OPAKOVÁNÍ

PŘÍKLADY

# 1. TYPICKÝ PŘÍKLAD

Afinní zobrazení v rovině je dáno obrazy bodů:

$$A = [0,0] \longmapsto [7,3] = A'$$
$$B = [2,0] \longmapsto [7,1] = B'$$
$$C = [0,2] \longmapsto [5,3] = C'$$

Určete:

a) obraz obecného bodu $X = [x_1, x_2]$

b) typ zobrazení (afinní, ekvi.af., podobné, shodné)

c) druh zobrazení (pokud to jde, např. otáčení, posunutí, ...)

d) zejména rozhodněte, zda je základní (osová afinita, resp. její deriváty)

POZN – afinní zobr. v rovině $\boxed{2}$ dim zcela určeno obrazy $\boxed{3}$ bodů v obecné poloze. ✓

– znázornění (obrázek) pomáhá!

– vhodné interpretace taktéž!

– předp. vše v KARTÉZSKÝCH souř...

**VÝSLEDEK hledáme ve tvaru** (viz opakování)

- obraz

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

vzor

obraz počátku ... 0'

matice indukovaného lineárního zobr., tj.: $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

obraz 1. bázového vektoru $e_1'$ ... $e_2'$

- symbolicky píšeme:

$$X' = C + D \cdot X$$

obraz, vektor, matice, vzor

- resp. pomocí jedné ROZŠÍŘENÉ matice:

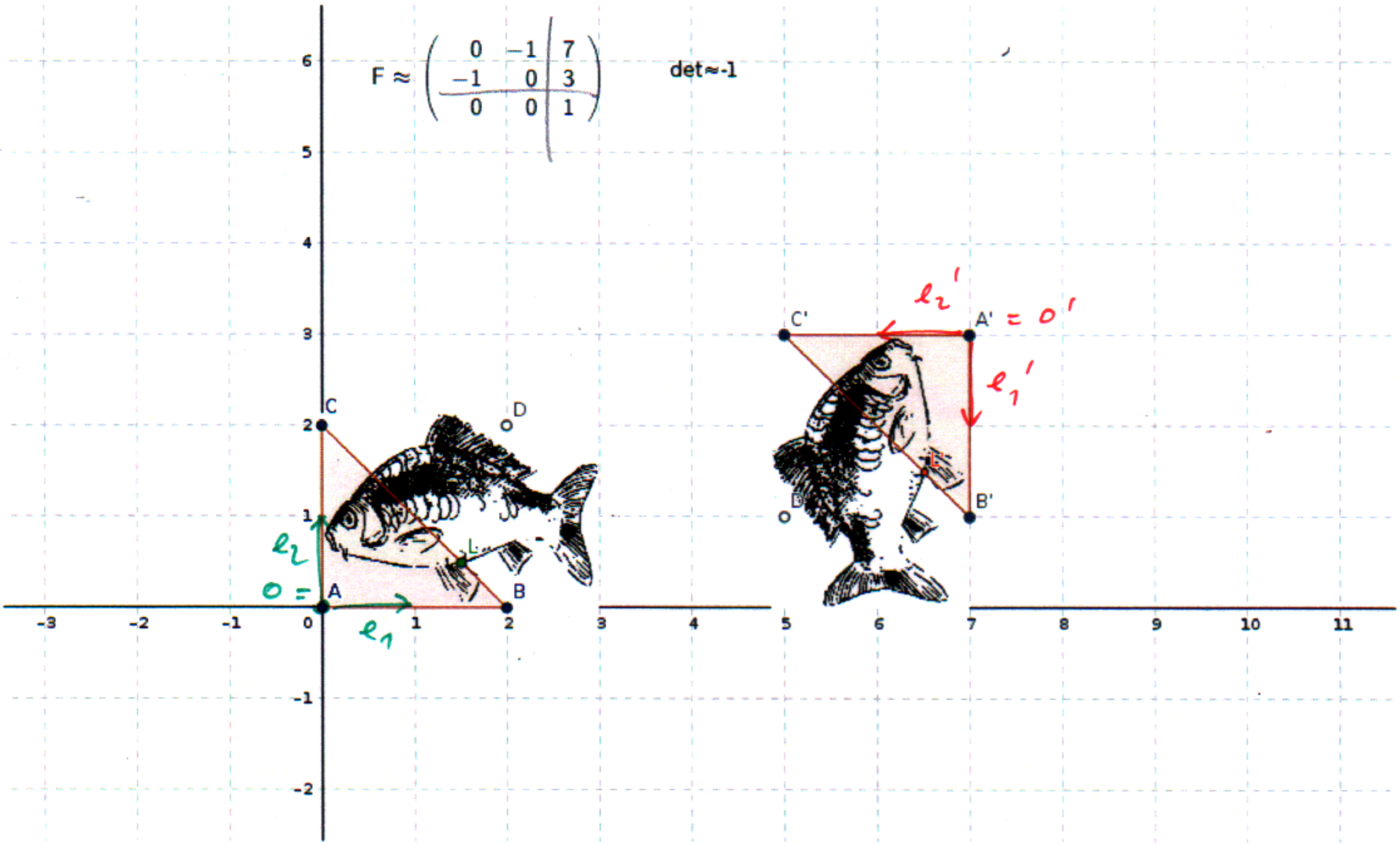
$$\left(\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

← to se ještě BUDE HODIT!!!

- konkrétně (po složkách):

$$x_1' = \cdot\, x_1 + \cdot\, x_2 + \cdot$$
$$x_2' = \cdot\, x_1 + \cdot\, x_2 + \cdot$$

# ŘEŠENÍ (A) ... PŘÍMO (SNADNO)




z předchozích interpretací:

$e_1' = -e_2$

$e_2' = -e_1$

$O' = A'$

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1' &= 0\,x_1 + -1\,x_2 + 7 \\ x_2' &= -1\,x_1 + 0\,x_2 + 3 \end{aligned}$$

---

pozn .. zde velmi snadné, neboť zadání vztaženo přátelsky k souřadné soustavě $\left(O = A,\ e_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \ldots\right)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$O' = A'$ $e_1' = \frac{1}{2}A'B'$ ...

ŘEŠENÍ (B) ... NEPŘÍMO (soustava rovnic)

- hledáme $a, b, c, d, k, l \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a & c & k \\ b & d & l \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

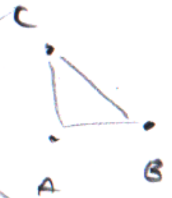
- aby $A \mapsto A'$ ... $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$, tj.
- aby $B \mapsto B'$ ... $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$, tj.
- aby $C \mapsto C'$ ... $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$, tj.

$k = 7$
$l = 3$

$2a + k = 7$
$2b + l = 1$

$2c + k = 5$
$2d + l = 3$

CELKEM $\boxed{6}$ lin. rovnic
$\boxed{6}$ neznámých ...




v obecné poloze

... jednoznačné řešení:

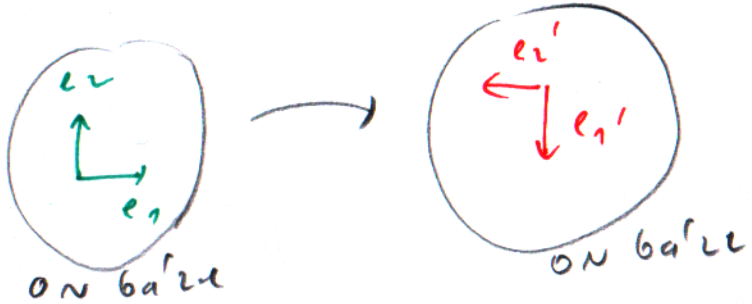
$a = 0 \quad c = -1 \quad k = 7$

$b = -1 \quad d = 0 \quad l = 3$ ✓

# TYP zobrazení ...

... je vždy schován v typu matice

$$F = \left(\begin{array}{cc} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \quad \text{resp.} \quad D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} e_1' & e_2' \end{array} \end{array}$$

... 


, tedy zobr. je **SHODNÉ**.

... formálně

$$\begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} e_1' & e_2' \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} \overset{e_1'\cdot e_1'}{1} & \overset{e_1'\cdot e_2'}{0} \\ 0 & \underset{e_2'\cdot e_2'}{1} \end{pmatrix}$$

---

... zejména:

det $F$ = det $D$ = $-1 \neq 0$, tj. NEDEGENEROVANÉ (prosté) ✓

$-1 < 0$, tj. NEPŘÍMÉ ✓

$|-1| = 1$, tj. EKVI-AFINNÍ ✓

ZÁKLADNÍ TRANSFORMACE ...

... mají "hodně" PEVNÝCH bodů (vlastní/nevlastní)

... základní shodnost v rovině (dim $\boxed{2}$) = 

= osová souměrnost

⇝ ~~...~~ přímka (dim $\boxed{1}$) pevných bodů $\underbrace{\phantom{x}}_{\text{vlastních}}$

... v našem případě:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}}$$

$\Downarrow$

(soustava $\boxed{2}$ lin. rovnic $\boxed{2}$ neznámých) → 

$$\boxed{\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 7 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 3 &= 0 \end{aligned}}$$

... nemá řešení

tj. NENÍ základní

DRUH zobrazení ...

... umíme určit, protože se jedná o :

- shodnost
- nepřímou
- bez pevných bodů

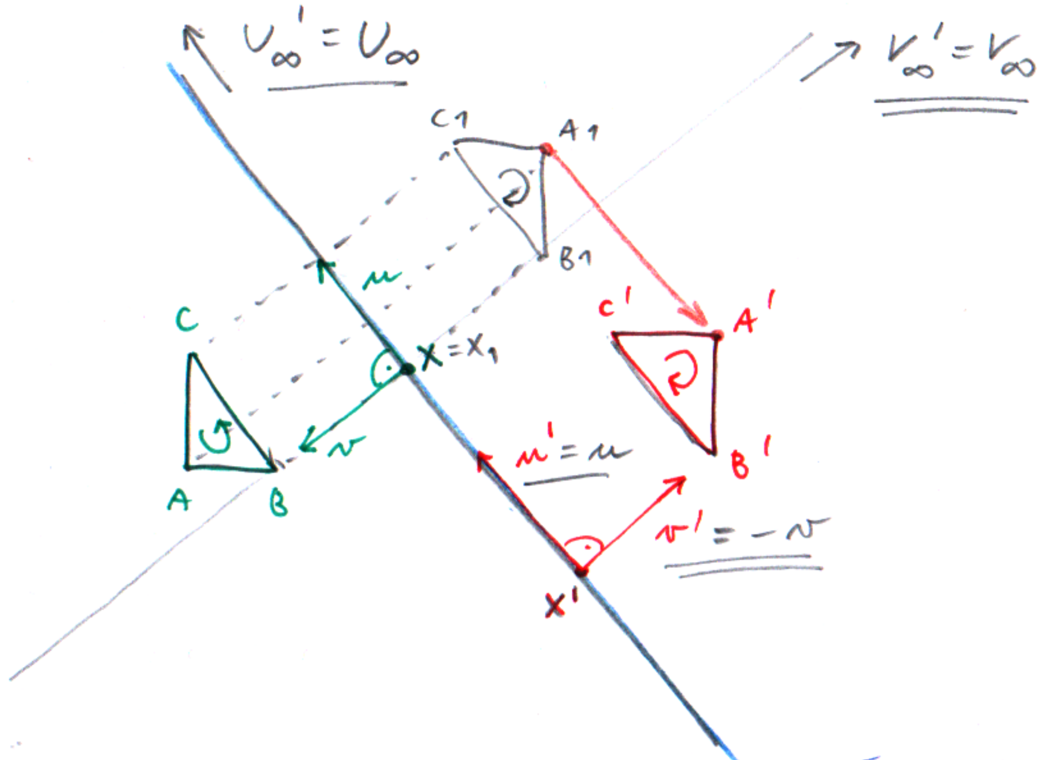
⇓

$\boxed{\text{POSUNUTÁ SOUMĚRNOST}}$ ← připomenutí všech SHODNOSTÍ v rovině viz dále ...

BONUS ... popište určující prvky tohoto zobr.

↑ čím a jak geometricky je určeno ?

POZN ... POSUNUTÁ SOUMĚRNOST = složení osové souměrnosti a posunutí:




... na rozdíl od OSOVÉ SOUMĚRNOSTI: žádné vlastní pevné body

"samodružné body"

"samodružné směry"

.... stejně jako osová SOUMĚRNOST: dva nevlastní pevné body ($U'_\infty = U_\infty$, $V'_\infty = V_\infty$, na které ukazují vektory $u' = u$ a $v' = -v$)

... v našem příkladě $\quad x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{+1} \cdot u \quad \checkmark$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{-1} \cdot v \quad \checkmark$$

charakteristické vektory lin. zobrazení s maticí $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ odp. char. hodnotě

$\lambda = \boxed{+1}$, resp. $\boxed{-1}$ !

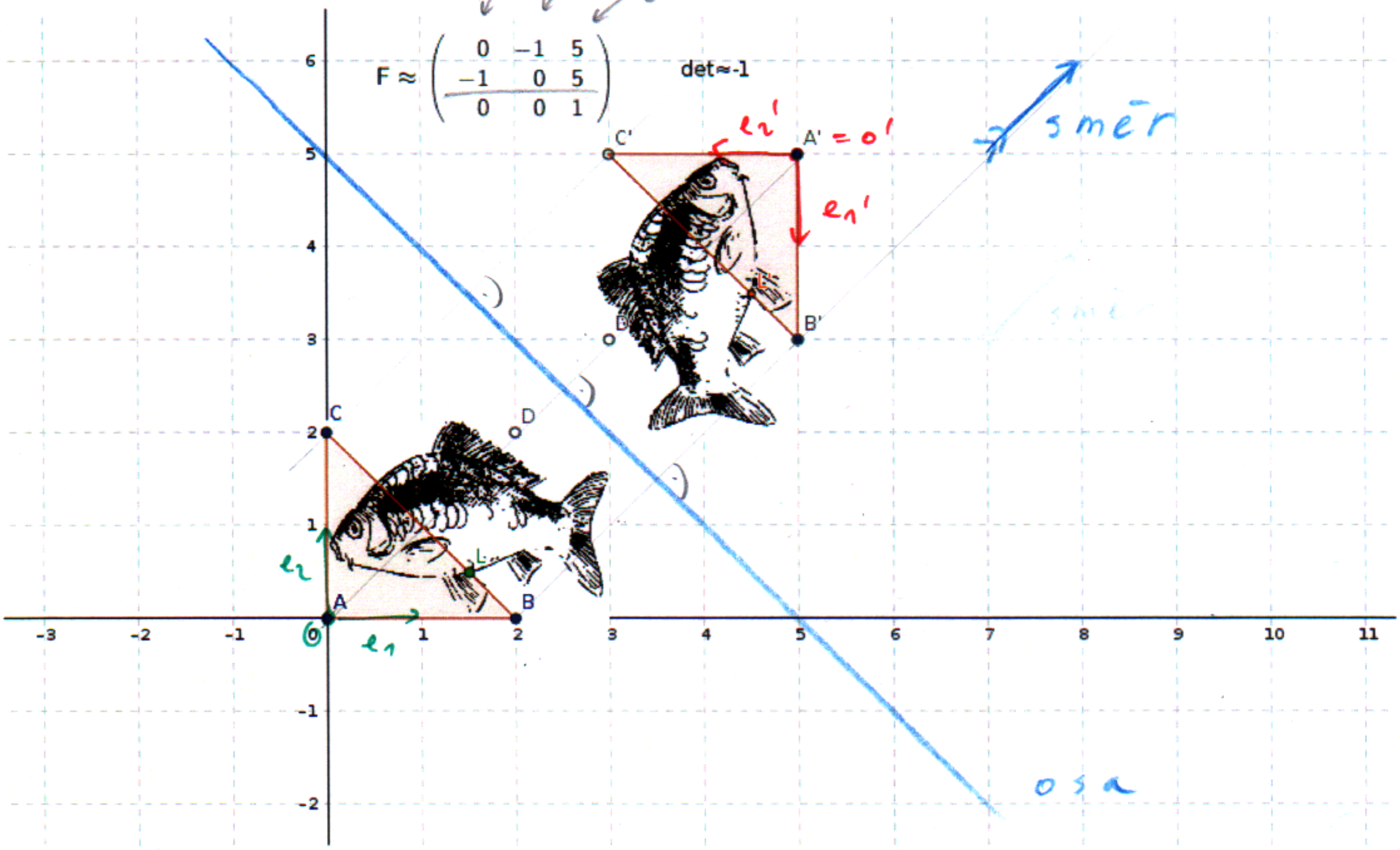
tj. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ je řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \lambda X \qquad \text{pro } \lambda = \boxed{+1}$$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ —— " —— $\qquad$ pro $\lambda = \boxed{-1}$

(... a všechny jejich násobky)

# 2. DALŠÍ PŘÍKLADY SHODNOSTÍ:




- $e_1' \perp e_2'$, $\|e_1'\| = \|e_2'\|$ ... ON báze $\Rightarrow$ SHODNOST
- $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow$ NEPŘÍMÁ
- vlastní pevné body:

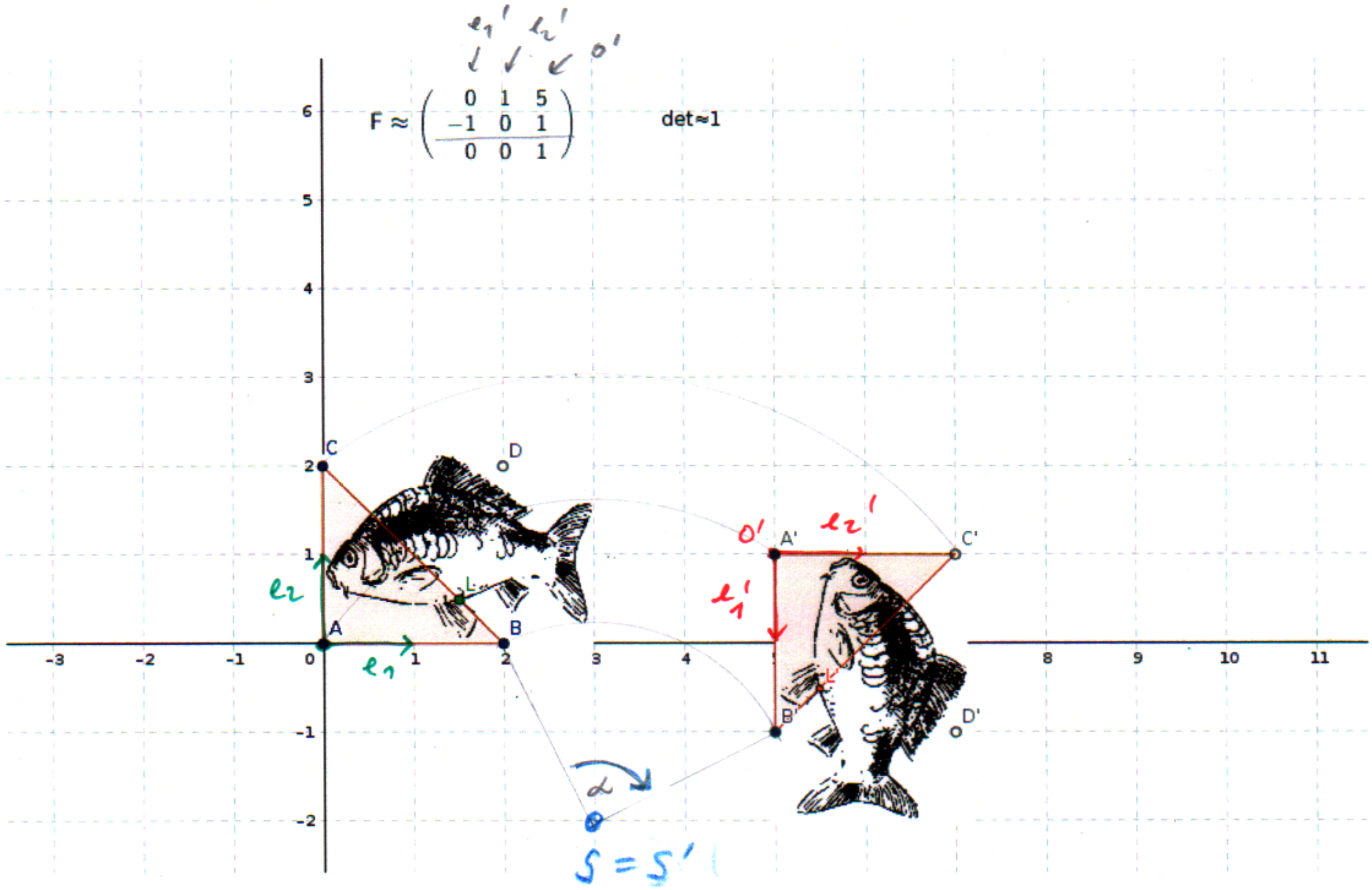
  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{x_1 + x_2 = 5}$ OSA

- nevlastní pevné body:

  $\lambda = 1: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ = směr osy

  $\lambda = -1: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp$ ose

$\boxed{\text{OSOVÁ SOUMĚRNOST}}$




- $e_1', e_2'$ ... ON báze $\Rightarrow$ SHODNOST ✓
- $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow$ přímá ✓
- vlastní pevné body:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{matrix}} \text{ STŘED} ✓$$

- nevlastní ...

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ pouze } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ✓$$

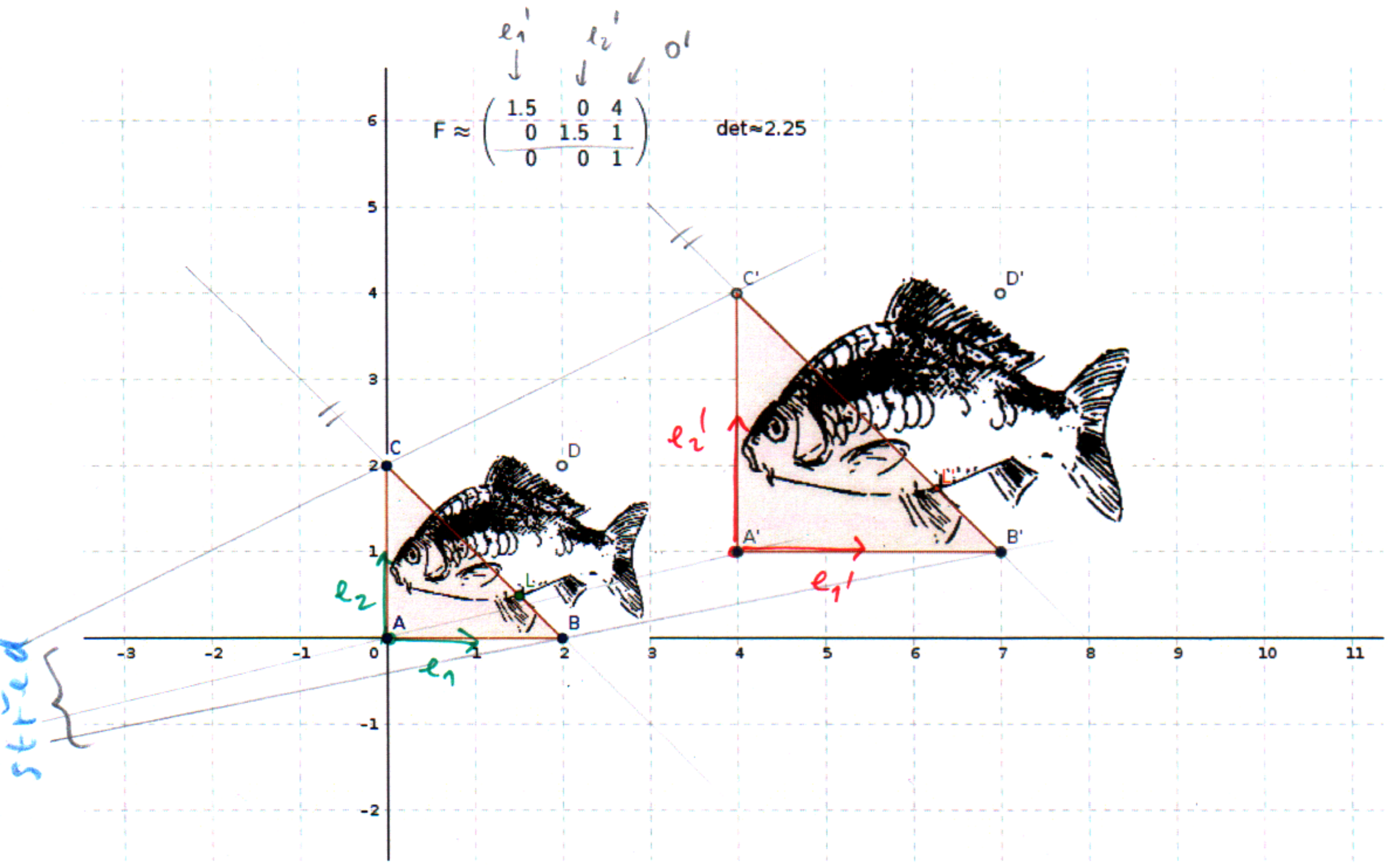
$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- BONUS ... char. čísla:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \pm i}$$

odp. ÚHLU otáčení $\alpha = 90°$ ✓

$\boxed{\text{OTÁČENÍ}}$




* $e_1' \perp e_2'$, $\|e_1'\| = \|e_2'\| = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ PODOBNOST s koef. $k = \frac{3}{2}$

(tj. $\pm k^2$)

* $\det \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{9}{4} > 0$ $\Rightarrow$ PŘÍMÁ

* vlastní pevné body:

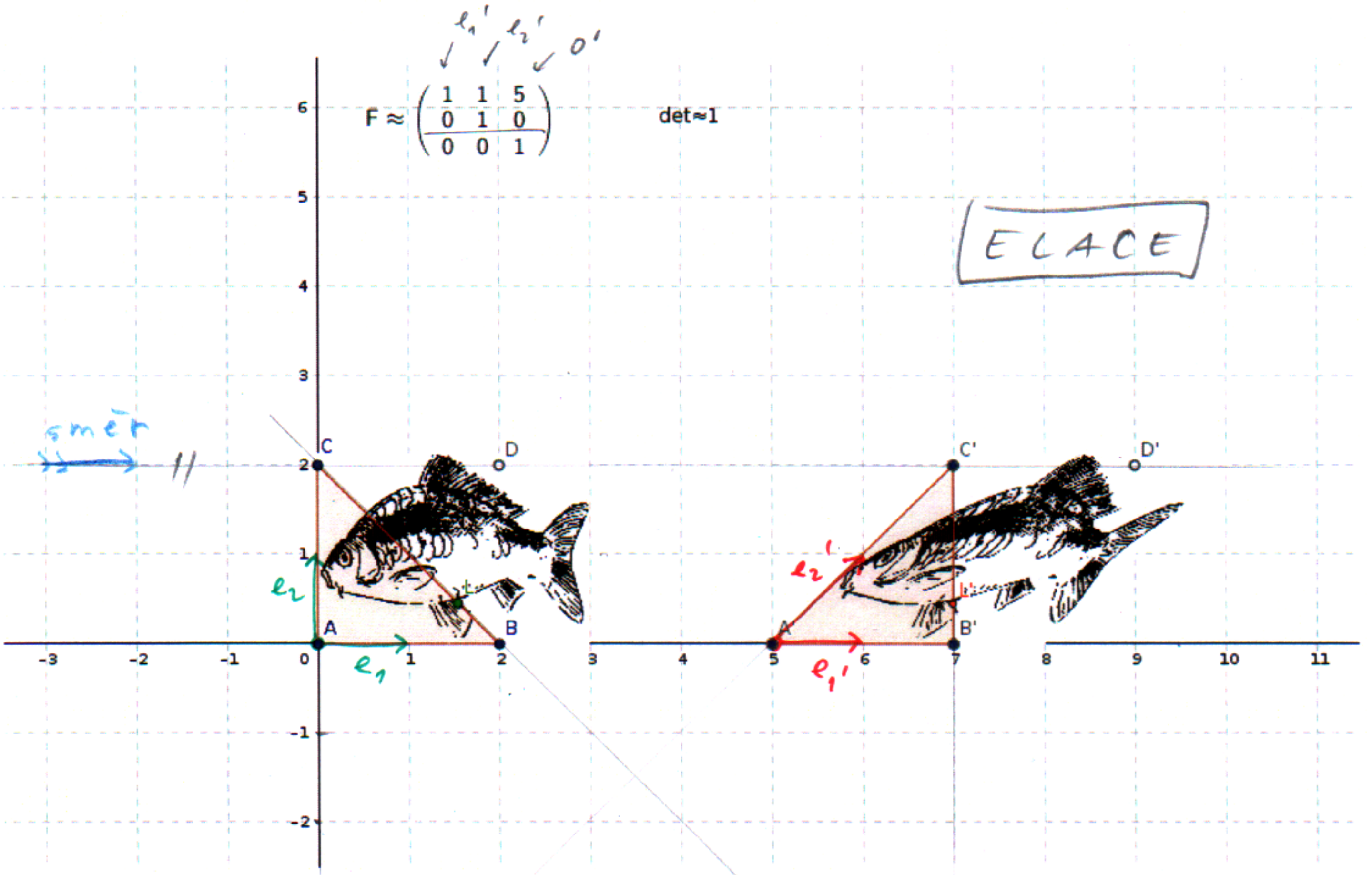
$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = -8 \\ x_2 = -2 \end{matrix}}$$ STŘED

* nevlastní ...

$$\lambda = \frac{3}{2} : \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ VŠECHNY

(tj. nevlastní osa)

$\boxed{\text{STEJNOLEHLOST}}$




* $e_1' \not\perp e_2'$ ⇒ NENÍ shodné ani podobné ✓


* $\det\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \underline{1 > 0}$ ⇒ PŘÍMÉ a EKVI-AFINNÍ

* vlastní pevné body:

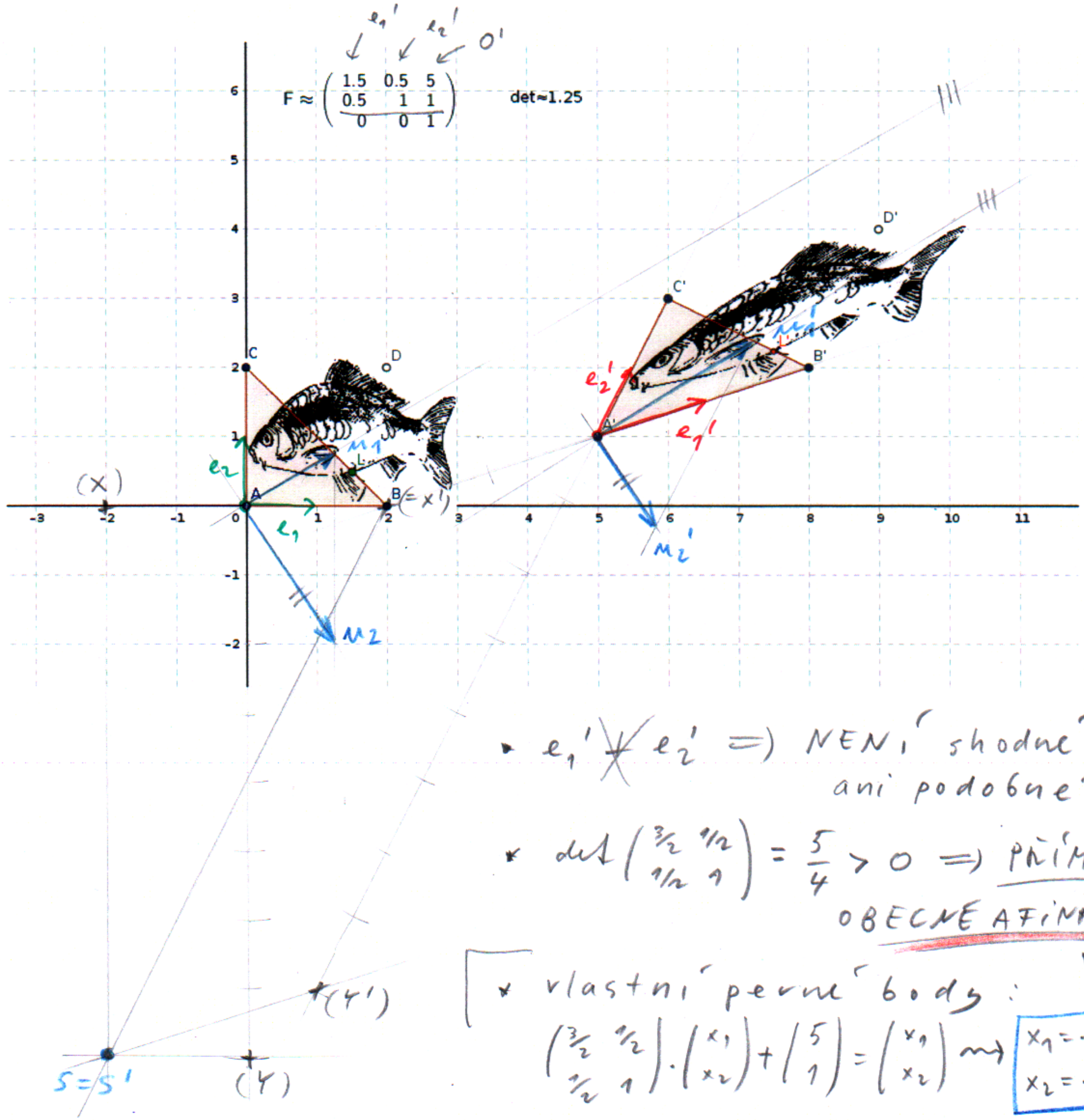
$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{x_2=-5} \text{ OSA ✓}$$

* nevlastní ...

$$\lambda = 1: \quad \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \text{směr osy ✓}$$

* další char. čísla skutečné NEJSOU:

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda&1\\0&1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ ✓}$$




- $e_1' \not\perp e_2' \Rightarrow$ NENÍ shodné ani podobné ✓
- $\det\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow$ PŘÍMÉ OBECNÉ AFINNÍ ✓
- vlastní pevné body:

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -8 \end{matrix}}$$

- char. čísla:

$$\det\begin{pmatrix} 3/2 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$$

- char. vektory ~ nevlastní pevné body:

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{4} \rightsquigarrow u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{4} \rightsquigarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

# 3. PŘÍKLAD – SKLÁDÁNÍ

$$G := \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \ldots \text{ posunutá souměrnost } (s. 3)$$

$$H := \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \ldots \text{ osová souměrnost } (s. 10)$$

NÁSOBENÍ MATIC

$$F = \underbrace{H \circ G}_{\text{SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ}} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow \text{tj. } X' = X + \binom{2}{-2}$$

... CO JSME DOSTALI ?

... $\boxed{\text{POSUNUTÍ}}$ ! ← o vektor $\binom{2}{-2}$

- SHODNOST ✓
- PŘÍMÁ ✓
- PEVNÉ BODY
  - ŽÁDNÉ VLASTNÍ ✓
  - VŠECHNY NEVLASTNÍ ✓