OPAKOVÁNÍ

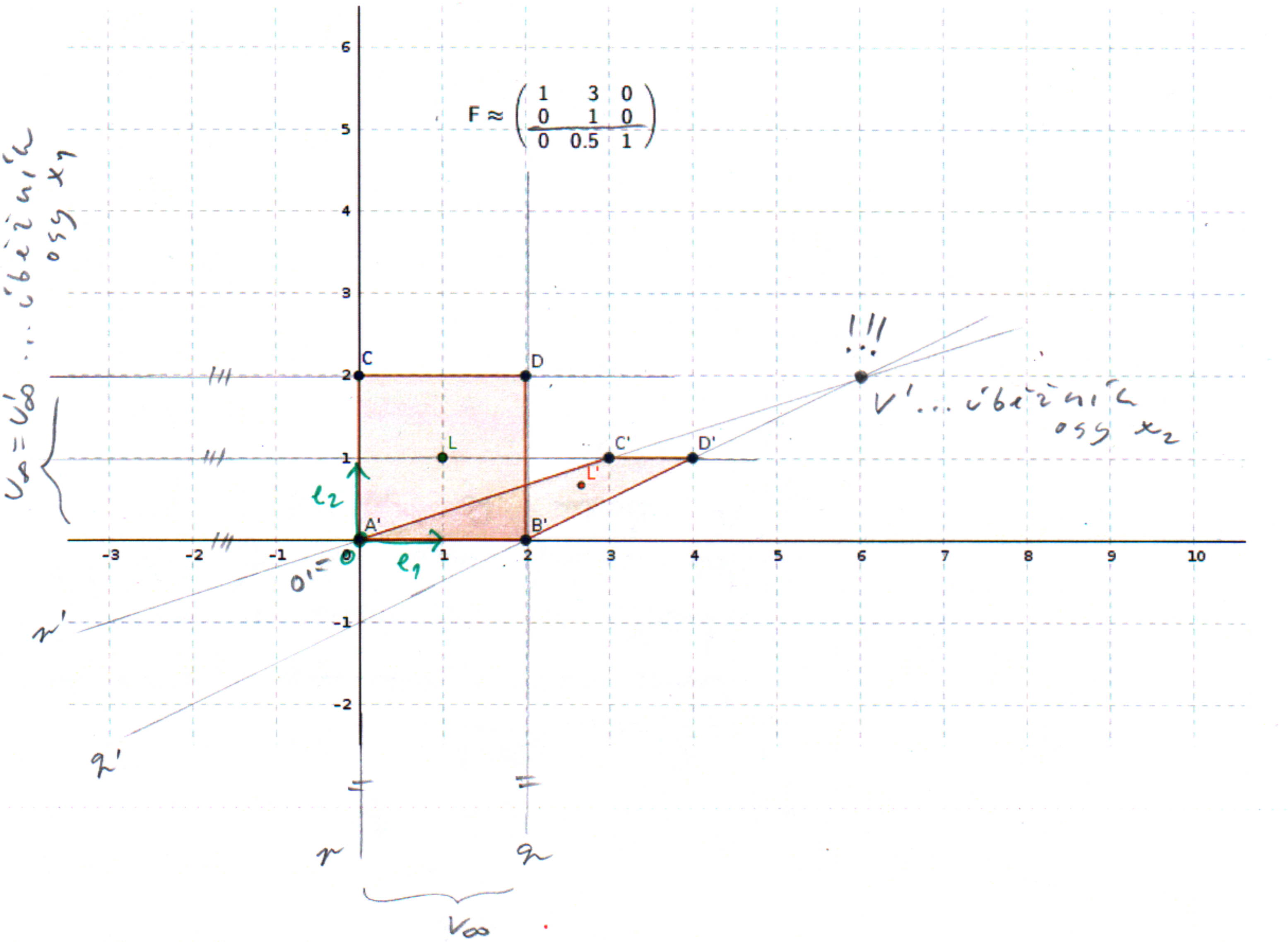
PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

ROZŠÍŘENÍ

PŘÍKLADY

ZPĚT K PŘÍKLADU na s. 27:



$\ggg\longrightarrow$ SPRÁVNÁ INTERPRETACE matice zobrazení je:

$$F = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

O' ... homog. souřadnice obrazu POČÁTKU

$O' = O = (\underline{0 : 0} : \underline{1})$ ✓

V' ... homog. souř. ÚBĚŽNÍKU 2. souř. osy

$V' = (3 : 1 : \underline{1/2}) = (\underline{6 : 2} : \underline{1})$ ✓

U' ... hom. souř. ÚBĚŽNÍKU 1. souř. osy

$U' = U = (\underline{1 : 0} : \underline{0})$ ✓

SKUTEČNĚ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

U .. hom. souř. NEVLASTNÍHO bodu osy x_1

U' ... hom. souř. jeho obrazu tj. 1. ÚBĚŽNÍK

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \hline 1/2 \end{pmatrix}$$

V ... NEVL. bod osy x_2

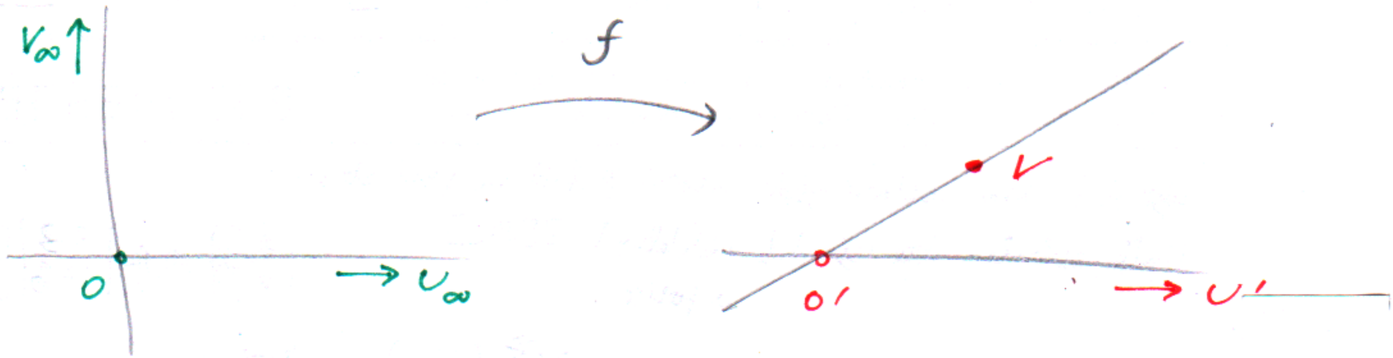
V' ... 2. ÚBĚŽNÍK

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

O ... POČÁTEK

O' ... jeho obraz

Naopak:



- zadání
$$O \mapsto O'$$
$$U \mapsto U'$$
$$V \mapsto V'$$
NEURČUJE projektivní zobrazení jednoznačně !!

- potřeba JEŠTĚ:
  - buď 2 body na osách („jednotky")
  - nebo 1 bod v „dostatečně obecné" poloze ...

↑ vzhledem k předchozím.

(viz konstrukce v předminulém semestru ...)

V NAŠEM PŘÍKLADĚ ...

... pro $O = (0:0:\underline{1}) \mapsto (0:0:\underline{1}) = O'$
$U = (1:0:\underline{0}) \mapsto (1:0:\underline{0}) = U'$
$V = (0:1:\underline{0}) \mapsto (6:2:\underline{1}) = V'$

... máme přímo (a snadno) alespoň:

$$F = \begin{pmatrix} a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ \hline 0 & b & c \end{pmatrix}$$ ... kde $a, b, c \neq 0$ mohou být jakékoliv

... zobrazení je určeno JEDNOZNAČNĚ až např. s podmínkou

$D = (2:2:\underline{1}) \mapsto (4:1:\underline{1}) = D'$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ \hline 0 & b & c \end{pmatrix}}_{F} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}}_{D} = \boxed{\begin{pmatrix} 2a+12b \\ 4b \\ \hline 2b+c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 4k \\ k \\ \hline k \end{pmatrix}}_{D'}}$$

CELKEM $\boxed{3}$ lin. rovnice
$\boxed{4}$ neznámé

ŘEŠENÍ $k = 4b$, $\underline{b = \text{lib.}}$
$a = 2b$, $c = 2b$

$$F = b \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ kde } b \neq 0 \text{ lib.!}$$

(odpovídá matici na s. 35 pro $b = 1/2$ ... ✓)

PRO SROVNÁNÍ...

... zadání
$$A = (0:0:1) \mapsto (0:0:1) = A'$$
$$B = (2:0:1) \mapsto (2:0:1) = B'$$
$$C = (0:2:1) \mapsto (3:1:1) = C'$$
$$D = (2:2:1) \mapsto (4:1:1) = D'$$

... dosazeno pro obecnou (neznámou) matici
$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

... dává...

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}}^{F} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{A} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}}^{A'}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{B} = \begin{pmatrix} 2a+g \\ 2b+h \\ 2c+i \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}}^{B'}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}^{C} = \begin{pmatrix} 2d+g \\ 2e+h \\ 2f+i \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}}^{C'}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}^{D} = \begin{pmatrix} 2a+2d+g \\ 2b+2e+h \\ 2c+2f+i \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}}^{D'}$$

CELKEM $\boxed{12}$ lin. rovnic $(4 \cdot 3 = 12)$

$\boxed{13}$ neznámých $(3 \cdot 3 + 4 = 13)$

... řešení musí vyjít stejně jako na předchozí straně...

(srov. s počítáním na s. 4)

CO JEŠTĚ UMÍME O tomto zobrazení?

* $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}}^{F} = \boxed{1} \neq 0 \Rightarrow$ nedegenerované (bijektivní)

konkrétní hodnota, resp. znaménko NEJSOU relevantní, neboť $\det(k \cdot F) = k^3 \cdot \det(F)$.

* PEVNÉ BODY ~ CHAR. VEKTORY:

... $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix}}_{F - \lambda E} = (1-\lambda)^3$ ... kořen $\lambda = 1$

... pro $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 0}$ (x_1, x_0 .. lib) ... OSA

zobrazení je ZÁKLADNÍ tj. osová kolineace.

(sr. s počítáním pro afinní příklady a pozn. na s. 22–23)

* BONUS: zobrazení má taky STŘED!

Najděte jej (a) konstrukčně, (b) početně.

(vzpomeňte na Desarguesovu větu ...)