OPAKOVÁNÍ

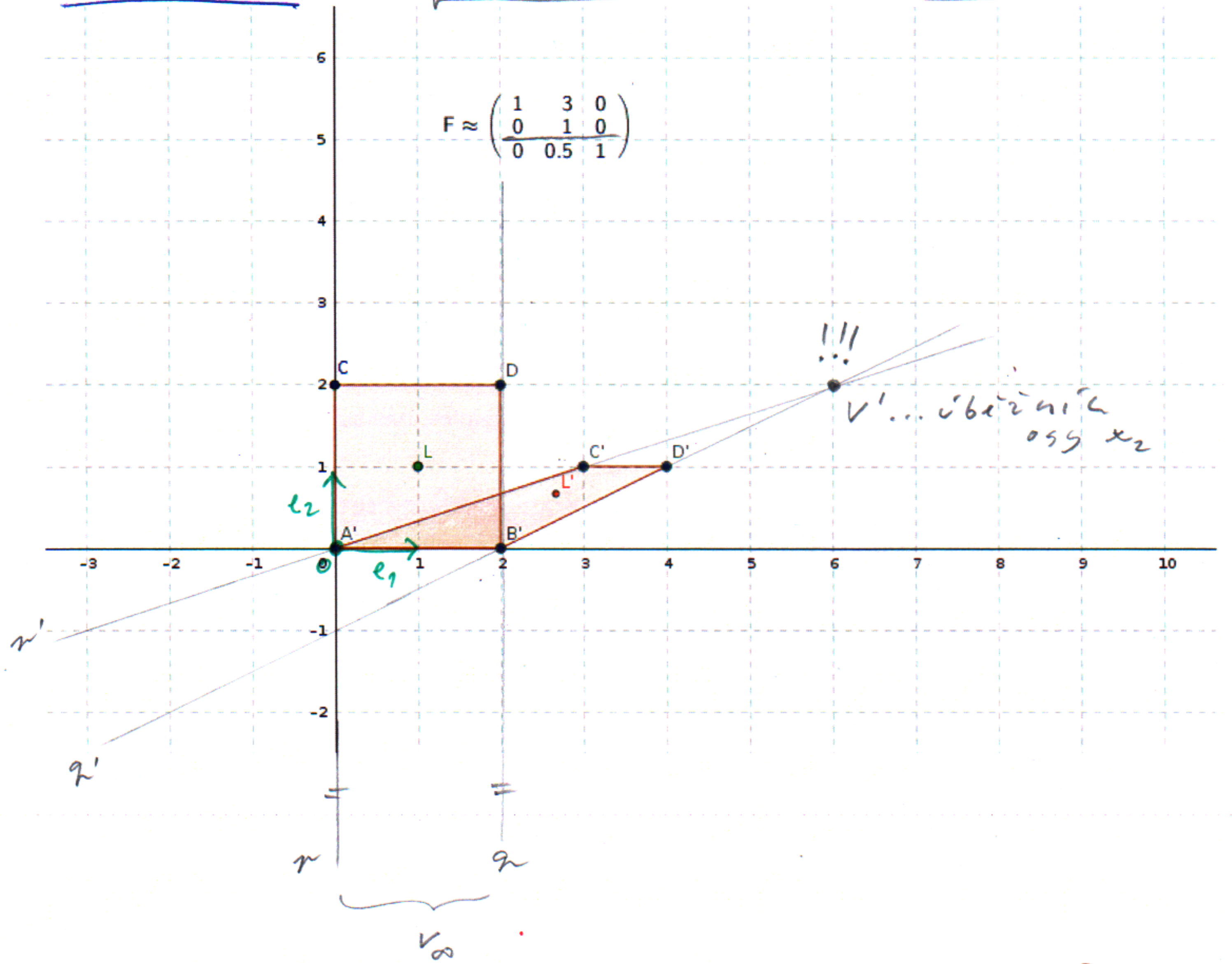
PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

ROZŠÍŘENÍ

CO TEĎ?

PROJEKTIVNÍ ELACE



- v duchu předchozích příkladů UMÍME interpretovat:

e_1' ... obraz 1. bázového vektoru
O' ... obraz počátku

$$F = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \underline{1/2} & 1 \end{array}\right)$$

- ale co znamená toto ??

- nelze přehlédnout, že $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ odpovídá právě úběžníku V' !! (což NENÍ náhoda)

S <u>rozšířenými souřadnicemi</u> jsme dosud pracovali takto:

- bod $X = [x_1, x_2]$ $\rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$
- vektor $\underline{v} = (x_1, x_2)$ $\rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$

Běžně jsme užívali:

- vektor $\underline{v} = (x_1, x_2)$, resp. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$ <u>UKAZUJÍ</u> na tentýž $\boxed{\text{NEVLASTNÍ}}$ BOD jako kterýkoli jeho násobek ...

$$V_\infty \xleftarrow{\;k\cdot\underline{v}\;} \cdot \xrightarrow{\;\underline{v}\;} V_\infty$$

$k \in \mathbb{R}$ lib. (nenulové)

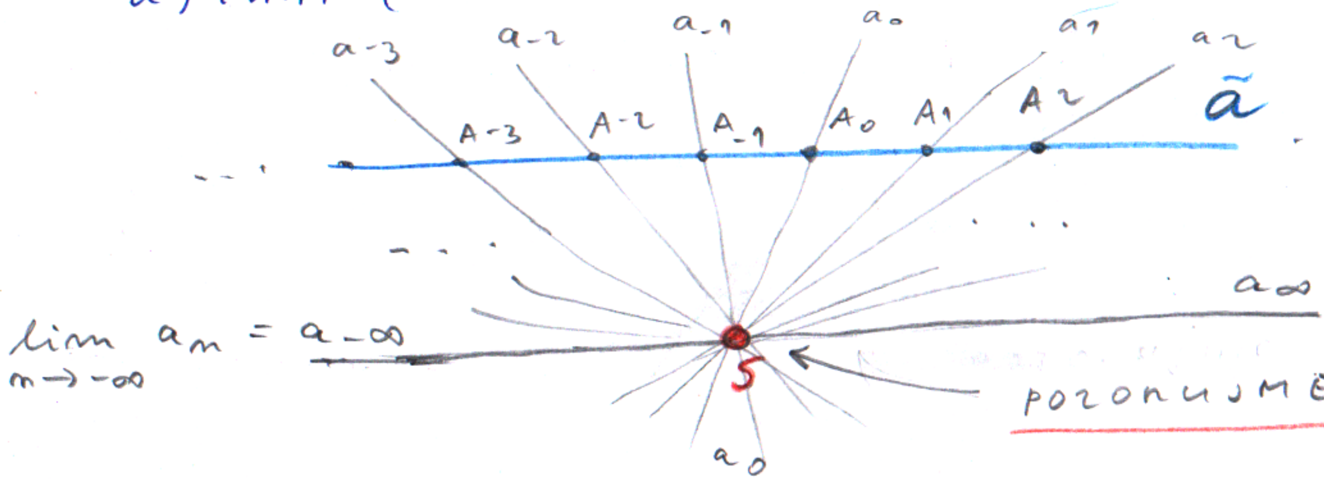
Co kdybychom připustili, že

- vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$ <u>UKAZUJE</u> na tentýž $\boxed{\text{VLASTNÍ}}$ BOD jako kterýkoli jeho násobek ...?

(na násl. stranách vysvětlíme/upřesníme a pak se vrátíme k příkladu na s. 27)

OPAKOVÁNÍ

- Jak jsme počítali NEVLASTNÍ body rozšířené afinní (eukleidovské) přímky ?

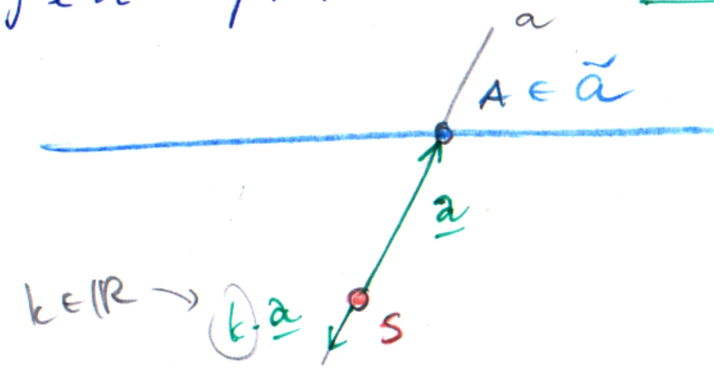


$a_\infty = \lim_{n \to \infty} a_n$

← POZORUJME ZVENKU !

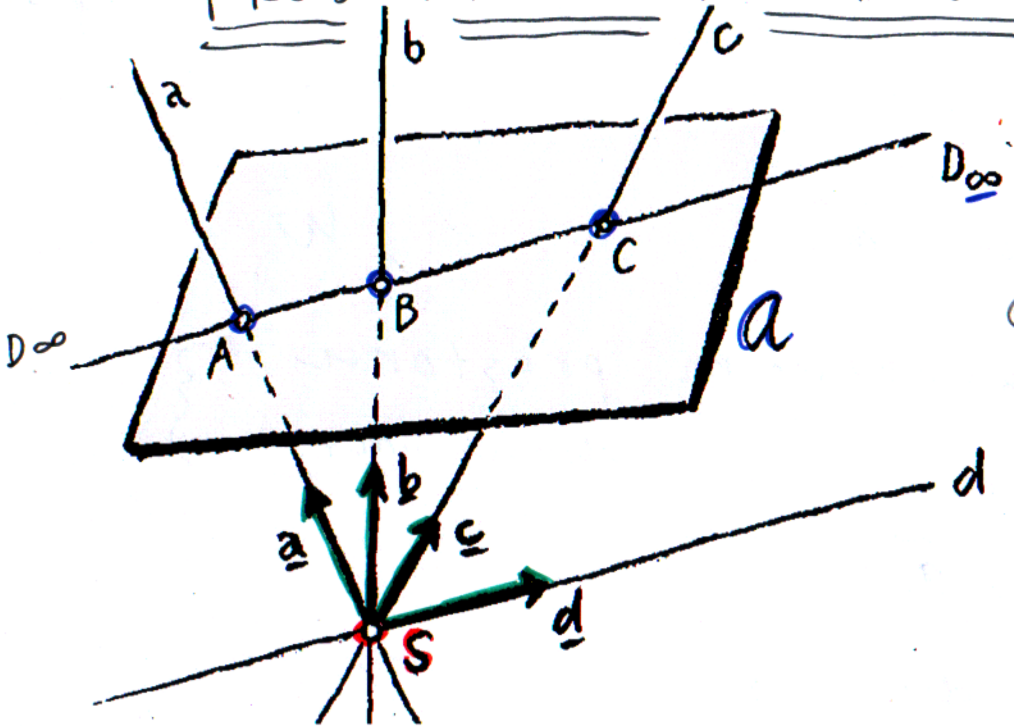
$a_\infty \overset{!}{=} a_{-\infty}$ ... jediný NEVLASTNÍ BOD !

⇝ Nyní jen přidáme VEKTORY (resp. směry) ..



← na každý bod A UKAZUJEME z S vektorem $\underline{a}$, $k \cdot \underline{a}$ .. (který nás zajímá až na násobek !)

PROJEKTIVNÍ ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ



ZÁKLADNÍ PROJEKTIVNÍ TRIK

dívejme se na náš afinní prostor ($\mathcal{A}$) zvenku (S)!

- nadprostor "$\mathcal{A}+S$" ozn. $\mathcal{N}$
- zaměření $\vec{\mathcal{A}} \subset \vec{\mathcal{N}}$ ozn. $V \subset W$
- rozšířený prostor ozn. $\tilde{\mathcal{A}}$

- $\{$ vlastní body v $\tilde{\mathcal{A}} \}$ $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ přímky proch. S různoběžné s $\mathcal{A} \}$

  $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ směry ve W nepatří do $V \}$

- $\{$ nevlastní body v $\tilde{\mathcal{A}} \}$ $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ přímky proch. S rovnoběžné s $\mathcal{A} \}$

  $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ směry ve W patří do $V \}$

obecně

$\tilde{a}$

W

- projektivní prostor dim $\boxed{n}$

  $=$ { směry ve vektorovém prostoru dim $\boxed{n+1}$ }

  1-dim podprostory

  $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \tilde{a}$

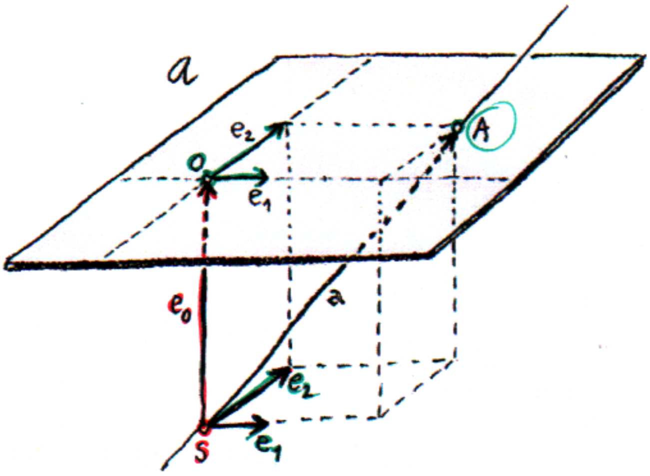
- projektivní podprostor dim $\boxed{k}$

  $=$ vektorový podprostor dim $\boxed{k+1}$

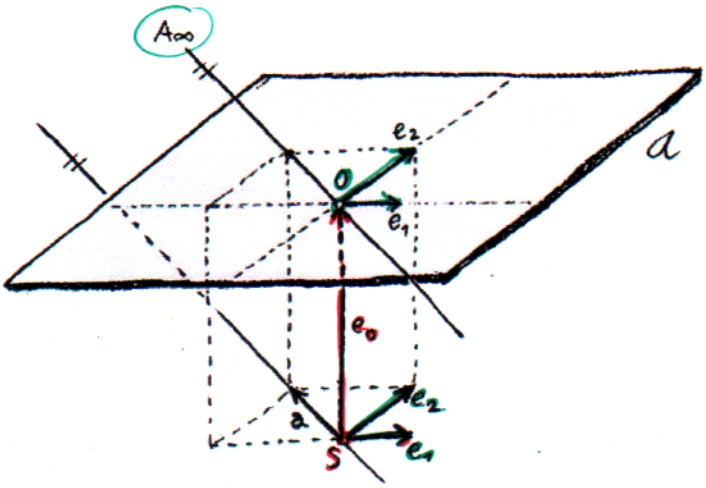
  $U \subseteq W$

HOMOGENNÍ POPIS

A vlastní



A nevlastní



vzhledem k afinní souř. soustavě

- **afinní souřadnice:**

$A = [3, 1]$ $\qquad$ $\underline{a} = (-2, 1)$

tj. $A = O + 3 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$ $\qquad$ $\underline{a} = -2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$

vzhledem k rozšířené souř. soustavě

- **homogenní souřadnice:**

$A = (3 : 1 : \boxed{1})$ $\qquad$ $A = (-2 : 1 : \boxed{0})$

tj. $A = S + \boxed{1 \cdot e_0} + 3 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$ $\qquad$ $A = S + \boxed{0 \cdot e_0} - 2 e_1 + 1 \cdot e_2$

(subs. $O = S + e_0$)

POZNÁMKY

- zápis $A = (3:1:\underline{1})$ nám připomíná, že nás mají zajímat toliko POMĚRY!
- tedy $A = (3:1:\underline{1}) = (-6:-2:\underline{-2}) = \dots$
- od HOMOGENNÍCH souř. k AFINNÍM:

$$A = (7:3:\underline{6}) = (7/6 : 1/2 : \underline{1})$$

$6 \neq 0 \Rightarrow$ vlastní bod:

$$A = [7/6, 1/2]$$

$$v = (-3:8:\underline{0})$$

$0 \Rightarrow$ nevlastní ... odp. vektor $v = (-3, 8)$

- umístění rozšířené souřadnice je věcí konvence...

  v tomto souboru dáváme nakonec (podle GeoGebry), v hlavním textu na začátek...

- příklad výpočtu vzájemné polohy přímky a roviny v 3-dim prostoru na další straně $\longrightarrow$

Afinní souřadnice

$$\mathcal{B} = \left\{ [1,1,0] + t(2,a,1) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \{ x_1 + 2x_2 = 2 \}$$

Společné body $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} (1+2t) + 2(1+at) &= 2, \\ (2+2a)t &= -1. \end{aligned}$$

Společné vektory $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$:

$$\begin{aligned} 2t + 2at &= 0, \\ (2+2a)t &= 0. \end{aligned}$$

Pro $a = -1$ je $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ a $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}} = \overrightarrow{\mathcal{B}}$,
tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **rovnoběžné**.

Pro $a \neq -1$ je $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} =$ bod, jmenovitě

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \left[\tfrac{2a}{2+2a}, \tfrac{2+a}{2+2a}, \tfrac{-1}{2+2a} \right],$$

tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **různoběžné**.

Homogenní souřadnice

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ \alpha(\underline{1}:1:1:0) + \beta(\underline{0}:2:a:1) \,\middle|\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \left\{ -2\underline{x_0} + x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

Společné body $\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}}$:

$$\begin{aligned} -2\alpha + (\alpha + 2\beta) + 2(\alpha + a\beta) &= 0, \\ \alpha + (2+2a)\beta &= 0, \\ \alpha &= -(2+2a)\beta. \end{aligned}$$

Tedy $\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}} =$ bod, jmenovitě

$$\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}} = (\underline{-2-2a} : -2a : -2-a : 1).$$

Pro $a = -1$ je $\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}}$ nevlastní,
tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **rovnoběžné**.

Pro $a \neq -1$ je $\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}}$ vlastní,
tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **různoběžné**.