OPAKOVÁNÍ

PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

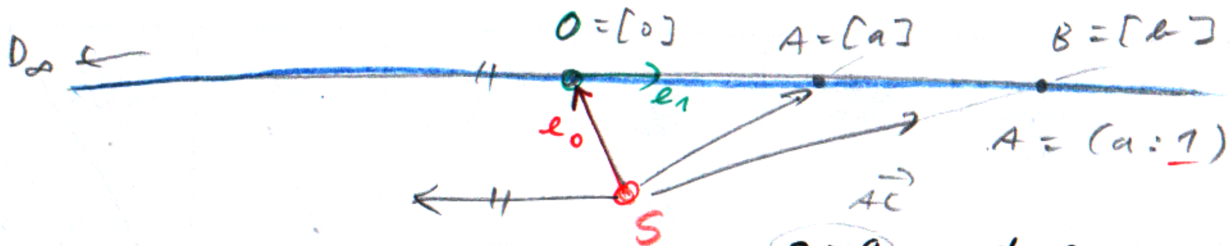
ROZŠÍŘENÍ

PŘÍKLADY

ZÁKLADNÍ VĚTA

POZNÁMKY, ZÁVĚRY

POZNÁMKY ... k alg. vyjádření dvojpoměru



... afinní souř.

$A=(a:1)$, $B=(b:1)$ ... homog. souř.

- DVOJPOMĚR ... $(ABCD) = \dfrac{\overset{\vec{AC}}{c-a}}{\underset{\vec{BC}}{c-b}} : \dfrac{d-a}{d-b} = \dfrac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}$

- POSTŘEH ... $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-b$ ← af. souř. vektoru $\vec{BA}$!

$$(ABCD) = \frac{|\,\cdot\cdot\,|\cdot|\,\cdot\cdot\,|}{|\,\cdot\cdot\,|\cdot|\,\cdot\cdot\,|}$$

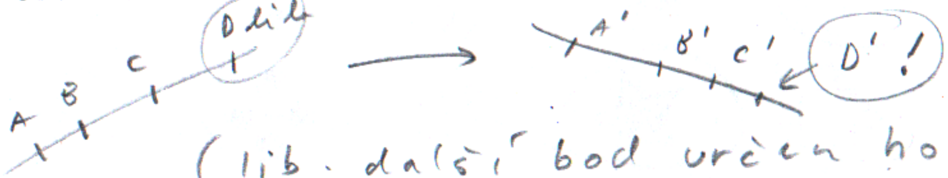
... což je navíc kompatibilní se všemi limitními představami ...

(... nevlastní bod $D_\infty = (1:0) = \lim\limits_{d\to\pm\infty} (d:1)$)

POZNÁMKY ... k dim $\boxed{1}$

- PROJEKTIVNÍ zobr. znamená zach. DVOJPOMĚRY
  (kolineárnost splněna triviálně)

- TEDY ... prosté PROJEKTIVNÍ zobr. mezi PŘÍMKAMI je určeno obrazem $\boxed{3}$ bodů ...

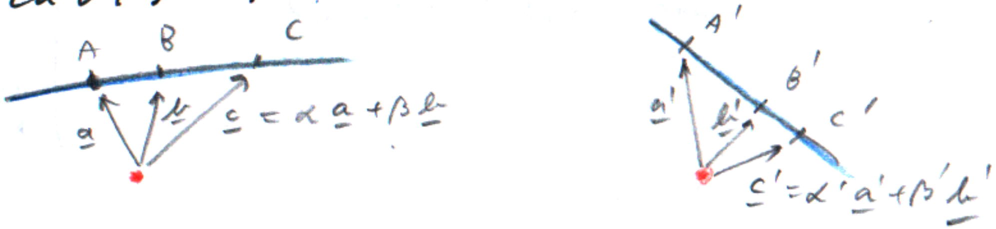


(lib. další bod určen hodnotou dvojpoměru)

- ZÁKL. VĚTA platí tedy v tomto případě:

> Prosté PROJEKTIVNÍ zobr. mezi PŘÍMKAMI je určeno LINEÁRNÍM izomorfismem mezi 2-dim vektorovými prostory.

DŮKAZ ... založen na vhodné manipulaci s (nutnou) lin. závislostí ukazovacích vektorů ...



POZNÁMKY ... k určenosti proj. zobr.

(... viz popis na s. 42)

- Nejprve připomínáme, že
  LINEÁRNÍ zobr. $W \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} W'$ určují totéž
  PROJEKTIVNÍ zobr. $\tilde{a} \xrightarrow{f} \tilde{a}' \iff \boxed{F = k \cdot G}$

  $k \neq 0$

- Nyní:
  Prosté PROJEKTIVNÍ zobr. prostoru dim $\boxed{n}$
  je určeno obrazy
  - buď $\boxed{n+1}$ bodů v obecné poloze
    a $\boxed{n}$ odpovídajícími úběžníky,
  - nebo $\boxed{n+2}$ bodů v "dostatečně obecné" poloze.

známe z KONSTRUKČNÍ GEOM. pro malá $\boxed{n}$

obecně plyne z předchozí ALGEBRAICKÉ charakterizace!

(... viz též s. 46)

POZNÁMKY ... k neprostým (degen.) zobrazením

- také neprosté LINEÁRNÍ zobr. $F: W \to W'$ určuje PROJEKTIVNÍ zobr. $f: \tilde{a} \to \tilde{a}'$, akorát je třeba vyloučit jádro F ... !

$\{\underline{x} \in W : F(\underline{x}) = \underline{o}\}$

- tzn. neprosté PROJEKTIVNÍ zobr. NENÍ definováno na celém proj. prostoru !

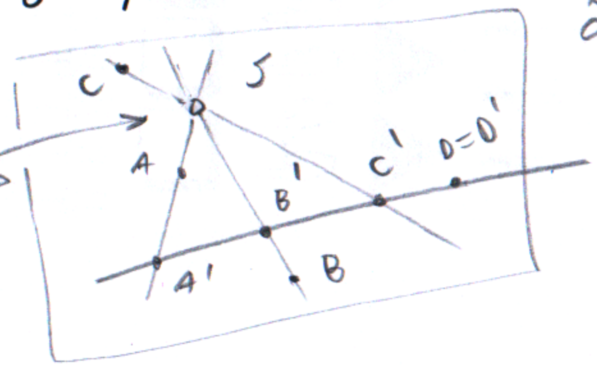
... něco podobného u AFINNÍCH zobr. neznáme !

... typický příklad: STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ většího prostoru do menšího ...

$\tilde{a}$ ... dim $\boxed{2}$

$\tilde{a}'$ ... dim $\boxed{1}$

STŘED promítání NEMÁ obraz !



POZNÁMKY ... k neprostým zobr.

- s obecnými degen. zobrazeními může být docela PROBLÉM ... (co se týká určenosti)
- s modelovým zobr. $\equiv$ se STŘEDOVÝM PROMÍTÁNÍM se VŽDY nějak domluvíme ! (viz loňské konstrukce a násl. příklad)

PŘÍKLAD ... STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

- ze středu $S = [6, 0, 5]$ do roviny $\rho : \{x_1 = 0\}$
- v afinních souřadnicích:

$$X = [x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left[0, \frac{6x_2}{6-x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6 - x_1}\right] = X'$$

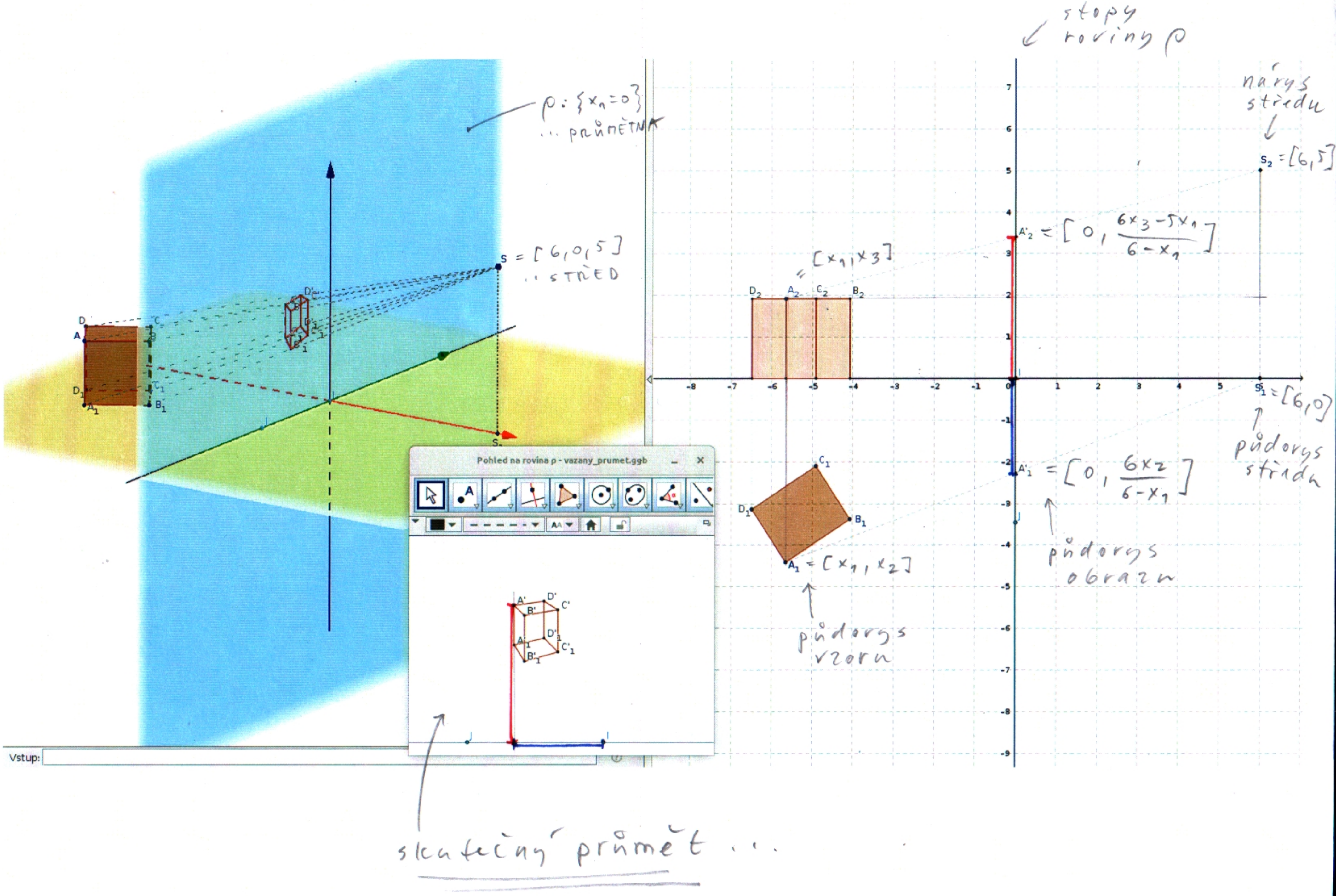
(viz podobné $\triangle$ na další str.)

- v homogenní souř.:

$$X = (x_1 : x_2 : x_3 : \underline{x_0}) \longmapsto (0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1 : \underline{6x_0 - x_1}) = X'$$

tj. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_0 \end{pmatrix}$$!

PŘÍKLAD — STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ



POZNÁMKY ... k afinním zobrazením

- $f : \tilde{a} \to \tilde{a}'$ ... PROJEKTIVNÍ
- $F : W \to W'$ ... odp. LINEÁRNÍ ... $\begin{pmatrix} x' \\ \hline x_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C \\ \hline B & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \hline x_0 \end{pmatrix}$

- zobr. f je AFINNÍ $\iff$ zobr. vlastní body na vlastní

  tj. $\begin{pmatrix} x \\ \hline k \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ \hline \ell \end{pmatrix}$ ... $k, \ell \neq 0$

  (*) $\iff$ zobr. ne- .... ne-

  tj. $\begin{pmatrix} x \\ \hline 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ \hline 0 \end{pmatrix}$

  $\iff$ $a \neq 0$ a $B = 0$.

  tj. matice F pro $a = 1$ ...

  ... $\begin{pmatrix} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

- podmínka (*) redukuje počty na s. 47 takto:

  || Lib. AFINNÍ zobr. prostoru dim $\boxed{n}$
  je určeno obrazy $\boxed{n+1}$ bodů v obecné poloze. ✓

POZNÁMKY ... k samodružným (pevným) bodům

- pevné body f $\rightleftarrows$ charakt. vektory F

  tj. $f(X) = X$ tj. $F(\underline{x}) = \lambda \cdot \underline{x}$, $\lambda \neq 0$

\+ pevné body odp. TÉMUŽ char. číslu tvoří proj. PODPROSTOR. ← řešení homog. soustavy lin. rovnic

\+ RŮZNÝM char. číslům odp. RŮZNÉ body. ← odp. vektory NEZÁVISLÉ

\+ IZOLOVANÝCH pevných bodů není víc než $\boxed{n+1}$.

nezávislých vektorů není víc než dim W

⋮

(srovn. s poznámkami na s. 23)

POZNÁMKY ... k pevným bodům afinních zobr.

- charakt. polynom $\underbrace{\det \begin{pmatrix} D-\lambda E & C \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}$ $= (1-\lambda) \cdot \det (D - \lambda E)$

tedy $\lambda = 1$ je vždy kořenem!

- $\boxed{\text{KAŽDÁ AFINNÍ transformace má nějaký PEVNÝ BOD!}}$

vlastní či nevlastní ...

<u>VÝZVA</u> ... dokažte toto tvrzení elementárně (tj. <u>bez</u> algebry) a získáte hodnotnou věcnou cenu ... !

POZNÁMKY ... k předchozím výpočtům

pevných bodů AFINNÍCH transformací:

... vlastní ... $\begin{pmatrix} D & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ a tato podm. je ekviv.
$D \cdot X + C = X$, tj. $\boxed{(D - E) \cdot X = -C}$

(*) ✓

... nevlastní ... $\begin{pmatrix} D & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda =$ bez apriorních omezení
a předch. podm. je ekviv.
$D \cdot X = \lambda X$, tj. $\boxed{(D - \lambda E) \cdot X = 0}$

(**) ✓

GEOM. ZOBRAZENÍ — SHRNUTÍ

vzhledem k rozšířené kartézské souř. soust.

JMÉNO	VLASTNOSTI	ALG. VYMEZENÍ	ANAL. VYJÁDŘENÍ	PŘÍKLADY
PROJEKTIVNÍ $f: \tilde{a} \to \tilde{a}'$	/ → | ← kolin. ← dvojpoměr	určeno LINEÁRNÍM zobr. $F: W \to W'$	$\underline{x}' = \left(\begin{array}{cc} a & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \cdot \underline{x}$	osová kolineace středové prom.
AFINNÍ $f: a \to a'$	—||—, navíc || → || ← rovnoběž. ← děl. poměr	—||—, navíc $\vec{a} \subset W \xrightarrow{F} \vec{a}' \subset W'$ $F\|_{\vec{a}} =: \vec{f}$	$\underline{x}' = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right) \cdot \underline{x}$ $X' = D \cdot X + C$	osová afinita rovnoběžné prom.
EKVI-AFINNÍ $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$	—||—, navíc obsahy/objemy	—||—, navíc $\vec{f}$ zach. vnější součin..	$\det(D^T \cdot D) = 1$ resp. $\det D = \pm 1$	šikmá soum. elace
PODOBNÉ $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$	poměry vzdál. odchylky, ...	—||—, navíc $\vec{f}$ zach. skalární součin až na násobek ... k	$D^T \cdot D = k^2 \cdot E$	stejnolehlost
SHODNÉ $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$	vzdálenosti, odchylky, obsahy, ...	—||—, navíc $k = 1$	$D^T \cdot D = E$	osová soum. posunutí otáčení