OPAKOVÁNÍ

PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ ZOBRAZENÍ ...

$$\dots \left(\begin{array}{c} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ \hline 1 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1' & e_2' & \cdots & o' \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \end{array} \cdot \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

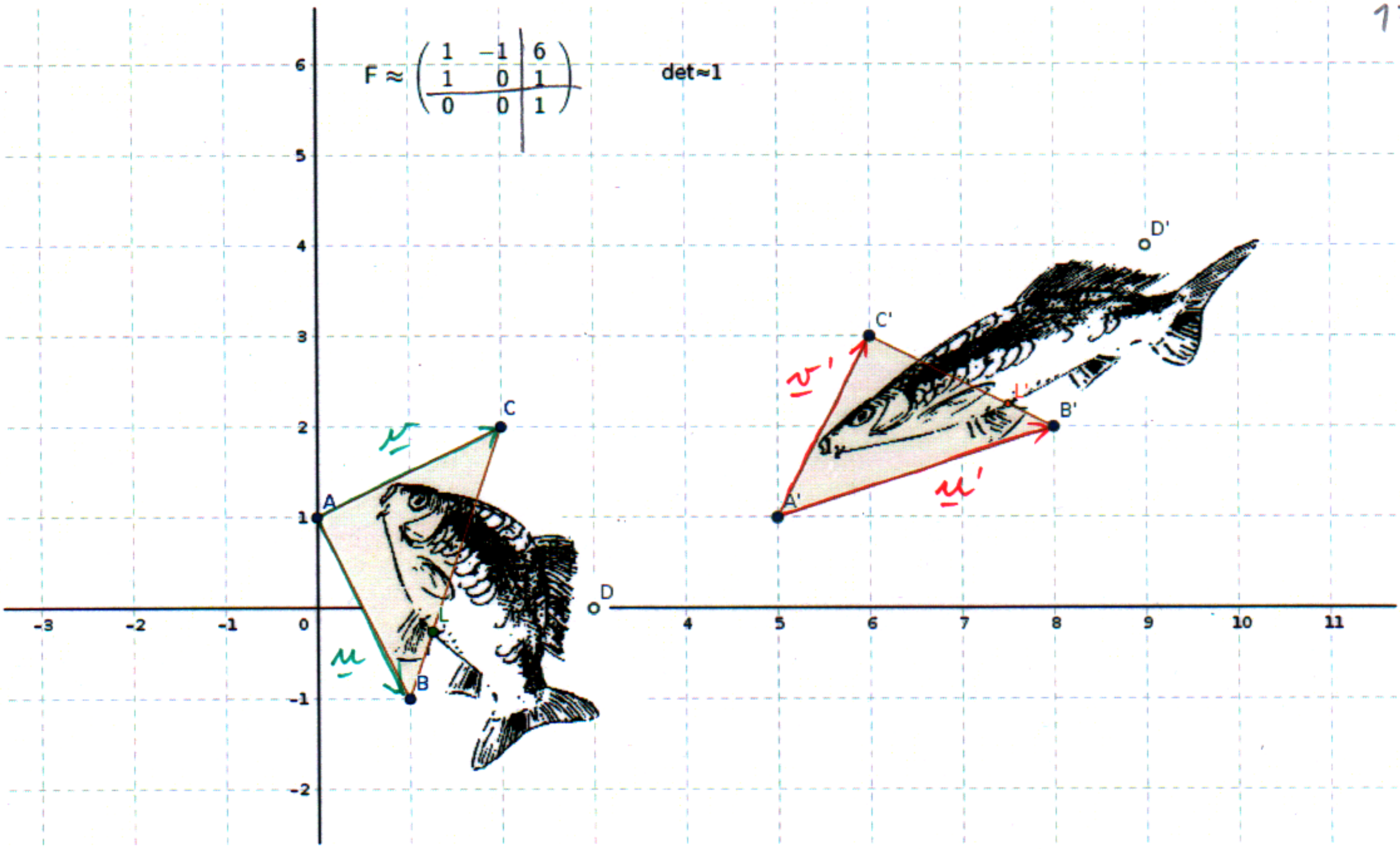
- jde PŘÍMO a SNADNO, pokud jde přímo a snadno určit obrazy $e_1', e_2', \dots, o'$ (většina předchozích příkladů)

- OBECNĚ třeba řešit SOUSTAVU LIN. ROVNIC

  ... viz s. 4, 17, 18

- ALTERNATIVNĚ složením dvou jednodušších zobrazení (INVERZNÍ MATICE)

  ... viz s. 19



(A) přímo (NESNADNO) z předchozího:

$$\underline{e}_1 = \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{u} + \boxed{\tfrac{2}{5}}\,\underline{v}$$

$$\underline{e}_2 = \boxed{-\tfrac{2}{5}}\,\underline{u} + \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{v}$$

$$o = A - \underline{e}_2$$

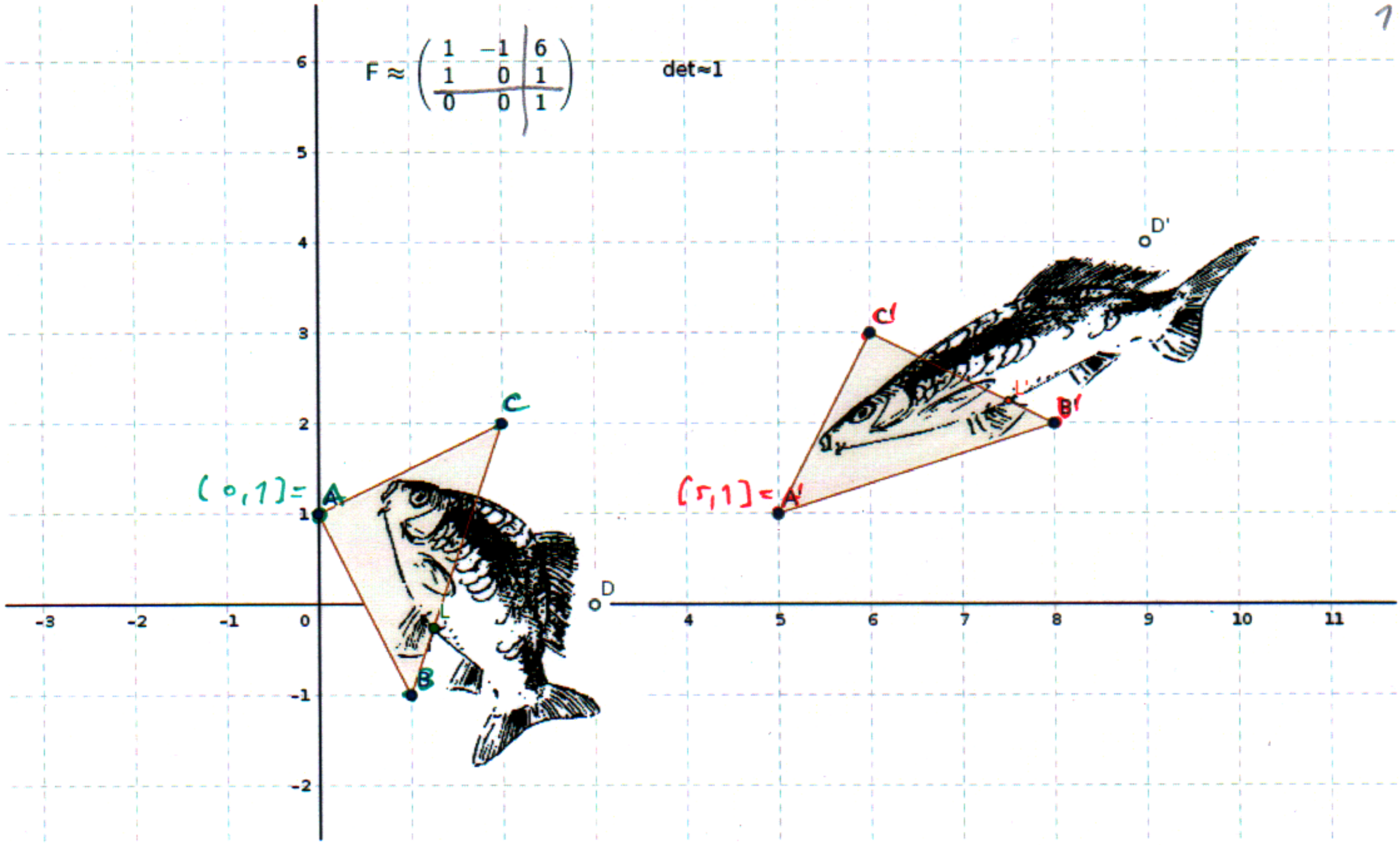
$$\underline{e}_1' = \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{u}' + \boxed{\tfrac{2}{5}}\,\underline{v}' = (1,1)$$

$$\underline{e}_2' = \boxed{-\tfrac{2}{5}}\,\underline{u}' + \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{v}' = (-1,0)$$

$$o' = A' - \underline{e}_2' = (6,1)$$

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

soustava rovnic „souřadnice vektorů $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ v bázi $(\underline{u}, \underline{v})$ ..."



B) NEPŘÍMO — dosazení dvojic bodů:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} a & c & k \\ b & d & l \\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

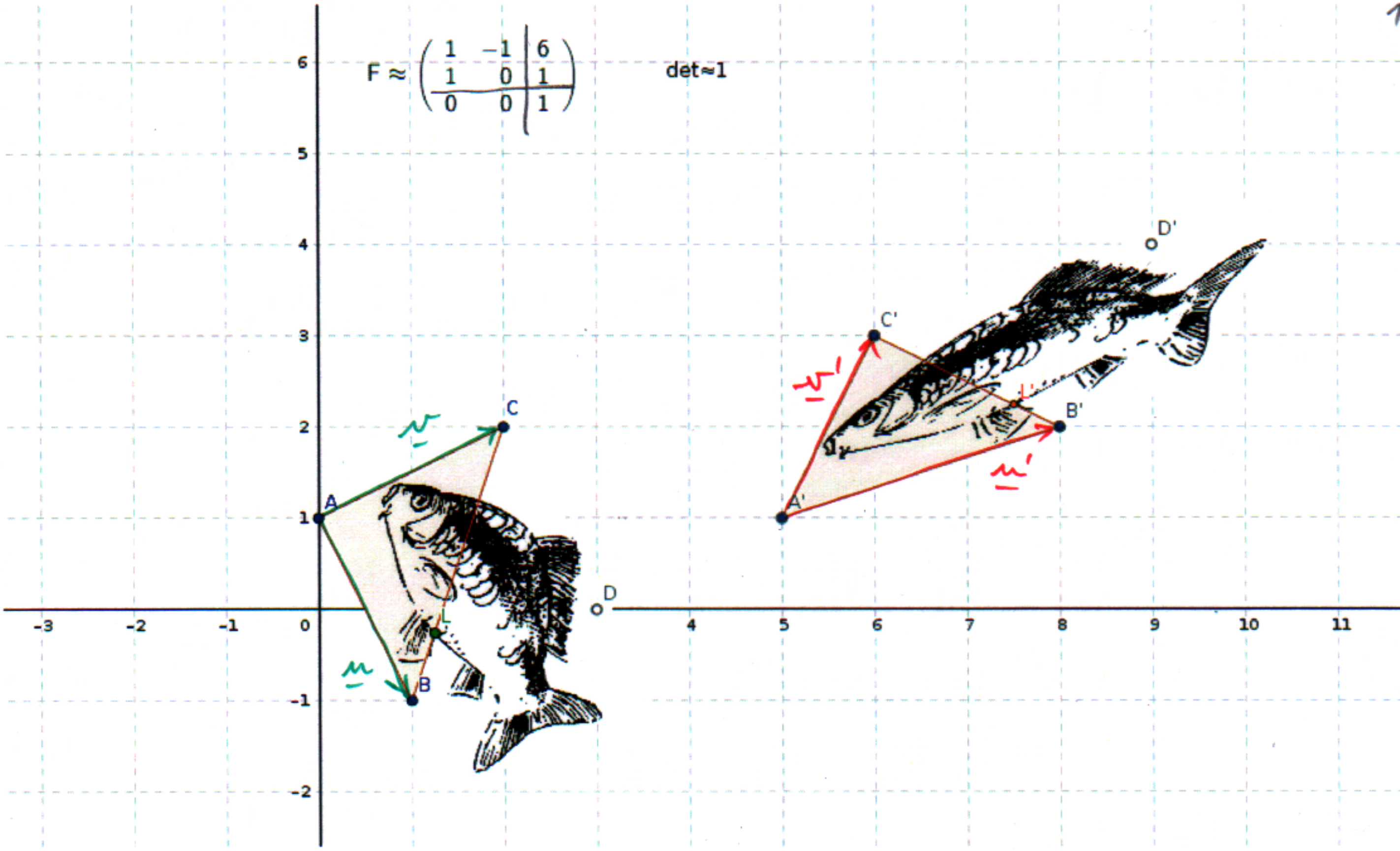
- $A \mapsto A'$: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 5 = c + k \\ 1 = d + l \end{matrix}}$
- $B \mapsto B'$: $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \cdot \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 8 = a - c + k \\ 2 = b - d + l \end{matrix}}$
- $C \mapsto C'$: $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \cdot \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \cdot \; \cdot \end{matrix}}$

CELKEM $\boxed{6}$ lin. ROVNIC / $\boxed{6}$ neznámých ...

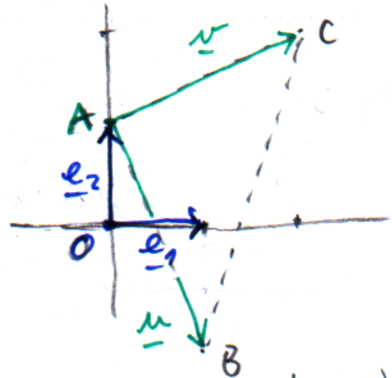
.... jednoznačné řešení:

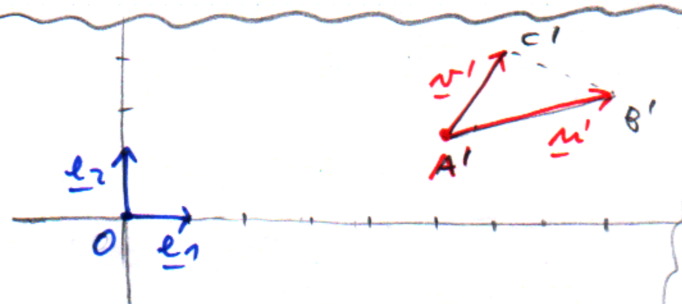
$a = 1 \quad c = -1 \quad k = 6$

$b = 1 \quad d = 0 \quad l = 1$



(c) NEPŘÍMO — SLOŽENÍM JEDNODUŠŠÍCH!





$$\underbrace{G = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad H = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

podobnost s koef. na s. 17 NENÍ náhodná!

$$F \circ G = H, \quad \text{tj.} \quad F = H \circ G^{-1}$$

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{array}{cc} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}} & \begin{array}{c} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{array} \\ \hline 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

TYPY ZOBRAZENÍ ...

... vzhledem ke kartézským souřadnicím:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \vdots & \\
 & \begin{array}{c}\text{AFINNÍ} \\ X' = \left(\begin{array}{cc} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\cdot X\end{array} \arrow[u] & \\
\begin{array}{c}\text{PODOBNÉ} \\ D^T \cdot D = k^2 E\end{array} \arrow[ur] & & \begin{array}{c}\text{EKVI-AFINNÍ} \\ \det(D^T \cdot D) = 1\end{array} \arrow[ul] \\
 & \begin{array}{c}\text{SHODNÉ} \\ D^T \cdot D = E\end{array} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

k ... koeficient podobnosti

... viz minulý semestr (s. 133–135) a předchozí příklady

ZOBR. MEZI PROSTORY STEJNÉ DIMENZE ...

... matice D ČTVERCOVÁ:

- $\det D$ $\begin{cases} \neq 0 & \text{... vzáj. jednoznačné (zejm. prosté)} \\ = 0 & \text{... degenerované (neprosté)} \end{cases}$
- $\det D$ $\begin{cases} > 0 & \text{... přímé (zach. orientaci)} \\ < 0 & \text{... nepřímé (mění — // —)} \end{cases}$

- SHODNÉ $\longrightarrow$ PODOBNÉ

  $\det D = \pm 1$ $\qquad$ $\det D = \pm k^n$

  dim. prostoru

  koef. podobnosti

  $\searrow$ EKVI-AFINNÍ

  $\det(D^T \cdot D) = 1$

- zejména: SHODNÉ, PODOBNÉ, EKVIAF. $\rightarrow$ PROSTÉ.

PEVNÉ (SAMODRUŽNÉ) BODY ...

... VLASTNÍ ... $\boxed{D \cdot X + C = X}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \boxed{1} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{(D - E) \cdot X = -C} \qquad (*)$$

... NEVLASTNÍ ... $\boxed{D \cdot X = \lambda X}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ \boxed{0} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ \boxed{0} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{(D - \lambda E) \cdot X = 0} \qquad (**)$$

... z algebry víme, že soustava $(**)$ má <u>netriviální</u> řešení (tj. $X \neq 0$) $\iff$ $\boxed{\det(D - \lambda E) = 0}$!

... tzv. "char. polynom"

... kořeny = "char. čísla"

... odp. řešení $(**)$ = "char. vektory"

OBECNĚ PLATÍ (ALGEBRA):

* char. vektory (nenulové) odp. různým číslům λ jsou lin. nezávislé.

řešení homog. soustavy lin. rovnic (**)

* char. vektory odp. číslu λ tvoří vektorový podpr., jehož dimenze $\leqq$ alg. násobnost λ.

(příklad $\lneqq$ na s. 13)

* det D = součin všech char. čísel vč. násobnosti.

(netriv. příklad na s. 14) obecně komplexních (viz s. 11)

PRO AFINNÍ ZOBR:

řešení nehomog. soustavy (*)

* vlastní pevné body tvoří afinní podpr. (nebo $\emptyset$).
* nevlastní - - - odp. různým char. číslům jsou různé.

(odp. vektory nezávislé)

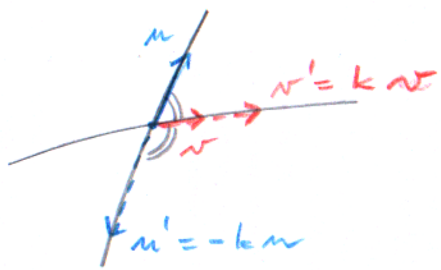
PRO PODOBNÉ (tedy i SHODNÉ):

koef. podobnosti

* $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\underline{\lambda = \pm k}$.

... $\|u'\| \overset{!}{=} k\,\|u\|$ pro lib. $u \in V$

* char. vektory odp. různým číslům λ jsou kolmé.



- $\alpha := \sphericalangle(u,v) \overset{!}{=} \sphericalangle(u',v') =: \alpha'$
- $\underbrace{\alpha + \alpha' = 180°}_{\alpha = 90°}$

(viz např. s.9)

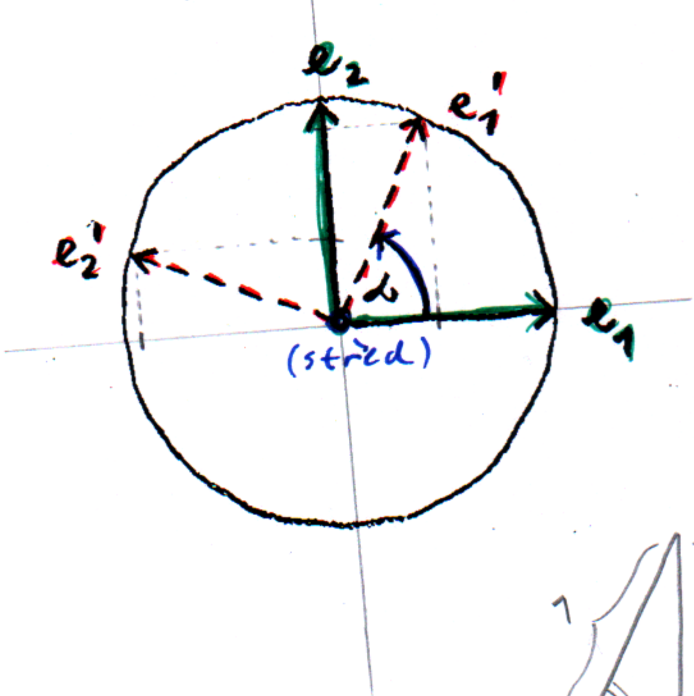
PRO PODOBNÉ, KTERÉ NENÍ SHODNÉ:

* ... má vždy právě jeden vlastní pevný bod!
  - vlastní pevné body = řešení soust. $(D-E)\cdot X = -C$ (s.22)
  - jednoznačné řešení $\Longleftrightarrow$ $\det(D-E) \neq 0$

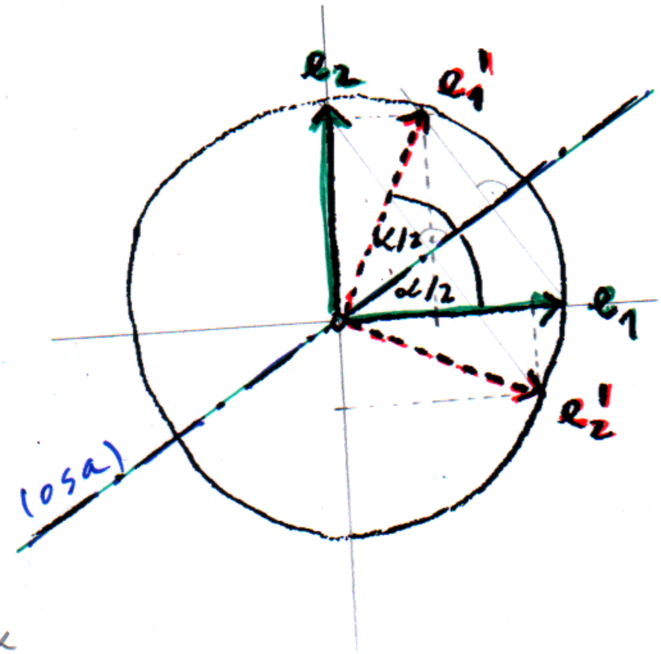
    $\Longleftrightarrow$ $\lambda = 1$ není char. číslem
  - podobné, ne shodné $\Longrightarrow$ jediné $\lambda = \pm k \neq 1$.

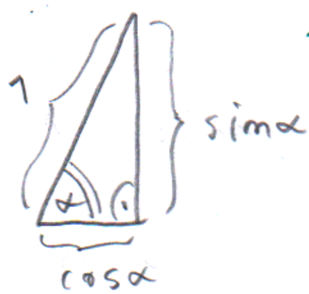
SHODNOSTI V ROVINĚ

přímá



nepřímá





$$\begin{array}{ccc} & e_1' & e_2' \\ D = & \left(\begin{array}{c|c} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & e_1' & e_2' \\ D = & \left(\begin{array}{c|c} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right) & \end{array}$$

... být shodností v rovině je natolik omezující, že matice zobr. mohou být jen <u>dvojího</u> typu.

... interpretace úhlu $\underline{\alpha}$ je naznačena v obrázcích.

SHODNOSTI V ROVINĚ . . .

Samodružné body \ Samodružné směry	Žádný	Právě dva na sebe kolmé	Každý
Žádný		N $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ Posunutá souměrnost	P $X' = X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$; $e \neq 0$ Posunutí
Právě jeden	$X' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} X$ P $\alpha \neq k\pi$, k celé Rotace o úhel α se středem v počátku		P $X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ Středová souměrnost podle počátku
Vyplní přímku		$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ N Souměrnost podle osy x	
Každý			$X' = X$ P Identita

. . . KLASIFIKACE PODLE SAMODR. PRUHŮ.

. . . všechna vyjádření vzhledem ke VHODNÝM souř. soustavám.

. . . všimněme si prázdných polí!