OPAKOVÁNÍ

PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

ROZŠÍŘENÍ

PŘÍKLADY

ZÁKLADNÍ VĚTA

* v předchozích (a mnoha dalších) PŘÍKLADECH pozorujeme, že

$\boxed{\text{SHODNÁ} \to \text{PODOBNÁ} \to \text{AFINNÍ} \to \text{PROJEKTIVNÍ}}$

zobrazení prostoru dim $\boxed{n}$ lze vždy popsat maticí $\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{\boxed{n+1}}$, tedy $\boxed{\text{LINEÁRNÍM}}$ zobrazením vekt. prostoru dim $\boxed{n+1}$.

* Tvrdíme, že tohle platí OBECNĚ! (... viz dále)

* opakujeme, že $\boxed{\text{PROJEKTIVNÍ}}$ znamená
  a) zobrazuje přímky na přímky,
  b) zachovává dvojpoměry ← čtveřic kolin. bodů

* opakujeme, že $\boxed{\text{LINEÁRNÍ}}$ znamená, že zachovává lineární kombinace vektorů.

POZOROVÁNÍ

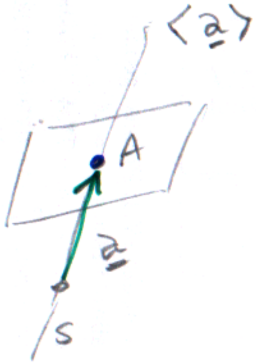
- $\tilde{a}, \tilde{a}'$ ... projektivní prostory ($\dim^{\boxed{n}} \geq 2$)
- W, W' ... odp. vektorové prostory ($\underset{\boxed{n+1}}{\dim} \geq 3$)
- $F: W \to W'$ ... <u>LINEÁRNÍ</u> (izo.)

  ⇝ obraz vekt. podpr. $U \subseteq W$ je vekt. podpr. (stejné dim)

  ⇝ indukované zobrazení $f: \tilde{a} \to \tilde{a}'$, a to takové, že

  → f zobr. <u>proj. přímky na proj. přímky</u>

  ⇝ (a navíc bijektivní)



$$\begin{tikzcd} \langle \underline{a} \rangle \in W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W' \ni \langle \underline{a}' \rangle \arrow[d] \\ A \in \tilde{a} \arrow[r, dashed, "f"'] & \tilde{a}' \ni A' \end{tikzcd}$$

- FUNGUJE TO I OPAČNĚ?

ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

- ANO, FUNGUJE TO I OPAČNĚ!
- TJ.

$f : \tilde{a} \xrightarrow{1:1} \tilde{a}'$ mezi prostory dim ≥ 2, které zobrazuje přímky na přímky

$\Downarrow$

f je určeno nějakým LINEÁRNÍM izomorfismem

$F : W \xrightarrow{1:1} W'$.

- Důkaz ... pro nás příliš těžký (viz von Staudt 19. stol.)

- Důsledek

$f : \tilde{a} \to \tilde{a}'$ jako výše ...

... přímky na přímky

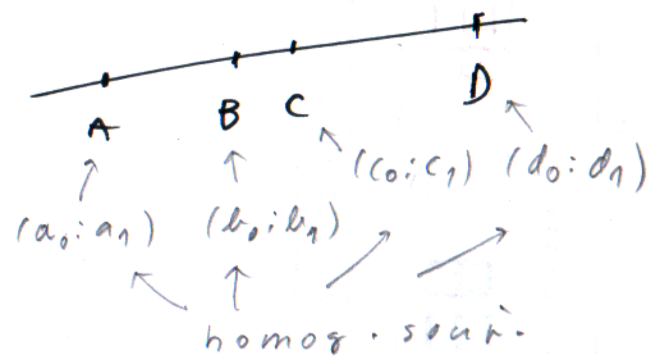
$\Downarrow$

f zachovává DVOJPOMĚRY, a tudíž je PROJEKTIVNÍ!

- Důkaz důsledku (snadný):

... stačí alg. popis DVOJPOMĚRU

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}$$

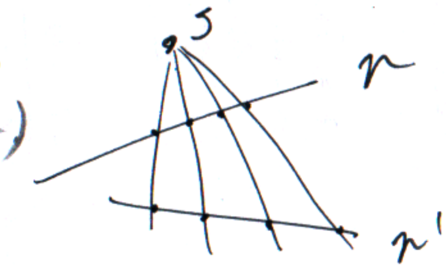


... plus Cauchyova věta o součinu det:

$$(A'B'C'D') = \frac{|(F)\cdot(:\,:)| \cdot |(F)\cdot(:\,:)|}{|(F)\cdot(:\,:)| \cdot |(F)\cdot(:\,:)|} = \frac{\cancel{|F|}\cdot|:\,:|\cdot\cancel{|F|}\cdot|:\,:|}{\cancel{|F|}\cdot|:\,:|\cdot\cancel{|F|}\cdot|:\,:|} = (ABCD)$$

$\boxed{2}$

- Cvičení ... sr. s tvrzením a důkazem Pappovy věty (viz předminulý semestr)



...