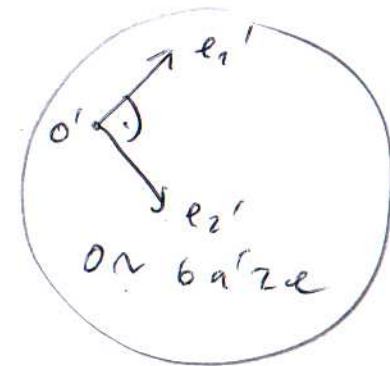
$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}_{x'} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}_{0'} + \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{\substack{e_1' e_2' \dots \\ \text{matice zobr. } \vec{f} \dots \text{ soust. } D}} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}_x$$

• PŘEDP. vše vyjádřeno vzhledem k ON soust.

• zobrazení je **SHODNÉ** (\Leftrightarrow)



f



$$\Leftrightarrow e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = \dots = 1$$

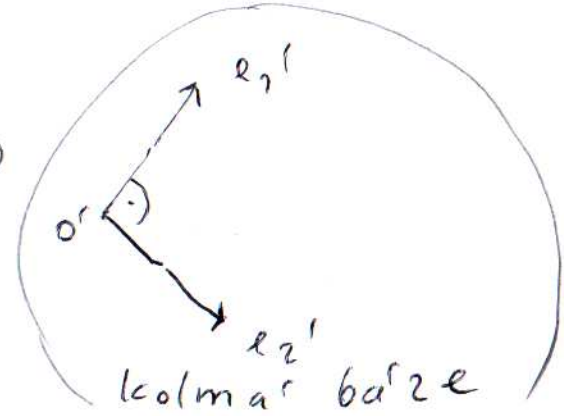
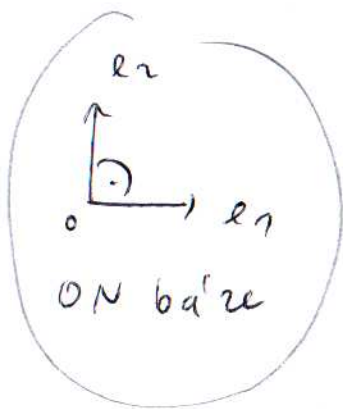
$$e_1' \cdot e_2' = \dots = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D^T \cdot D = E}$$

135 PODOBNE :

• zobra. je PODOBNE (\Leftrightarrow)



$$\Leftrightarrow e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = \dots = k^2$$

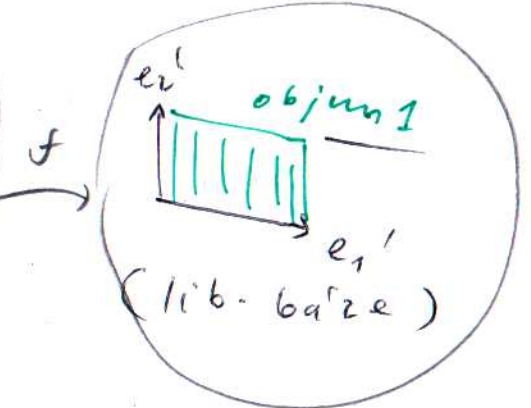
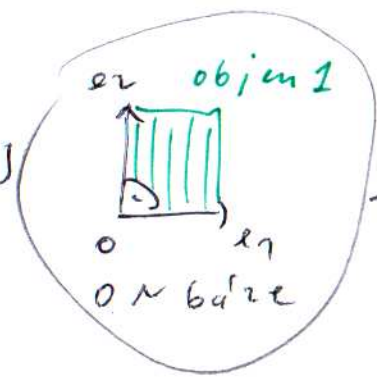
$$e_1' \cdot e_2' = \dots = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{e_1'}{k} \\ \frac{e_2'}{k} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' | e_2' | \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & \dots \\ 0 & k^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D^T \cdot D = k^2 E}$$

↑
koeficient
podobnosti

• zobra. je EKVI-AFINNÍ (\Leftrightarrow)



$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} e_1' \cdot e_1 & e_1' \cdot e_2 & \dots \\ e_2' \cdot e_1 & e_2' \cdot e_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = 1$$

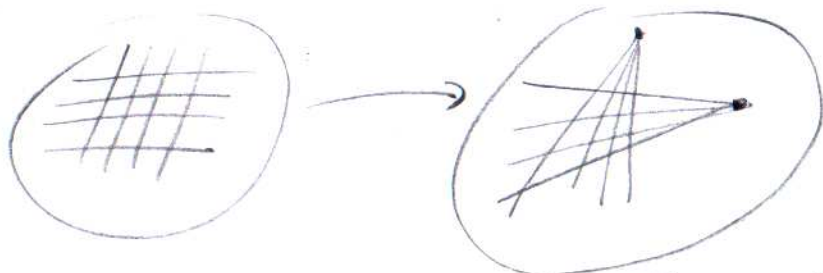
Gramova matice = $\begin{pmatrix} \frac{e_1'}{k} \\ \frac{e_2'}{k} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' | e_2' | \dots \end{pmatrix} = D^T \cdot D$ ✓

$$\boxed{\det(D^T \cdot D) = 1}$$

... Tady budeme navazovat příští semestr.

... zejména se naučíme alg. popis:

- PROJEKTIVNÍHO rozšíření af. prostoru
a odpovídající popis **PROJEKTIVNÍCH**
zobrazení ...



- vymezení AFINNÍCH zobr. v tomto rámci ...

- rozporovávat základní zobr. ...

- a pod ...

