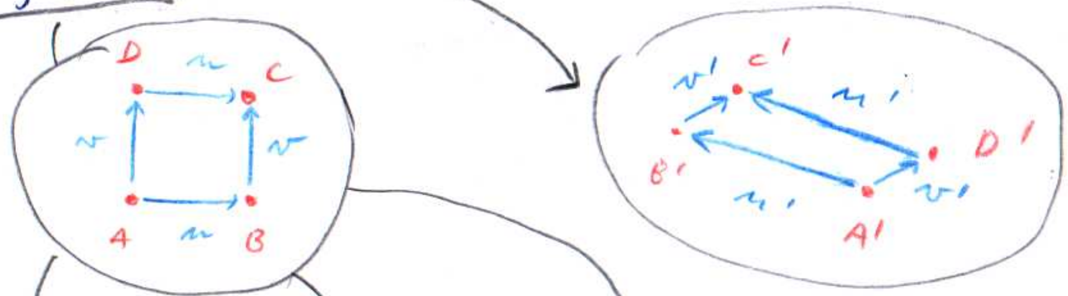
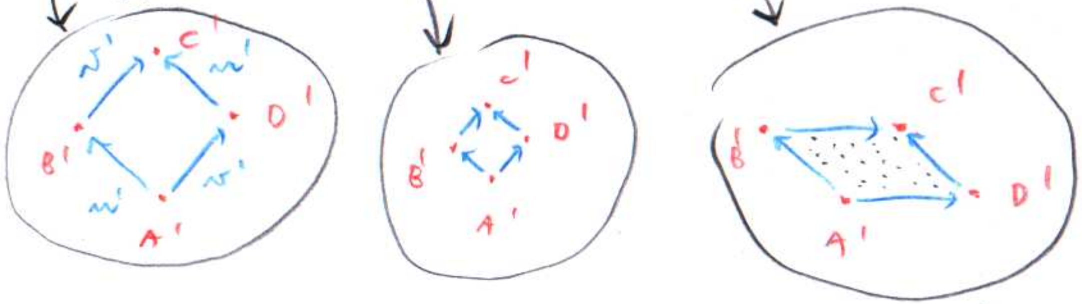
GEOMETRIE 3 ... JARO 2020

UMÍME – afinní & eukleidovská geometrie pomocí vektorů (algebry) ...

– afinní zobrazení mezi afinními prostory



– shodná, podobná, ekviafinní zobrazení mezi eukleidovskými prostory



(– a jistě mnoho dalších věcí ...)

CHCEME UMĚT – projektivní zobrazení mezi projektivními prostory

– tj. zejména projektivní rozšíření (o "nevlastní body") a vymezení předchozích věcí v tomto RÁMCI!

PLÁN – OPAKOVÁNÍ vybraných věcí z minulého semestru (MA0009)

– konkrétní PŘÍKLADY shodných a afinních (podobných) zobrazení

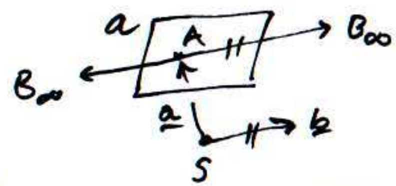
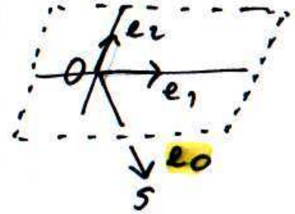
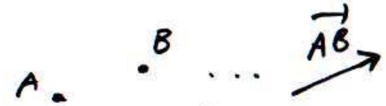
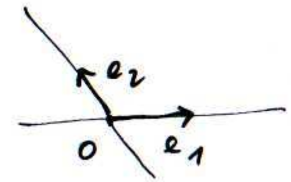
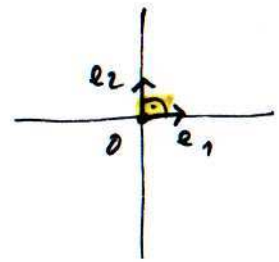
– projektivní ROZŠÍŘENÍ prostoru a souřadnic

– projektivní ZOBRAZENÍ a základní věta projektivní geometrie!

– UŽITEK, rozpoznání základních transformací apod.

OPAKOVÁNÍ

... převzato z loňských materiálů vč. číslování stránek

ZOBRAZENÍ	PROSTORY	ÚLOHY	VYMEZENÍ ALG.	POČÍTÁNÍ
projektivní	projektivní $\mathcal{P}$ (3)	polohové	$\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \{\infty\}$ pomocí **W** $\supset$ V 	homogenní souřadnice 
afinní	afinní $\mathcal{A}$ (1)		$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to$ **V**  body ... vektor	afinní souř. 
ekvi-afinní, podobná, shodná	eukleidovské $\mathcal{E}$ (2)	metrické	$\mathcal{E} = \mathcal{A}$ + **skalární součin**  ... $u \cdot v$ vektory ... číslo	kartézské souřadnice 

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

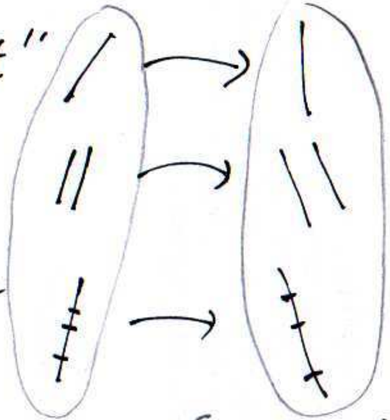
• z loňské geometrie víme:

af. zobr. zachovává

(a) "přímkovitost"

(b) rovnoběžnost

(c) poměry trojic kolin. bodů



$$\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{A}'$$

(... pokud se zrovna / nezobrazují do •)

• podle obecné logiky čekáme:

af. zobr. zachovává ...

... AFINNÍ STRUKTURU

tj.

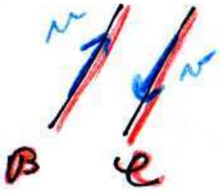
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \times \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, dashed, "??"] \\
\mathcal{A}' \times \mathcal{A}' \arrow[r] & V'
\end{tikzcd}$$

co by to jako mělo být a jak skloubit s předchozím?

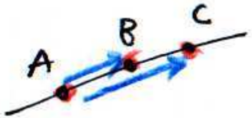
ZA PRVÉ!

- vlastnostem (a) – (c) rozumíme v OBECNÉM AF. PROSTORU:

(a) přímka  ... podpr. dim 1

(b) rovnoběžnost  ... $\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{C}}$

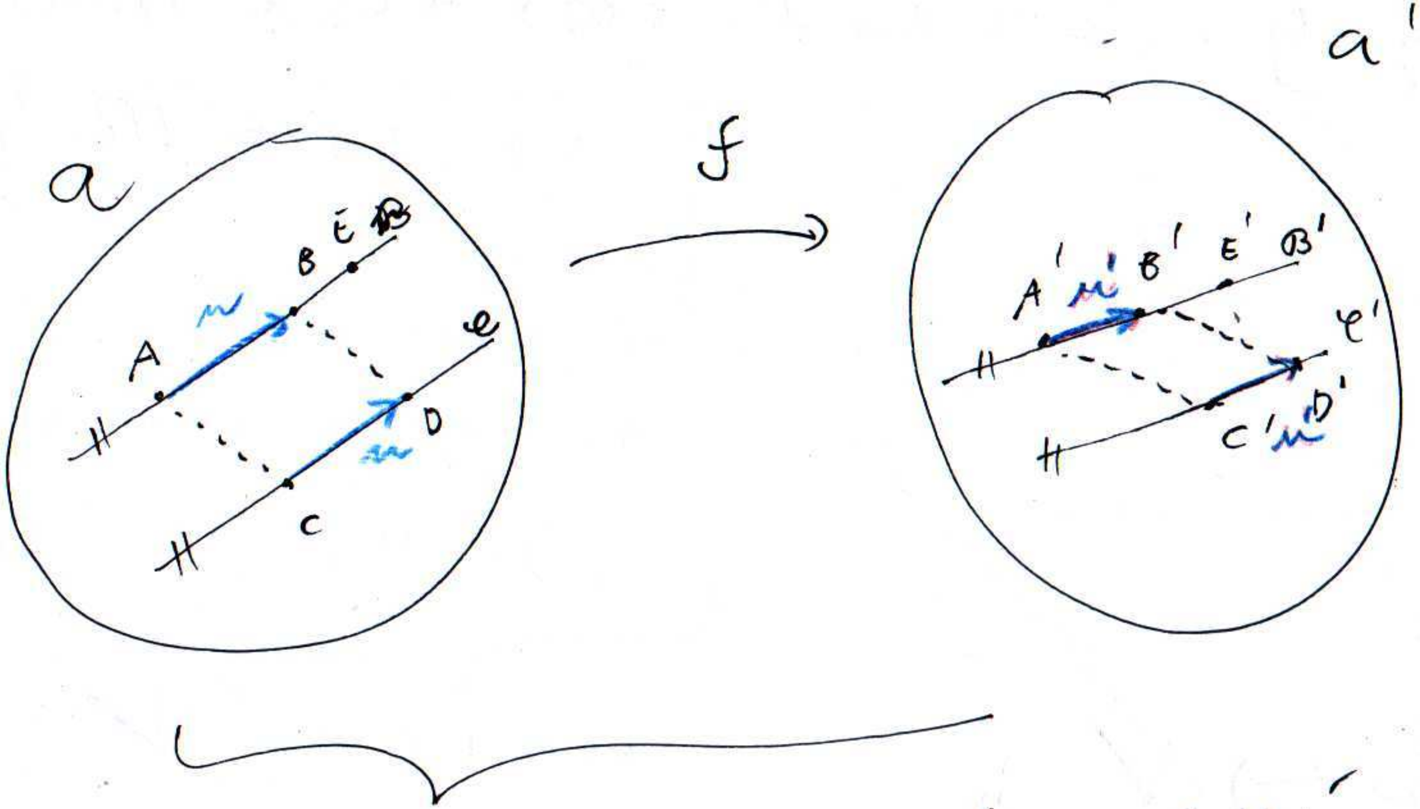
(c) poměr ... $d =$ " $\frac{\vec{AC}}{\vec{AB}}$ " .... $\vec{AC} = d \cdot \vec{AB}$



$d \in \mathbb{R}$

ZA DRUHÉ:

předp. ... $f: a \to a'$ ...... afinní (podle ⓐ-ⓒ)



f .... indukuje zobrazení mezi zaměřeními $\vec{f}: \vec{a} \to \vec{a}'$,

které je navíc LINEÁRNÍ!

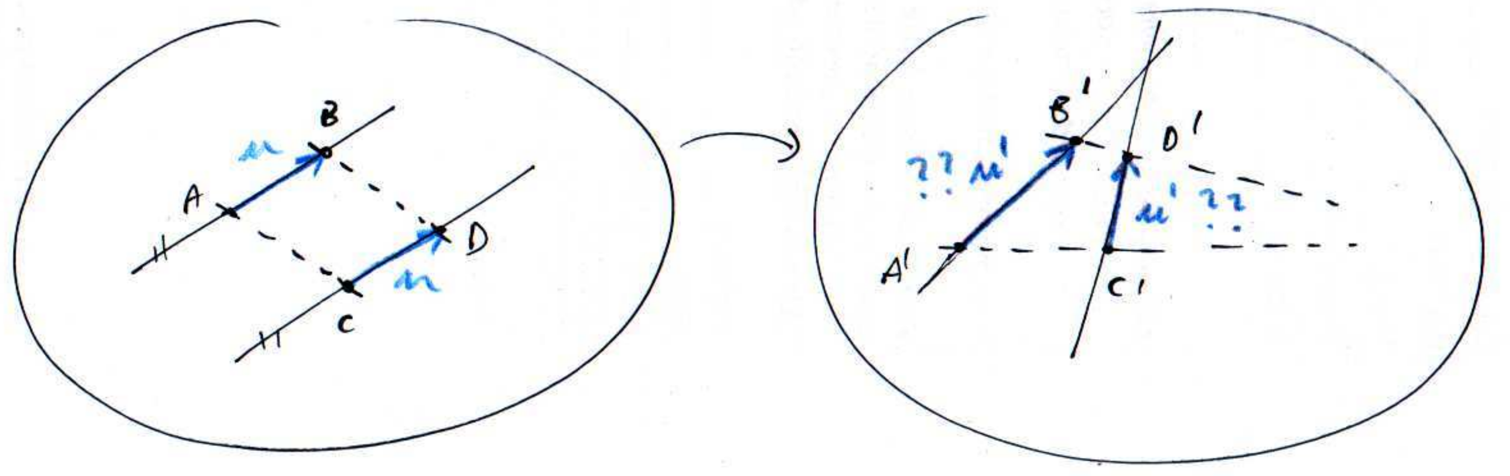
Tj.

$$\text{•}\quad u = \begin{array}{c} \vec{AB} \longmapsto \vec{A'B'} \\ \vec{CD} \longmapsto \vec{C'D'} \end{array} = u'$$

... dobře def. obraz vektoru (nezávisle na určující dvojici bodů)

$$\left.\begin{array}{l} \text{•}\quad \vec{AE} = d\cdot\vec{AB} \longmapsto \vec{A'E'} = d\cdot\vec{A'B'} \\ \text{•}\quad \vec{AD} = \vec{AB}+\vec{AC} \longmapsto \vec{A'D'} = \vec{A'B'}+\vec{A'C'} \end{array}\right\} \dots \text{ LINEÁRNÍ}$$

Nic z toho nefunguje např. pro obecná PROJEKTIVNÍ zobr.:



ZA TŘETÍ:

EKVIVALENTNÍ DEF. AF. ZOBR.:

$f : a \to a'$ je AFINNÍ, pokud ~~to~~ zachovává afinní strukturu,

tj. ex. indukované zobr. $\vec{f} : \vec{a} \to \vec{a}'$ LINEÁRNÍ tak, že ...

$$
\begin{tikzcd}
a \times a \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[d, shift left=6, "f"] & \vec{a} = V \arrow[d, dashed, "\vec{f}"] \\
a' \times a' \arrow[r] & \vec{a}' = V'
\end{tikzcd}
$$

... komutuje.

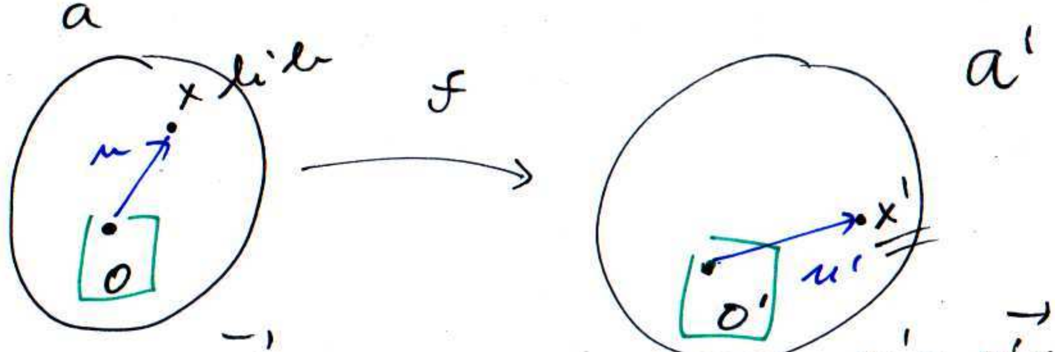
konkrétně ... $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$

neboli ... $(\overrightarrow{AB})' = \overrightarrow{A'B'}$

POZNÁMKA

- lin. zobr. $\vec{a} \to \vec{a}'$ NEURČUJE
  af. zobr $a \to a'$ úplně ...
  (viz napr. posunutí)

- ALE s obrazem jednoho dalšího bodu
  ANO:



$u = \vec{OX}$ $\quad u' = \vec{O'X'}$

$$\underbrace{\vec{f}(\vec{OX}) = \vec{O'X'}}$$

LIN. ČÁST

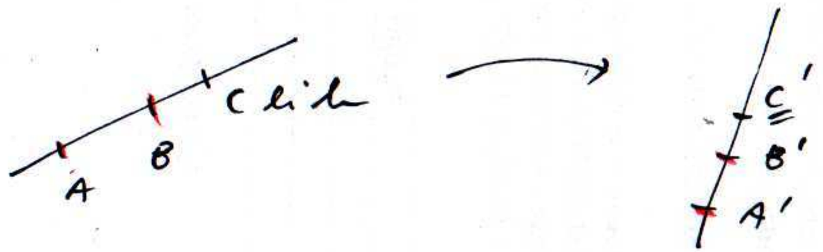
obraz jednoho bodu

$$f : \underset{\text{lib}}{X} \longmapsto \boxed{X' = \boxed{O'} + \boxed{\vec{f}(\vec{OX})}}$$

VĚTA O URČENOSTI AF. ZOBR.

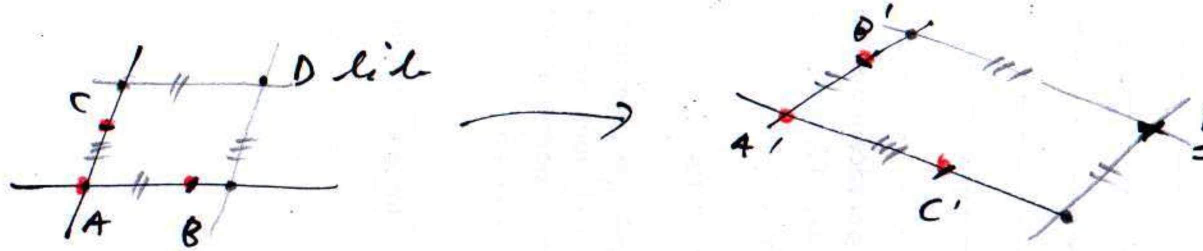
• Vloni ... z vlastností (a) – (c) plyne ...

$m = \boxed{1}$



... stačí znát obrazy $\boxed{2}$ bodů

$m = \boxed{2}$



... stačí ...
... $\boxed{3}$ bodů

.
.
.

etc.

OBECNĚ:

AFINNÍ ZOBR. $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$

dim n

je určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

(Důkaz...

$\vec{f}: \vec{a} \to \vec{a}'$ je určeno obrazem báze, a ta má n prvků)

POZNÁMKA / VÝHLED

- vlastnosti (a) – (c) nejsou úplně nezávislé:

  Pokud (a), potom (b) $\iff$ (c).

  ()

- ve skutečnosti platí ještě něco mnohem silnějšího:

  Pokud bijektivní zobr. zach. (a), potom taky (b) a (c)!!

Tzv. "základní věta afinní geometrie".

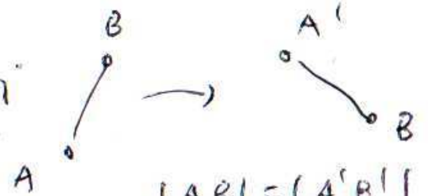
(viz časem jako důsledek základní věty projektivní geom...)

SHODNÁ ZOBRAZENÍ

od jakživa víme, že

SHODNÁ zobr. zachovávají

- vzdálenosti



$|AB| = |A'B'|$

(tj. shodnosti úseček)

shodné

$\Downarrow$ poměry... podobné

$\Downarrow$ objemy ekvi-afinní

$\Downarrow$ afinní

$\Downarrow$

$\vdots$

letos jsme se naučili, jak algebraicky popsat **AFINNÍ** zobr. ... (viz s. 27)

Jak v tomto duchu vymezíme shodná (resp. podobná, ekvi-afinní) mezi afinními ??

• AFINNÍ ZOBR. ... $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$

obraz jednoho bodu

$$X \longmapsto X' = \boxed{O'} + \boxed{\vec{f}(\overrightarrow{OX})}$$ (viz s. 28)

indukované lineární zobr.

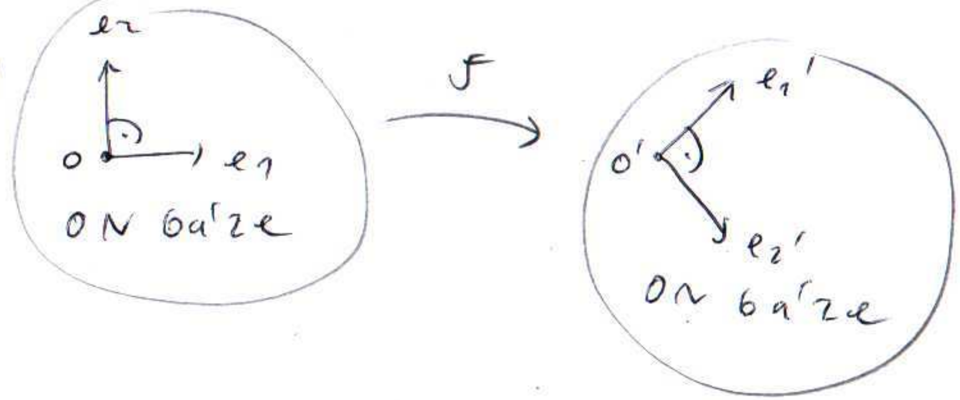
tj. vzhledem k souř. soust.:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_{X'} = \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_{O'}} + \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{e_1' \, e_2' \dots} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_{X}}$$

matice zobr. $\vec{f}$ ... ozn. D

• předp. vše vyjádřeno vzhledem k ON souř. soust.

• zobr. je SHODNÉ $\Longleftrightarrow$



$\Longleftrightarrow$ $e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = \dots = 1$

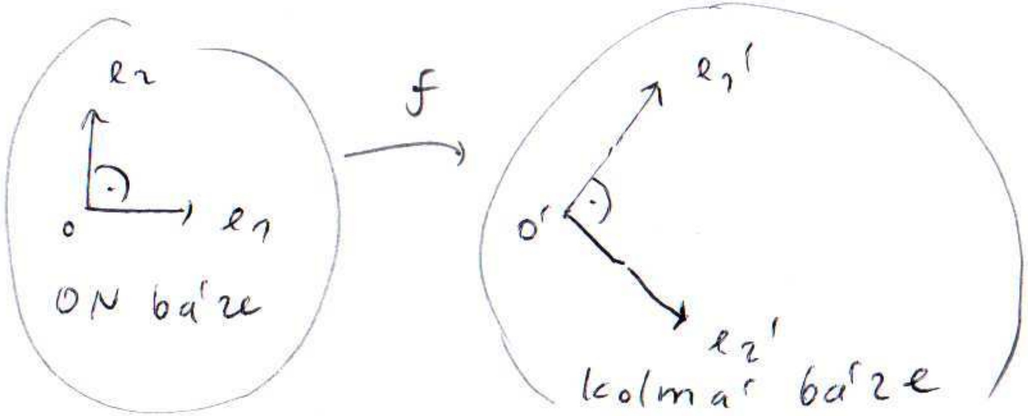
$e_1' \cdot e_2' = \dots \dots = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix}}_{} \cdot \underbrace{\left(e_1' \middle| e_2' \middle| \dots \right)}_{} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{}$$

$$\boxed{D^T \cdot D = E}$$

135 PODOBNÉ:

- zobr. je **PODOBNÉ** $\iff$



$\|e_1'\| = \|e_2'\| =: k$

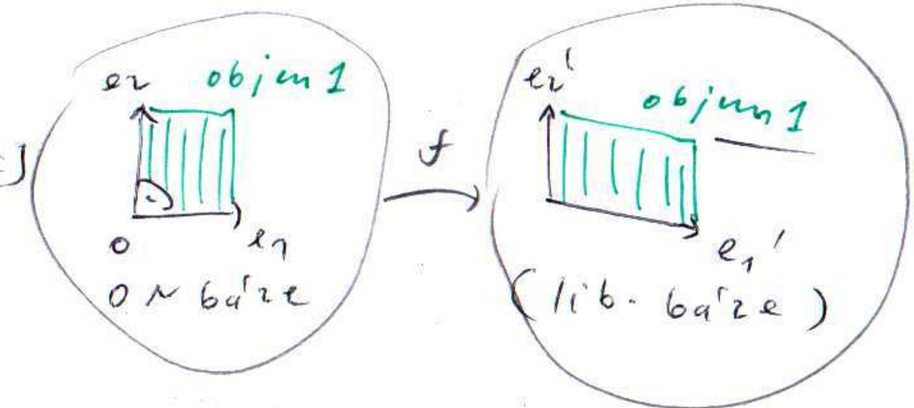
koeficient podobnosti

$$\iff \begin{aligned} e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = \dots &= k^2 \\ e_1' \cdot e_2' = \dots\dots\dots &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix}}_{D^T} \cdot \underbrace{\left(e_1' \middle| e_2' \middle| \dots \right)}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} k^2 & 0 & \dots \\ 0 & k^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{k^2 E}$$

$$\boxed{D^T \cdot D = k^2 E}$$

- zobr. je **EKVI-AFINNÍ** $\iff$



$$\iff \det \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \cdot e_1' & e_1' \cdot e_2' & \dots \\ e_2' \cdot e_1' & e_2' \cdot e_2' & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Gramova matice}} = 1$$

Gramova matice $= \begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \cdot \left(e_1' \middle| e_2' \middle| \dots \right) = D^T \cdot D$ ✓

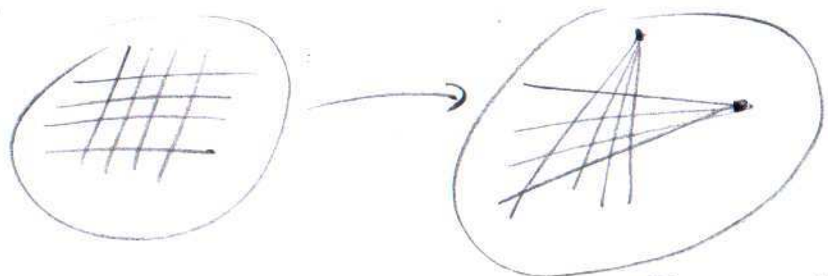
$$\iff \boxed{\det \left(D^T \cdot D \right) = 1}$$

$\boxed{\text{VÝHLED}}$

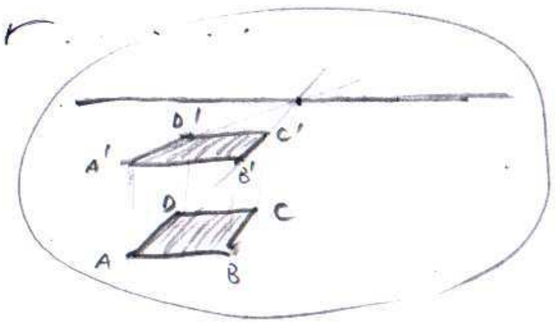
... **tady** budeme navazovat příští semestr.

... **zejména se naučíme** alg. popis:

- PROJEKTIVNÍHO rozšíření af. prostoru a odpovídající popis PROJEKTIVNÍCH zobrazení ...



- vymezení AFINNÍCH zobr. v tomto rámci ...
- rozpoznávat základní zobr. ...



- apod. ...

OPAKOVÁNÍ

PŘÍKLADY

1. TYPICKÝ PŘÍKLAD

Afinní zobrazení v rovině je dáno obrazy bodů:

$$A = [0,0] \longmapsto [7,3] = A'$$
$$B = [2,0] \longmapsto [7,1] = B'$$
$$C = [0,2] \longmapsto [5,3] = C'$$

Určete:

a) obraz obecného bodu $X = [x_1, x_2]$

b) typ zobrazení (afinní, ekviaf., podobné, shodné)

c) druh zobrazení (pokud to jde, např. otáčení, posunutí, ...)

d) zejména rozhodněte, zda je základní (osová afinita, resp. její deriváty)

POZN – afinní zobr. v rovině $\dim \boxed{2}$ – zcela určeno obrazy $\boxed{3}$ bodů v obecné poloze. ✓

– znázornění (obrázek) pomáhá!

– vhodné interpretace taktéž!

– předp. vše v KARTÉZSKÝCH souř. ...

VÝSLEDEK hledáme ve tvaru (viz opakování)

- obraz $\rightarrow$
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$\leftarrow$ vzor

obraz počátku .. O'

matice indukovaného lineárního zobr., tj.: $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ ... e_2'

obraz 1. bázového vektoru e_1'

- symbolicky píšeme:

$$X' = C + D \cdot X$$

obraz, vektor, matice, vzor

- resp. pomocí jedné ROZŠÍŘENÉ matice:

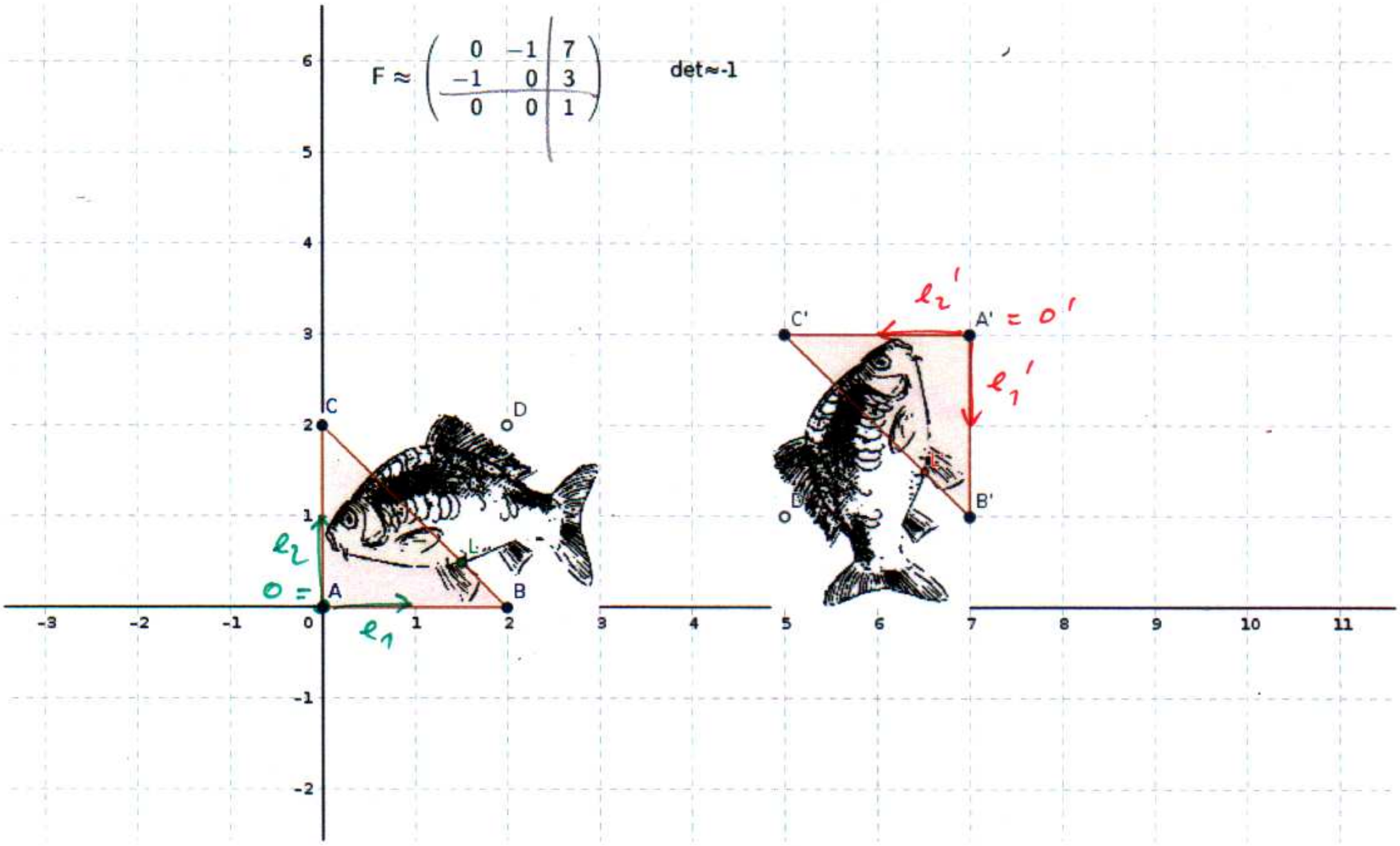
$$\left(\frac{X'}{1}\right) = \left(\frac{D \quad C}{0 \quad 1}\right) \cdot \left(\frac{X}{1}\right)$$

$\leftarrow$ to se ještě BUDE HODIT !!!

- konkrétně (po složkách):

$$x_1' = \cdot\, x_1 + \cdot\, x_2 + \cdot$$
$$x_2' = \cdot\, x_1 + \cdot\, x_2 + \cdot$$

ŘEŠENÍ (A) ... PŘÍMO (SNADNO)



z předchozích interpretací:

$e_1' = -e_2$

$e_2' = -e_1$

$O' = A'$

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ tj. } \begin{aligned} x_1' &= 0\,x_1 + -1\,x_2 + 7 \\ x_2' &= -1\,x_1 + 0\,x_2 + 3 \end{aligned}$$

---

pozn. .. zde velmi snadné, neboť zadání vztaženo přátelsky k souřadné soustavě $\left(O = A,\ e_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \dots\right)$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$O' = A' \qquad e_1' = \frac{1}{2}A'B' \ \dots$$

ŘEŠENÍ (B) … NEPŘÍMO (soustava rovnic)

- hledáme $a, b, c, d, k, l \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a & c & k \\ b & d & l \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

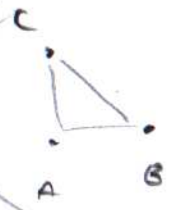
- aby $A \mapsto A'$ … $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$, tj.
- aby $B \mapsto B'$ … $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$, tj.
- aby $C \mapsto C'$ … $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$, tj.

$k = 7$
$l = 3$

$2a + k = 7$
$2b + l = 1$

$2c + k = 5$
$2d + l = 3$

CELKEM $\boxed{6}$ lin. rovnic
$\boxed{6}$ neznámých …



v obecné poloze

… jednoznačné řešení:

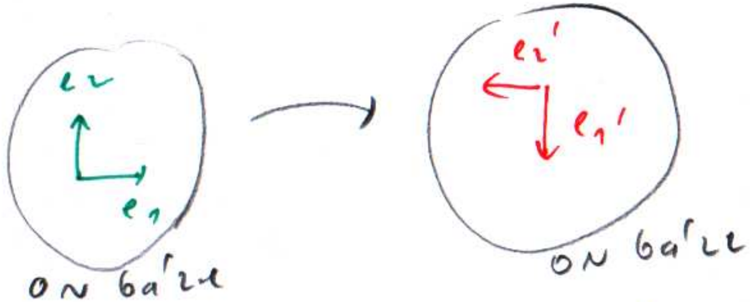
$a = 0 \quad c = -1 \quad k = 7$

$b = -1 \quad d = 0 \quad l = 3$ ✓

TYP zobrazení ...

... je vždy schován v typu matice

$$F = \left(\begin{array}{cc} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \quad \text{resp.} \quad D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} e_1' & e_2' \end{array} \end{array}$$

... 

, tedy zobr. je **SHODNÉ**.

... formálně

$$\begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} e_1' & e_2' \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1' \cdot e_1'$ $e_1' \cdot e_2'$ $e_2' \cdot e_2'$

... zejména:

$\det F = \det D = -1 \neq 0$, tj. NEDEGENEROVANÉ (prosté) ✓

$-1 < 0$; tj. NEPŘÍMÉ ✓

$|-1| = 1$, tj. EKVI-AFINNÍ ✓

ZÁKLADNÍ TRANSFORMACE ...

... mají "hodně" PEVNÝCH bodů (vlastní/nevlastní)

... základní shodnost v rovině (dim $\boxed{2}$) =

= osová souměrnost

$\rightsquigarrow$ přímka (dim $\boxed{1}$) pevných bodů (vlastních)

... v našem případě:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Updownarrow$$

(soustava $\boxed{2}$ lin. rovnic $\boxed{2}$ neznámých) $\rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 7 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 3 &= 0 \end{aligned}}$$

... nemá řešení

tj. NENÍ základní

DRUH zobrazení ...

... umíme určit, protože se jedná o :

- shodnost
- nepřímou
- bez pevných bodů

$\Downarrow$

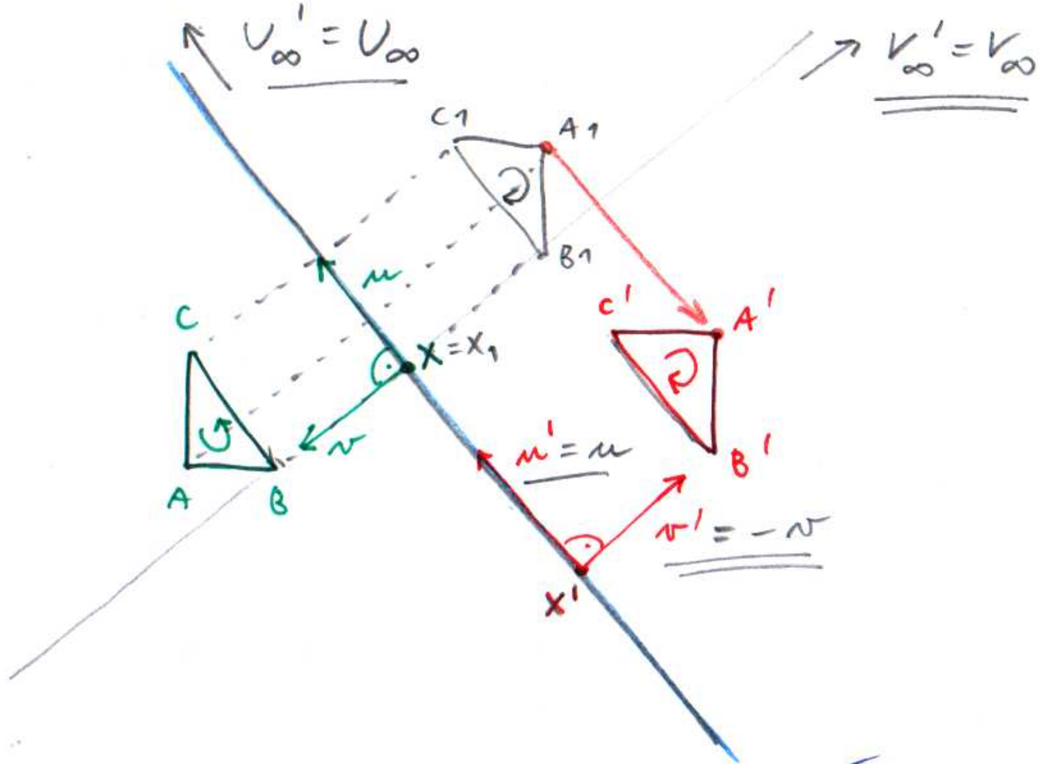
$\boxed{\text{POSUNUTÁ SOUMĚRNOST}}$

připomenutí všech SHODNOSTÍ v rovině viz dále ...

BONUS ... popište určující prvky tohoto zobr.

čím a jak geometricky je určeno ?

POZN ... POSUNUTÁ SOUMĚRNOST = složení osové souměrnosti a posunutí:



... na rozdíl od OSOVÉ SOUMĚRNOSTI: "samodružné body"

žádné vlastní pevné body

"samodružné směry"

.... stejně jako osová souměrnost:

dva nevlastní pevné body (a $v' = -v$)

($U'_\infty = U_\infty$, $V'_\infty = V_\infty$, na které ukazují vektory $u' = u$)

... v našem příkladě $\quad x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{+1} \cdot u \quad \checkmark$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{-1} \cdot v \quad \checkmark$$

charakteristické vektory lin. zobrazení s maticí $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ odp. char. hodnotě $\lambda = \boxed{+1}$, resp. $\boxed{-1}$!

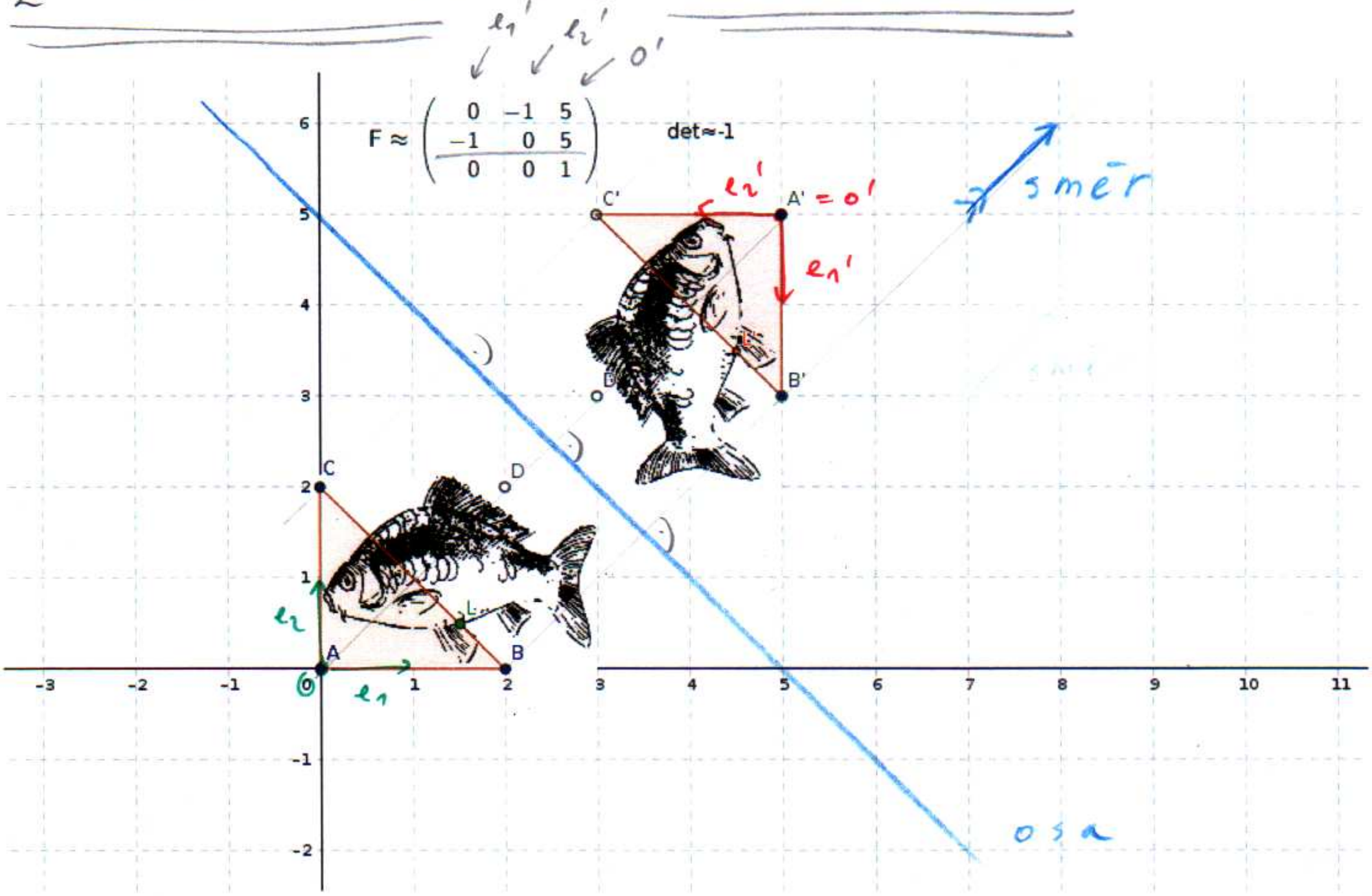
tj. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ je řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \lambda X \qquad \text{pro } \lambda = \boxed{+1}$$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ —— " —— $\qquad$ pro $\lambda = \boxed{-1}$

(... a všechny jejich násobky)

2. DALŠÍ PŘÍKLADY SVIŽNĚ:



- $e_1' \perp e_2'$, $\|e_1'\| = \|e_2'\|$ ... ON báze $\Rightarrow$ SHODNOST
- $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow$ NEPŘÍMÁ
- vlastní pevné body:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{x_1 + x_2 = 5}$$

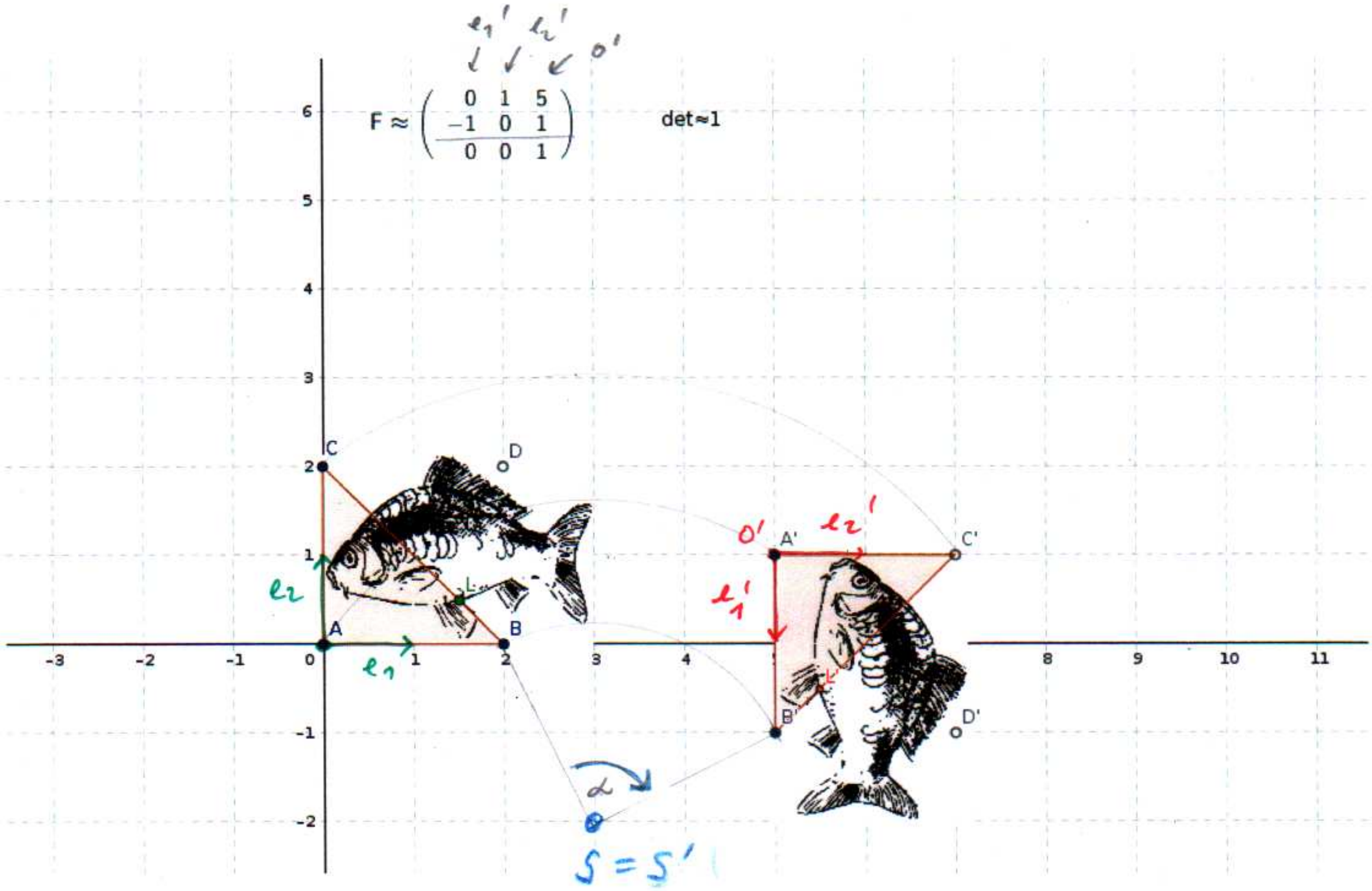
OSA

- nevlastní pevné body:

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{směr osy}$$

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \text{ose}$$

$\boxed{\text{OSOVÁ SOUMĚRNOST}}$



- e_1', e_2' ... ON báze $\Longrightarrow$ SHODNOST
- $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0 \Longrightarrow$ PŘÍMÁ
- vlastní pevné body:

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{array}} \quad \text{STŘED}$$

- nevlastní ...

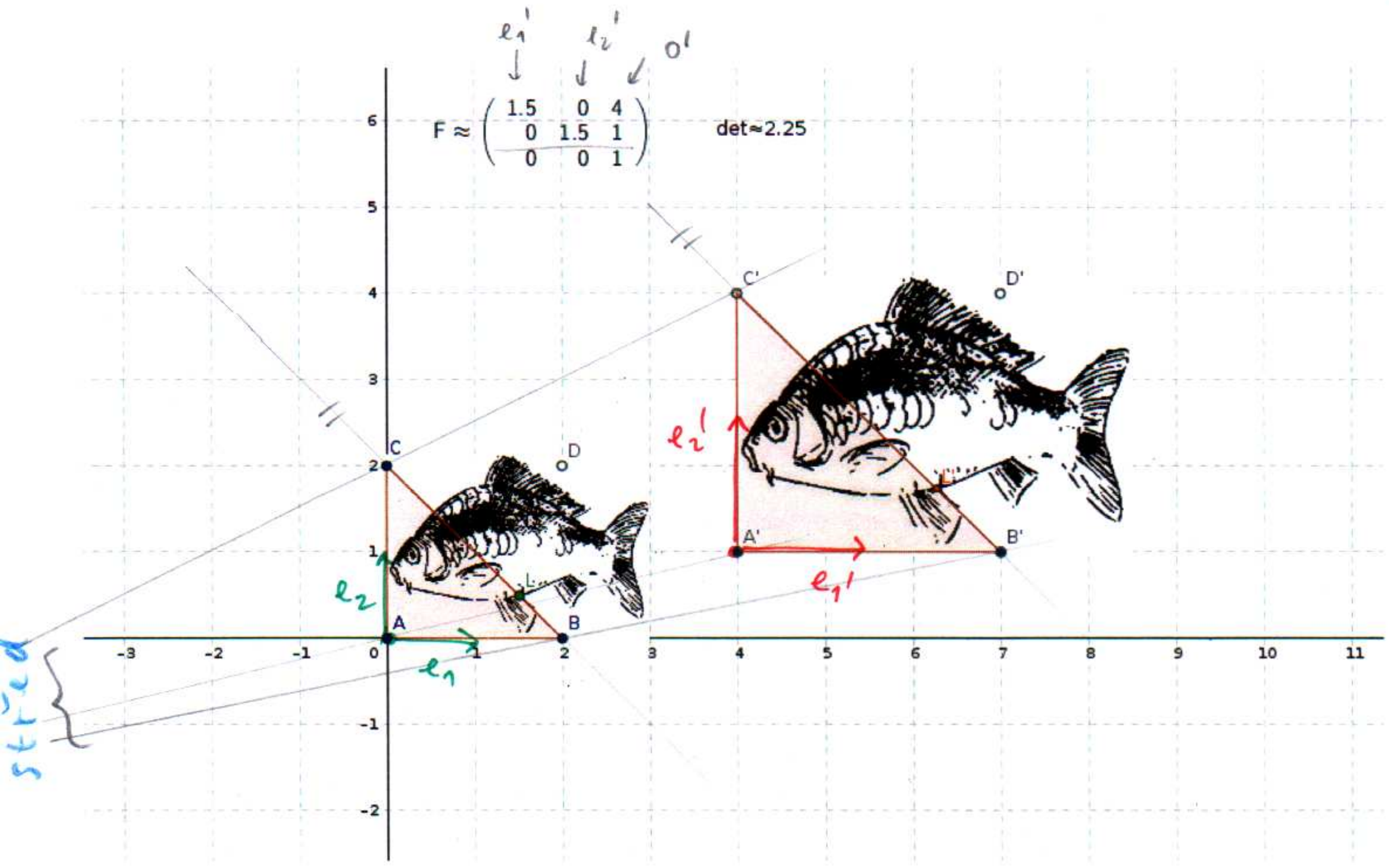
  $$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{pouze} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

- BONUS ... char. čísla:

  $$\underbrace{\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}}_{\boxed{\text{OTÁČENÍ}}} = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \boxed{\lambda = \pm i}$$

  odp. ÚHLU otáčení $\alpha = 90°$



* $e_1' \perp e_2'$, $\|e_1'\| = \|e_2'\| = \frac{3}{2} \Longrightarrow$ PODOBNOST s koef. $k = \frac{3}{2}$ ✓

(tj. $\pm k^2$) ✓

* $\det\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{9}{4} > 0 \Longrightarrow$ PŘÍMÁ ✓

* vlastní pevné body:

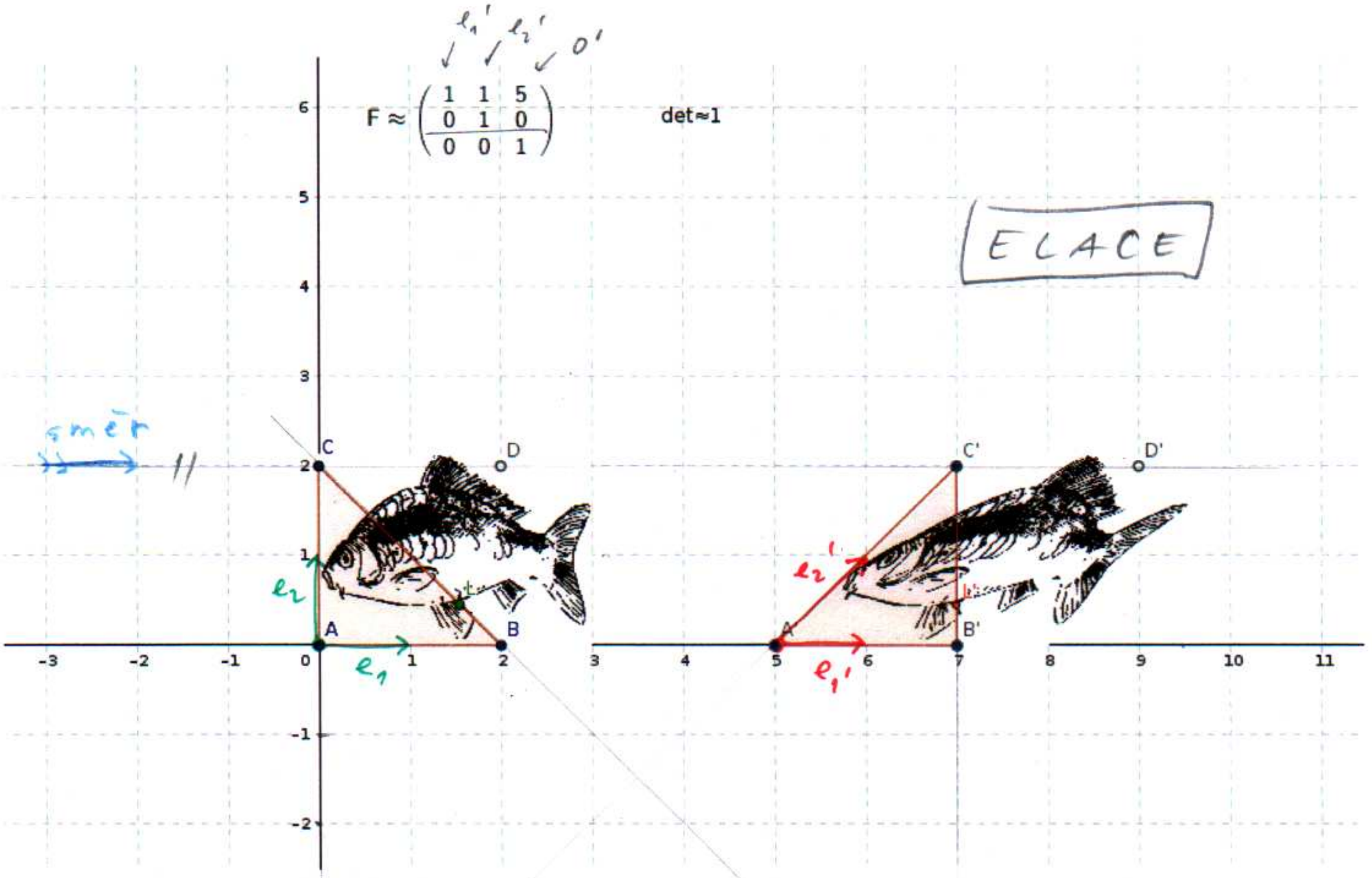
$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = -8 \\ x_2 = -2 \end{matrix}}$$ STŘED ✓

* nevlastní ...

$$\underbrace{\lambda = \frac{3}{2}: \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$ $\rightsquigarrow$ VŠECHNY ✓

(tj. nevlastní osa) ✓

$\boxed{\text{STEJNOLEHLOST}}$



* $e_1' \not\perp e_2'$ $\Rightarrow$ NENÍ shodné ani podobné ✓

osa

$(X = X')$ $(Y = Y')$

* $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{1 > 0}$ $\Rightarrow$ PŘÍMÉ a EKVI-AFINNÍ

* vlastní pevné body:

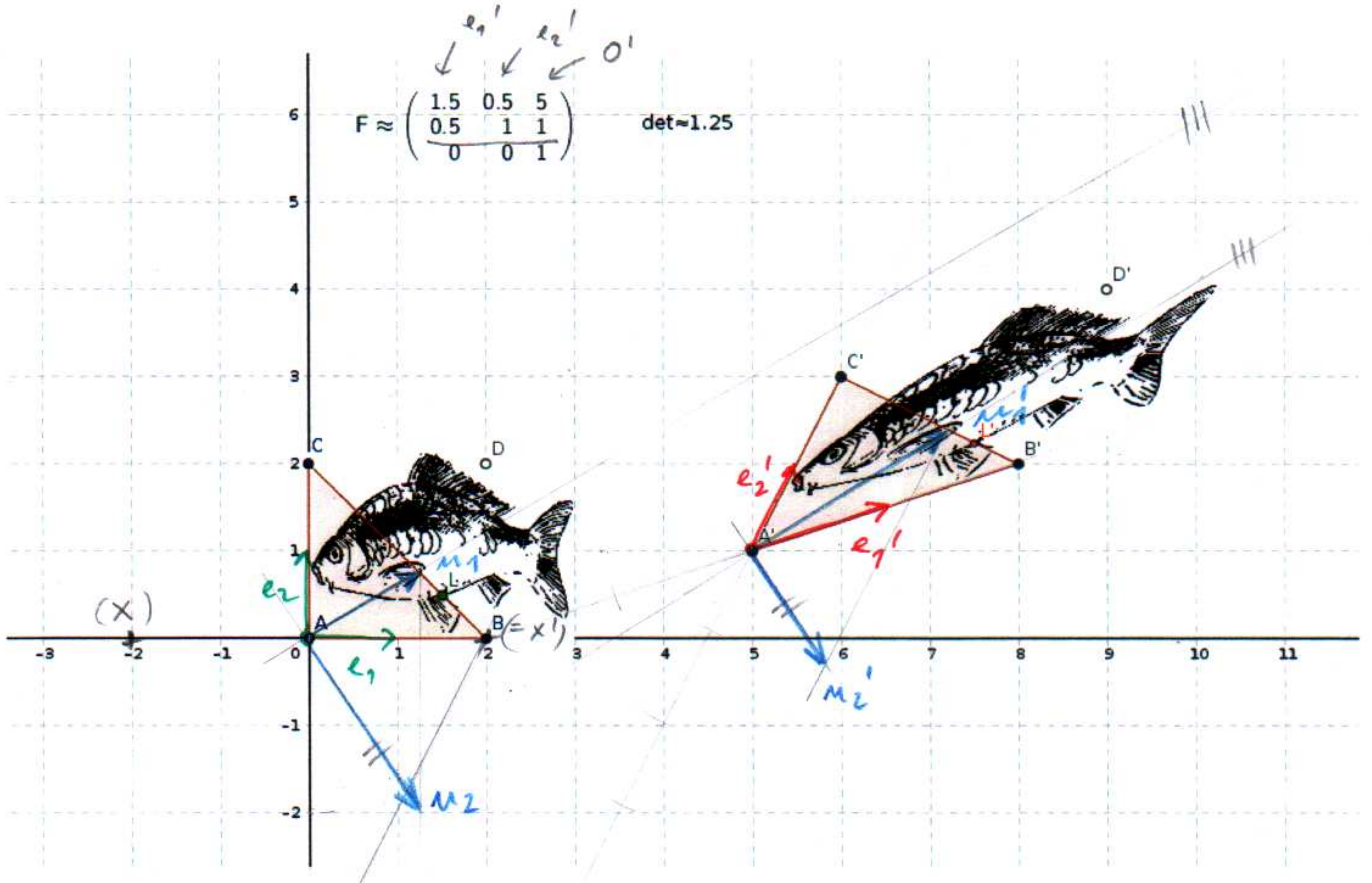
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{x_2 = -5} \text{ OSA ✓}$$

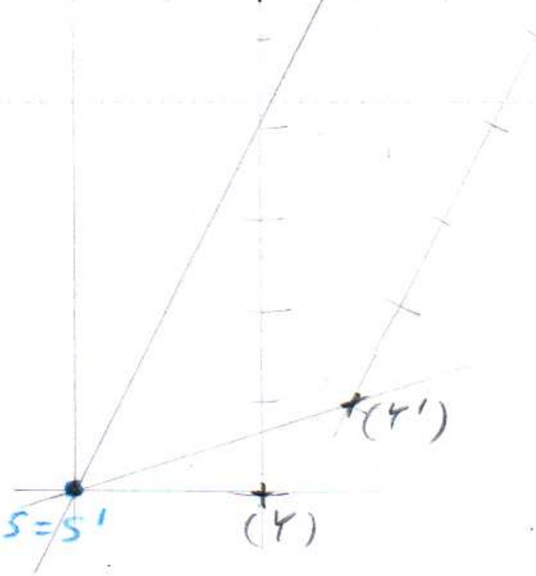
* nevlastní ...

$$\lambda = 1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{směr osy ✓}$$

* další char. čísla skutečné NEJSOU:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ ✓}$$





- $e_1' \not\perp e_2'$ $\Rightarrow$ NENÍ shodné ani podobné ✓

- $\det\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow$ PŘÍMÉ OBECNÉ AFINNÍ ✓

- vlastní pevné body:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -8 \end{matrix}}$$

- char. čísla:

$$\det\begin{pmatrix} 3/2 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$$

- char. vektory ~ nevlastní pevné body:

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{4} \rightsquigarrow u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{4} \rightsquigarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

3. PŘÍKLAD – SKLÁDÁNÍ

$$G := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ posunutá souměrnost } (s. 3)$$

$$H := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ osová souměrnost } (s. 10)$$

NÁSOBENÍ MATIC

$$F = H \circ G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{tj. } X' = X + \binom{2}{-2}$$

SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ

... CO JSME DOSTALI?

... $\boxed{\text{POSUNUTÍ}}$! ← o vektor $\binom{2}{-2}$

- SHODNOST ✓
- PŘÍMÁ ✓
- PEVNÉ BODY
  - ŽÁDNÉ VLASTNÍ ✓
  - VŠECHNY NEVLASTNÍ ✓

OPAKOVÁNÍ

PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ ZOBRAZENÍ ...

$$\cdots \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1' & e_2' & \cdots & o' \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

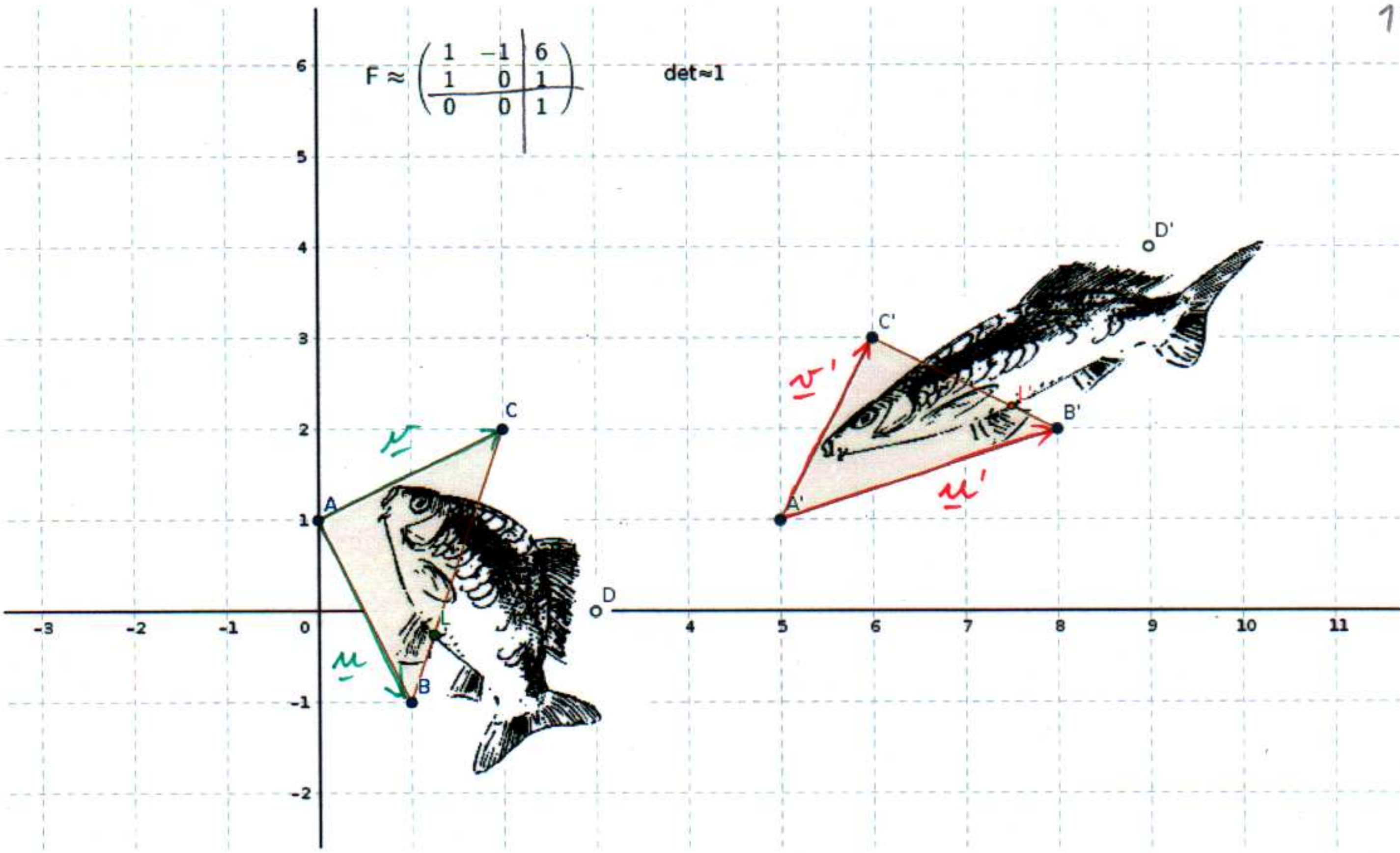
- jde PŘÍMO a SNADNO, pokud jde přímo a snadno určit obrazy $e_1', e_2', \ldots, o'$ (většina předchozích příkladů)

- OBECNĚ třeba řešit SOUSTAVU LIN. ROVNIC

... viz s. 4, 17, 18

- ALTERNATIVNĚ složením dvou jednodušších zobrazení (INVERZNÍ MATICE)

... viz s. 19

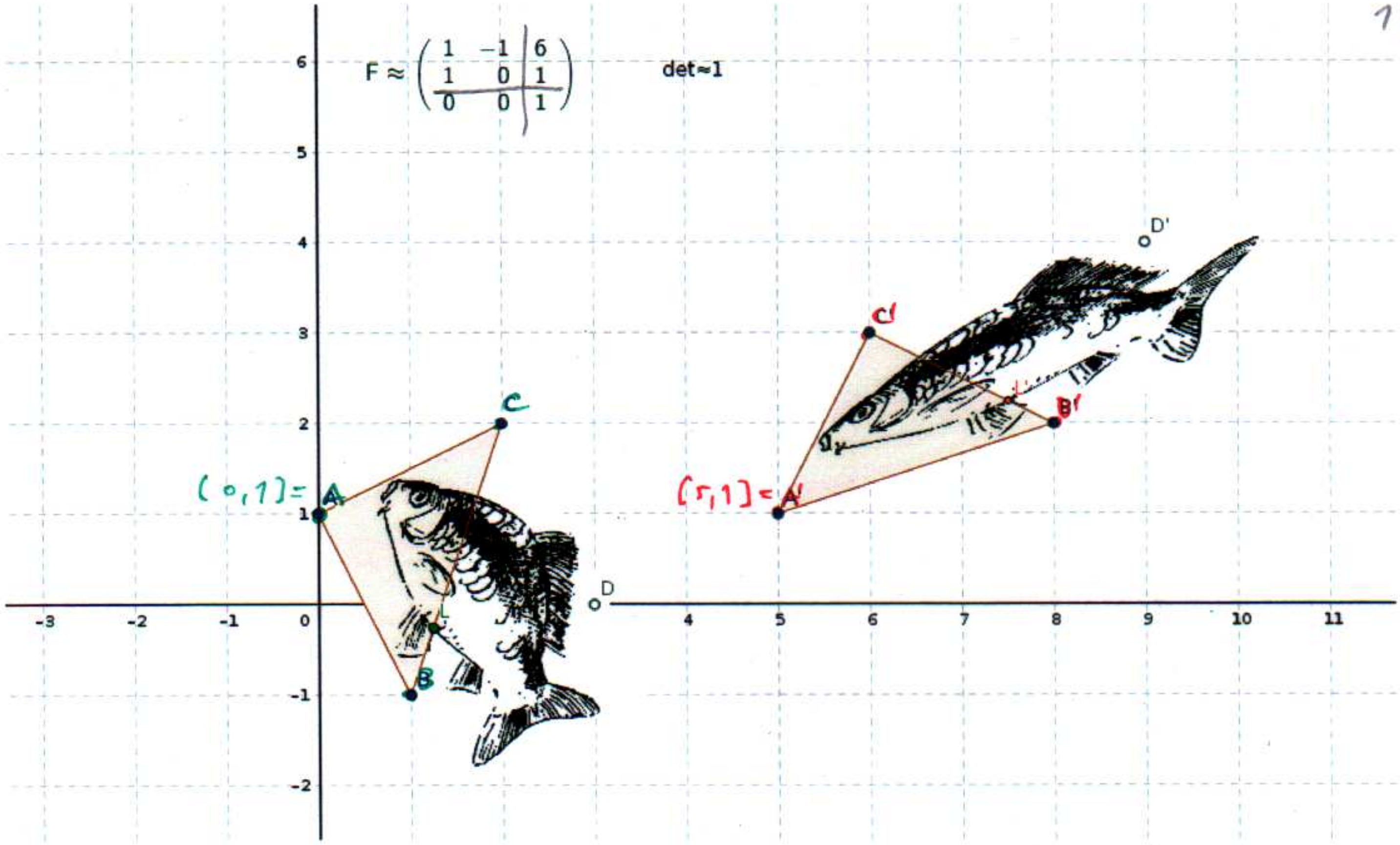


Ⓐ přímo (NESNADNO) z předchozího:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{e}_1 = \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{u} + \boxed{\tfrac{2}{5}}\,\underline{v} \\ \underline{e}_2 = \boxed{-\tfrac{2}{5}}\,\underline{u} + \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{v} \\ O = A - \underline{e}_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \underline{e}_1' = \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{u}' + \boxed{\tfrac{2}{5}}\,\underline{v}' = (1,1) \\ \underline{e}_2' = \boxed{-\tfrac{2}{5}}\,\underline{u}' + \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{v}' = (-1,0) \\ O' = A' - \underline{e}_2' = (6,1) \end{array}$$

soustava rovnic "souřadnice vektorů $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ v bázi $(\underline{u}, \underline{v})$ ..."

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$



B) NEPŘÍMO — dosazení dvojic bodů:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} a & c & k \\ b & d & l \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

• $A \mapsto A'$: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} 5 &= c + k \\ 1 &= d + l \end{aligned}}$

• $B \mapsto B'$: $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \cdot \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} 8 &= a - c + k \\ 2 &= b - d + l \end{aligned}}$

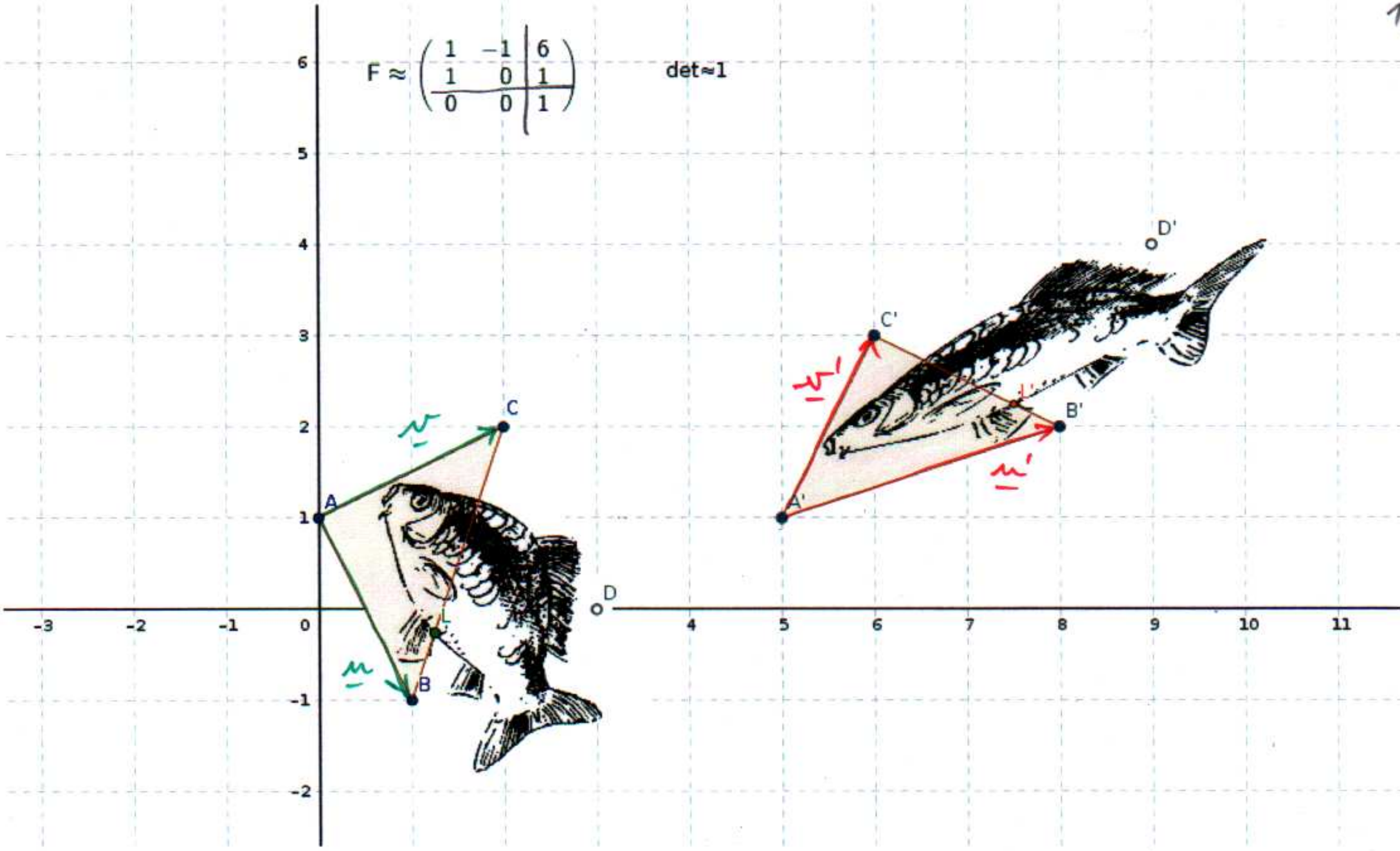
• $C \mapsto C'$: $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \cdot \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\ \cdots\ }$

CELKEM $\boxed{6}$ lin. ROVNIC / $\boxed{6}$ neznámých ...

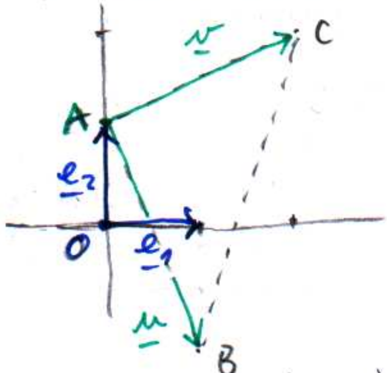
.... jednoznačné řešení:

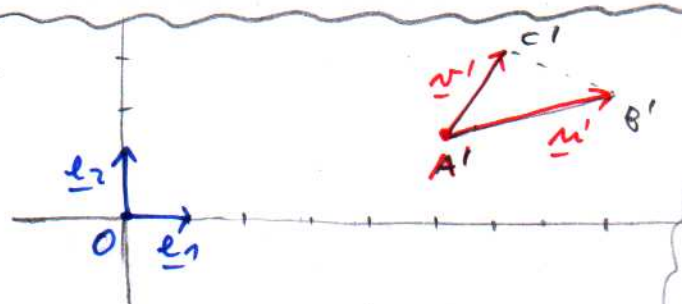
$a = 1 \quad c = -1 \quad k = 6$

$b = 1 \quad d = 0 \quad l = 1$



(c) NEPŘÍMO — SLOŽENÍM JEDNODUŠŠÍCH!





$$G = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad H = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

podobnost s koef. na s. 17 NENÍ náhodná!

$$F \circ G = H, \quad \text{tj.} \quad F = H \circ G^{-1}$$

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

TYPY ZOBRAZENÍ ...

... vzhledem ke kartézským souřadnicím:

AFINNÍ

$$x' = \left(\begin{array}{cc} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \cdot x$$

PODOBNÉ

$$D^T \cdot D = k^2 E$$

k ... koeficient podobnosti

EKVI-AFINNÍ

$$\det(D^T \cdot D) = 1$$

SHODNÉ

$$D^T \cdot D = E$$

... viz minulý semestr (s. 133–135) a předchozí příklady

ZOBR. MEZI PROSTORY <u>STEJNÉ DIMENZE</u> ...

... matice D ČTVERCOVÁ:

- $\det D$ ⟨ $\neq 0$ ... vzáj. jednoznačné (zejm. prosté) / $= 0$ ... degenerované (ne prosté)
- $\det D$ ⟨ > 0 ... přímé (zach. orientaci) / < 0 ... nepřímé (mění —〃—)

- SHODNÉ ⟶ PODOBNÉ

  $\det D = \pm 1$ $\quad$ $\det D = \pm k^n$

  n ... dim. prostoru

  k ... koef. podobnosti

  ↘ EKVI-AFINNÍ

  $\det(D^T \cdot D) = 1$

- zejména: SHODNÉ, PODOBNÉ, EKVIAF. ⟶ PROSTÉ.

PEVNÉ (SAMODRUŽNÉ) BODY ...

... VLASTNÍ ... $\boxed{D \cdot X + C = X}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \boxed{1} \end{pmatrix}} \qquad \boxed{(D - E) \cdot X = -C} \quad (*)$$

... NEVLASTNÍ ... $\boxed{D \cdot X = \lambda X}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} D & C \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ \boxed{0} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ \boxed{0} \end{pmatrix}} \qquad \boxed{(D - \lambda E) \cdot X = 0} \quad (**)$$

... z algebry vieme, že sústava (**) má <u>netriviálne</u> riešenie (tj. $X \neq 0$) $\iff$ $\boxed{\det(D - \lambda E) = 0}$!

... tzv. "char. polynom"
... korene = "char. čísla"
... odp. riešení (**) = "char. vektory"

OBECNĚ PLATÍ (ALGEBRA):

* char. vektory odp. různým číslům λ jsou lin. nezávislé.
(nenulové)

řešení homog. soustavy lin. rovnic (**)

* char. vektory odp. číslu λ tvoří vektorový podpr., jehož dimenze $\leq$ alg. násobnost λ.
(příklad $\neq$ na s. 13)

* det D = součin všech char. čísel vč. násobností.
(netriv. příklad na s. 14) obecně komplexních (viz s. 11)

PRO AFINNÍ ZOBR:

řešení nehomog. soustavy (*)

* vlastní pevné body tvoří afinní podpr. (nebo $\emptyset$).
* nevlastní ... odp. různým char. číslům jsou různé.
(odp. vektory nezávislé)

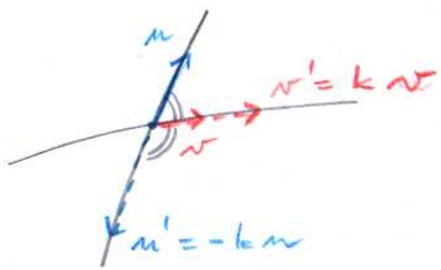
PRO PODOBNÉ (tedy i SHODNÉ):

koef. podobnosti

* $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\lambda = \pm k$.

... $\|u'\| \overset{!}{=} k\,\|u\|$ pro lib. $u \in V$

* char. vektory odp. různým číslům λ jsou kolmé.



· $\alpha := \sphericalangle(u,v) \overset{!}{=} \sphericalangle(u',v') =: \alpha'$

· $\alpha + \alpha' = 180°$

$\underbrace{\qquad}_{\alpha = 90°}$

(viz např. s.9)

PRO PODOBNÉ, které NENÍ SHODNÉ:

* ... má vždy právě jeden vlastní pevný bod!

· vlastní pevné body = řešení soust. $(D-E)\cdot X = -C$

(s.22)

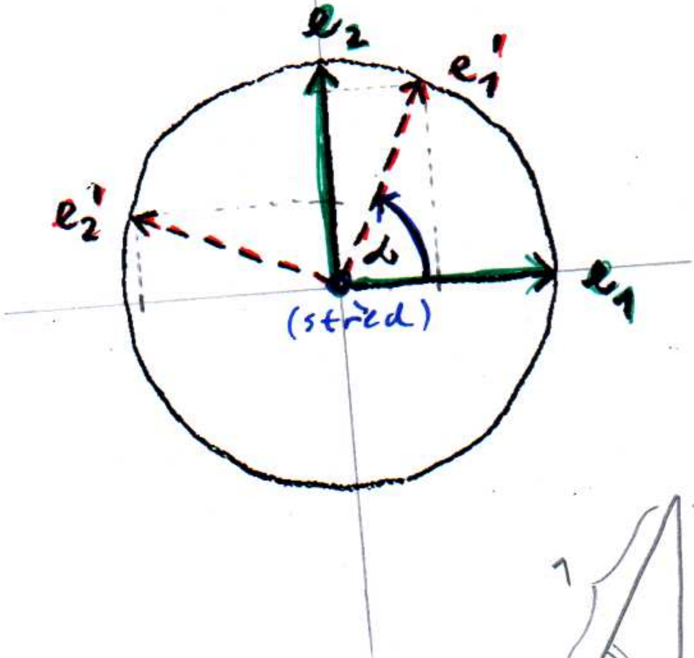
· jednoznačné řešení $\Longleftrightarrow$ $\det(D-E) \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $\lambda = 1$ není char. číslem

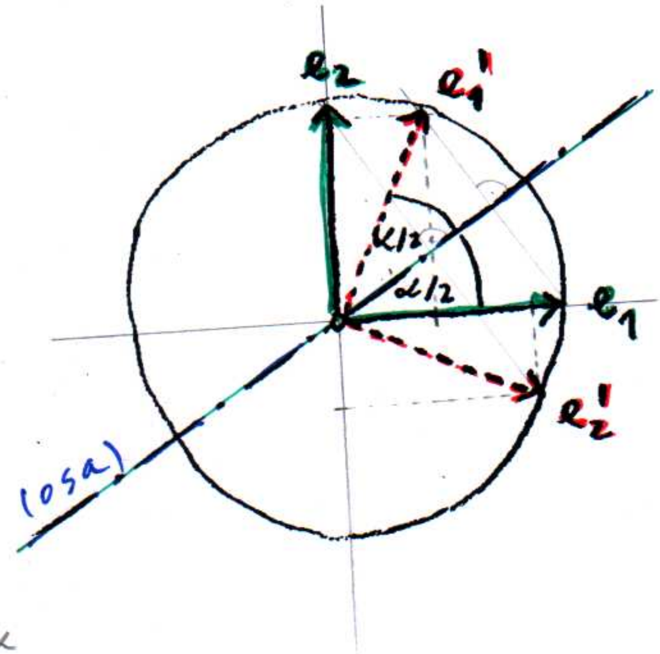
· podobné, ne shodné $\Longrightarrow$ jediné $\lambda = \pm k \neq 1$.

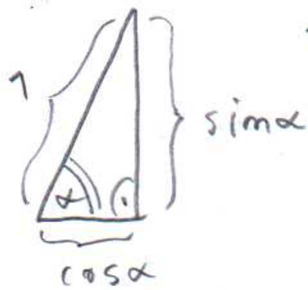
SHODNOSTI V ROVINĚ

přímá



nepřímá





$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad e_1' & \quad e_2' \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \end{array}$$

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad e_1' & \quad e_2' \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \end{array}$$

... být shodností v rovině je natolik omezující, že matice zobr. mohou být jen <u>dvojího</u> typu.

... interpretace úhlu $\underline{\alpha}$ je naznačena v obrázcích.

SHODNOSTI V ROVINĚ ...

Samodružné směry / Samodružné body	Žádný	Právě dva na sebe kolmé	Každý
Žádný		N $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ Posunutá souměrnost	P $X' = X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$; $e \neq 0$ Posunutí
Právě jeden	P $X' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} X$ $\alpha \neq k\pi$, k celé **Rotace** o úhel α se středem v počátku		P $X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ **Středová souměrnost** podle počátku
Vyplní přímku		N $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ **Souměrnost podle osy x**	
Každý			P $X' = X$ **Identita**

... KLASIFIKACE PODLE SAMODR. PRUKŮ.

... všechna vyjádření vzhledem ke VHODNÝM souř. soustavám.

... všimněme si prázdných polí!

OPAKOVÁNÍ

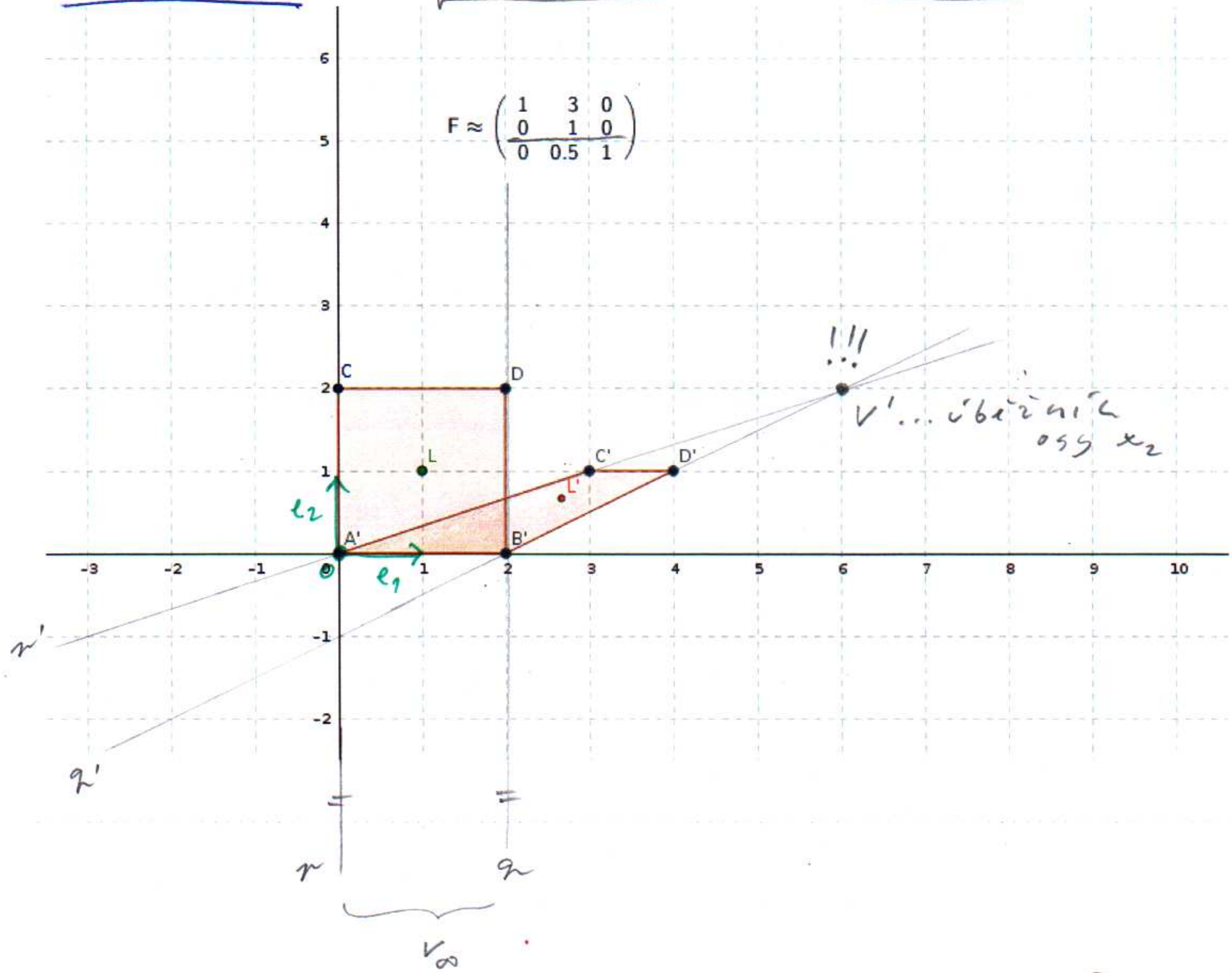
PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

ROZŠÍŘENÍ

CO TEĎ?

PROJEKTIVNÍ ELACE



- v duchu předchozích příkladů UMÍME interpretovat:

e_1' ... obraz 1. bázového vektoru

O' ... obraz počátku

$$F = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

- ale co znamená toto ??

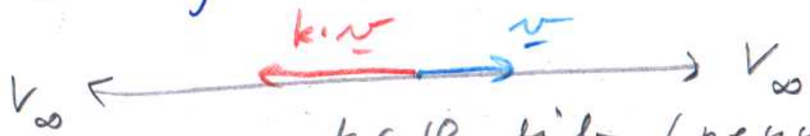
- nelze přehlédnout, že $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ odpovídá právě úběžníku V' !!
(což NENÍ náhoda)

S rozšířenými souřadnicemi jsme dosud pracovali takto:

- bod $X = [x_1, x_2]$ $\rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$
- vektor $\underline{v} = (x_1, x_2)$ $\rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$

Běžně jsme užívali:

- vektor $\underline{v} = (x_1, x_2)$, resp. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$ UKAZUJÍ na tentýž $\boxed{\text{NEVLASTNÍ}}$ BOD jako kterýkoli jeho násobek ...



$k \in \mathbb{R}$ lib. (nenulové)

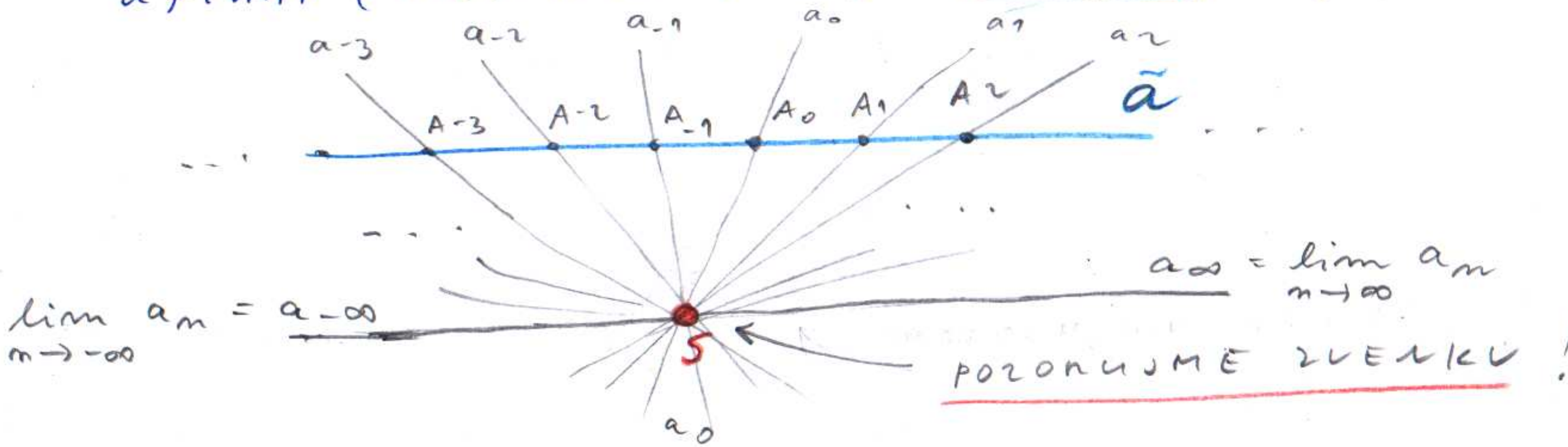
co kdybychom připustili, že

- vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$ UKAZUJE na tentýž $\boxed{\text{VLASTNÍ}}$ BOD jako kterýkoli jeho násobek ...?

(na násl. stranách vysvětlíme/upřesníme a pak se vrátíme k příkladu na s. 27)

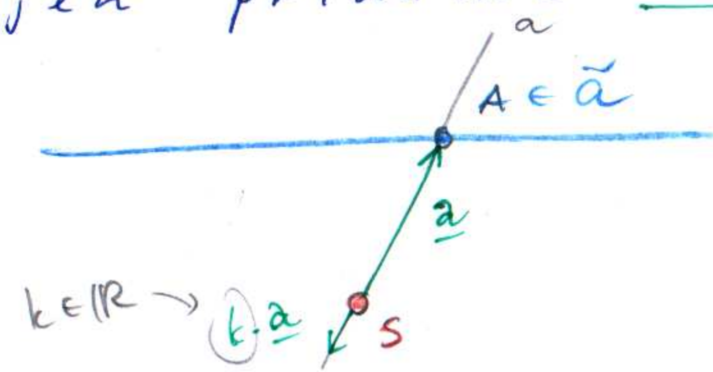
OPAKOVÁNÍ

- Jak jsme počítali NEVLASTNÍ body rozšířené afinní (eukleidovské) přímky?



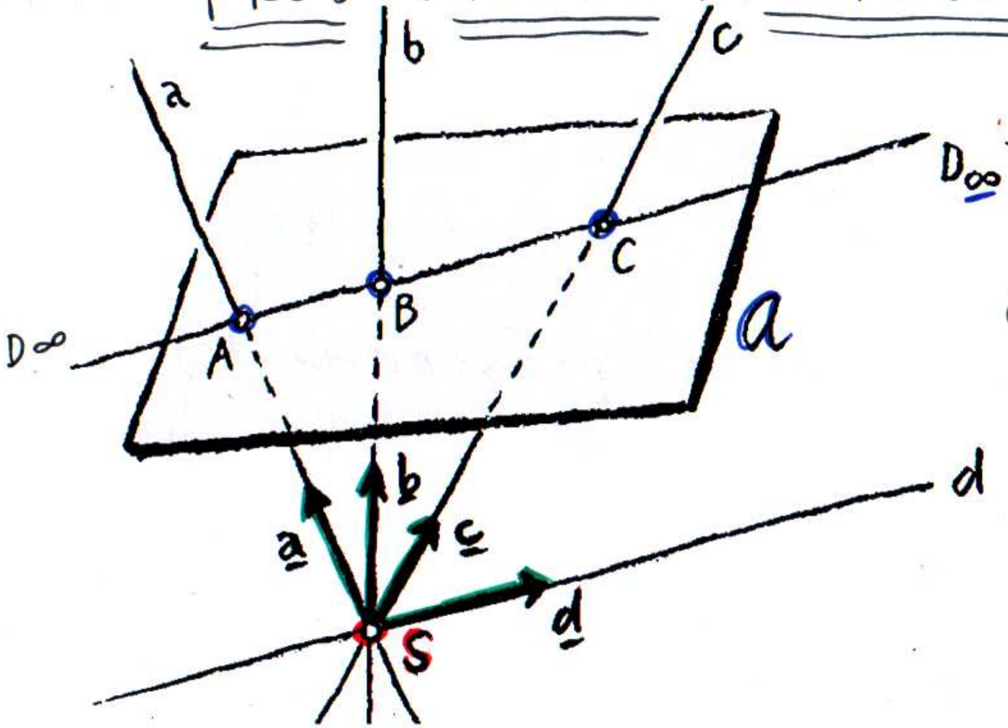
$a_\infty \overset{!}{=} a_{-\infty}$ ... jediný NEVLASTNÍ BOD!

→ Nyní jen přidáme VEKTORY (resp. směry) ...



← na každý bod A UKAZUJEME z S vektorem $\underline{a}$, $k \cdot \underline{a}$ ... (který nás zajímá až na násobek!)

PROJEKTIVNÍ ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ



ZÁKLADNÍ PROJEKTIVNÍ TRIK

dívejme se na náš afinní prostor ($\mathcal{A}$) zvenku (S)!

- nadprostor "$\mathcal{A}+S$" ozn. $\mathcal{N}$
- zaměření $\vec{\mathcal{A}} \subset \vec{\mathcal{N}}$ ozn. $V \subset W$
- rozšířený prostor ozn. $\tilde{\mathcal{A}}$

- $\{$ $\boxed{\text{vlastní}}$ body v $\tilde{\mathcal{A}}$ $\}$ $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ přímky proch. S $\boxed{\text{různoběžné}}$ s $\mathcal{A}$ $\}$

  $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ směry ve W $\boxed{\text{nepatří}}$ do V $\}$

- $\{$ $\boxed{\text{nevlastní}}$ body v $\tilde{\mathcal{A}}$ $\}$ $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ přímky proch. S $\boxed{\text{rovnoběžné}}$ s $\mathcal{A}$ $\}$

  $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ směry ve W $\boxed{\text{patří}}$ do V $\}$

obecně

$\tilde{a}$

- projektivní prostor dim $\boxed{n}$

W

$= \{$ směry ve vektorovém prostoru dim $\boxed{n+1}$ $\}$

1-dim podprostory

$\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \tilde{a}$

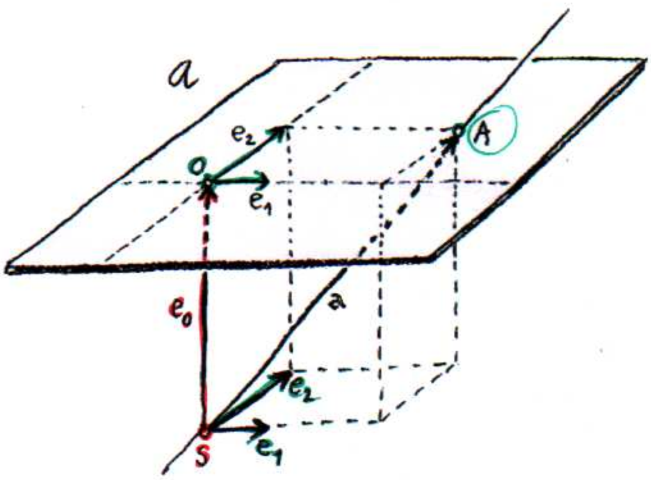
- projektivní podprostor dim $\boxed{k}$

$=$ vektorový podprostor dim $\boxed{k+1}$

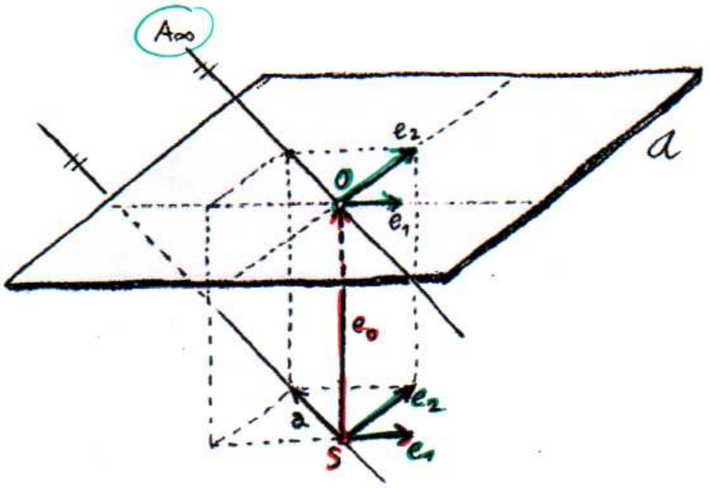
$U \subseteq W$

HOMOGENNÍ POPIS

A vlastní



A nevlastní



vzhledem k afinní souř. soustavě

- **afinní souřadnice:**

$A = [3, 1]$ $\qquad$ $\underline{a} = (-2, 1)$

tj. $A = O + 3\cdot \underline{e}_1 + 1\cdot \underline{e}_2$ $\qquad$ $\underline{a} = -2\cdot \underline{e}_1 + 1\cdot \underline{e}_2$

vzhledem k rozšířené souř. soustavě

- **homogenní souřadnice:**

$A = (3 : 1 : \boxed{1})$ $\qquad$ $A = (-2 : 1 : \boxed{0})$

tj. $A = S + \boxed{1\cdot \underline{e}_0} + 3\cdot \underline{e}_1 + 1\cdot \underline{e}_2$ $\qquad$ $A = S + \boxed{0\cdot \underline{e}_0} - 2\underline{e}_1 + 1\cdot \underline{e}_2$

(subs. $O = S + \underline{e}_0$)

POZNÁMKY

- zápis $A=(3:1:1)$ nám připomíná, že nás mají zajímat toliko POMĚRY!
- tedy $A=(3:1:1)=(-6:-2:-2)= \dots$
- od HOMOGENNÍCH souř. k AFINNÍM:

$A=(7:3:6)=(7/6:1/2:1)$

$6 \neq 0 \Rightarrow$ vlastní bod:

$A=[7/6, 1/2]$

$v=(-3:8:0)$

$0 \Rightarrow$ nevlastní

... odp. vektor $v=(-3,8)$

- umístění rozšířené souřadnice je věcí konvence...

  v tomto souboru dáváme nakonec (podle GeoGebry), v hlavním textu na začátek ...

- příklad výpočtu vzájemné polohy přímky a roviny v 3-dim prostoru na další straně $\longrightarrow$

Afinní souřadnice

$$\mathcal{B} = \left\{ [1,1,0] + t(2,a,1) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\mathcal{C} = \{ x_1 + 2x_2 = 2 \}$$

Společné body $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} (1+2t) + 2(1+at) &= 2, \\ (2+2a)t &= -1. \end{aligned}$$

Společné vektory $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$:

$$\begin{aligned} 2t + 2at &= 0, \\ (2+2a)t &= 0. \end{aligned}$$

Pro $a = -1$ je $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ a $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}}$,
tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **rovnoběžné**.

Pro $a \neq -1$ je $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} =$ bod, jmenovitě

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \left[\tfrac{2a}{2+2a}, \tfrac{2+a}{2+2a}, \tfrac{-1}{2+2a} \right],$$

tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **různoběžné**.

Homogenní souřadnice

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ \alpha(\underline{1}:1:1:0) + \beta(\underline{0}:2:a:1) \,\middle|\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\widetilde{\mathcal{C}} = \left\{ -2\underline{x_0} + x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

Společné body $\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}}$:

$$\begin{aligned} -2\alpha + (\alpha + 2\beta) + 2(\alpha + a\beta) &= 0, \\ \alpha + (2+2a)\beta &= 0, \\ \alpha &= -(2+2a)\beta. \end{aligned}$$

Tedy $\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}} =$ bod, jmenovitě

$$\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}} = (\underline{-2-2a} : -2a : -2-a : 1).$$

Pro $a = -1$ je $\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}}$ nevlastní,
tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **rovnoběžné**.

Pro $a \neq -1$ je $\widetilde{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{C}}$ vlastní,
tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **různoběžné**.

OPAKOVÁNÍ

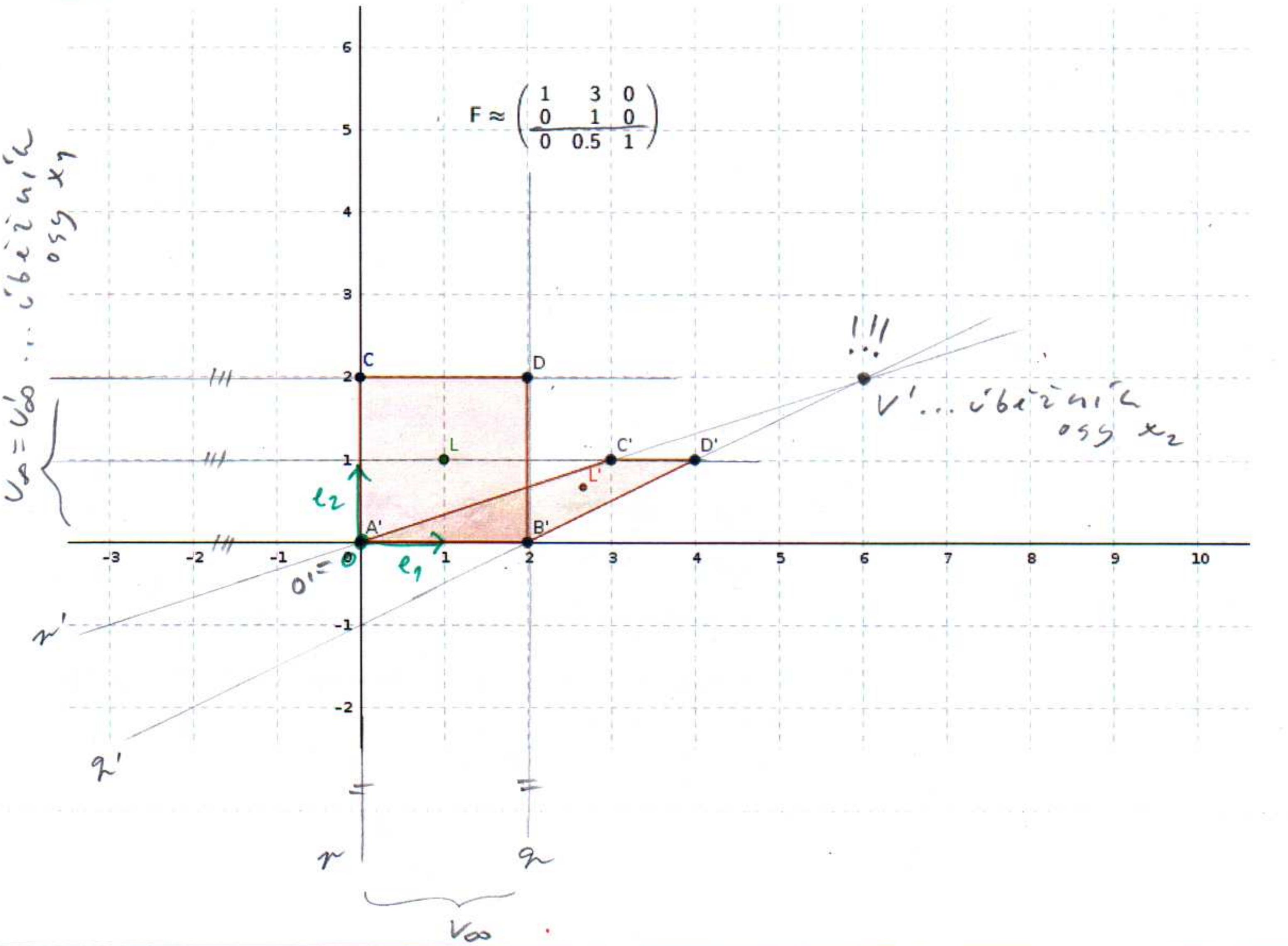
PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

ROZŠÍŘENÍ

PŘÍKLADY

ZPĚT K PŘÍKLADU na s. 27 :



→ SPRÁVNÁ INTERPRETACE matice zobrazení je :

$$F = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

O' ... homog. souřadnice obrazu POČÁTKU

$O' = O = (\underline{0 : 0} : \underline{1})$ ✓

V' ... homog. souř. ÚBĚŽNÍKU 2. souř. osy

$V' = (3 : 1 : \underline{1/2}) = (\underline{6 : 2} : \underline{1})$ ✓

U' ... hom. souř. ÚBĚŽNÍKU 1. souř. osy

$U' = U = (\underline{1 : 0} : \underline{0})$ ✓

SKUTEČNĚ:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

U .. hom. souř. NEVLASTNÍHO bodu osy x_1

U' ... hom. souř. jeho obrazu tj. 1. ÚBĚŽNÍK

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ \hline 1/2 \end{array}\right)$$

V ... NEVL. bod osy x_2

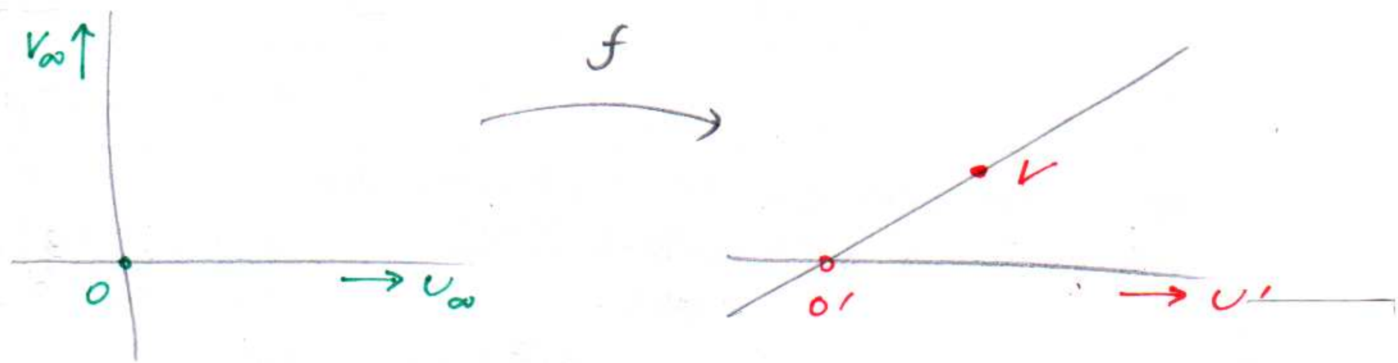
V' ... 2. ÚBĚŽNÍK

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

O ... POČÁTEK

O' ... jeho obraz

Naopak:



- zadání $O \mapsto O'$
  $U \mapsto U'$
  $V \mapsto V'$

  NEURČUJE projektivní zobrazení jednoznačně !!

- potřeba JEŠTĚ:
  - buď 2 body na osách ("jednotky")
  - nebo 1 bod v "dostatečně obecné" poloze ...

  vzhledem k předchozím.

(viz konstrukce v předminulém semestru ...)

V NAŠEM PŘÍKLADĚ ...

... pro $O = (0:0:1) \mapsto (0:0:1) = O'$

$U = (1:0:0) \mapsto (1:0:0) = U'$

$V = (0:1:0) \mapsto (6:2:1) = V'$

... máme přímo (a snadno) akorát:

$$F = \begin{pmatrix} a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$ ... kde $a, b, c \neq 0$ mohou být jakékoliv

... zobrazení je určeno JEDNOZNAČNĚ až např. s podmínkou

$$D = (2:2:1) \mapsto (4:1:1) = D'$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix}}_{F} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{D}} = \boxed{\begin{pmatrix} 2a+12b \\ 4b \\ 2b+c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 4k \\ k \\ k \end{pmatrix}}_{D'}}$$

CELKEM $\boxed{3}$ lin. rovnice

$\boxed{4}$ neznámé

ŘEŠENÍ $k = 4b$, $\underbrace{b = \text{lib.}}$

$a = 2b$, $c = 2b$

$$\underbrace{\qquad}$$

$$F = b \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ kde } b \neq 0 \text{ lib.!}$$

(odpovídá matici na s. 35 pro $b = 1/2$ ... ✓)

PRO SROVNÁNÍ ...

... zadání
$$A = (0:0:\underline{1}) \mapsto (0:0:\underline{1}) = A'$$
$$B = (2:0:\underline{1}) \mapsto (2:0:\underline{1}) = B'$$
$$C = (0:2:\underline{1}) \mapsto (3:1:\underline{1}) = C'$$
$$D = (2:2:\underline{1}) \mapsto (4:1:\underline{1}) = D'$$

... dosazeno pro obecnou (neznámou) matici
$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

... dává ...
$$\overbrace{\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}}^{F} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \overset{A'}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}}$$
$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2a+g \\ 2b+h \\ 2c+i \end{pmatrix} = \overset{B'}{\begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}}$$
$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \overset{C}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2d+g \\ 2e+h \\ 2f+i \end{pmatrix} = \overset{C'}{\begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}}$$
$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \overset{D}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2a+2d+g \\ 2b+2e+h \\ 2c+2f+i \end{pmatrix} = \overset{D'}{\begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}}$$

CELKEM $\boxed{12}$ lin. rovnic $(4 \cdot 3 = 12)$

$\boxed{13}$ neznámých $(3 \cdot 3 + 4 = 13)$

... řešení musí vyjít stejně jako na předchozí straně ...

(srov. s počítáním na s. 4)

CO JEŠTĚ UMÍME O tomto zobrazení?

* $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}}^{F} = \boxed{1} \neq 0 \implies$ nedegenerované (bijektivní)

konkrétní hodnota, resp. znaménko NEJSOU relevantní, neboť $\det(k\cdot F) = k^3 \cdot \det(F)$.

* PEVNÉ BODY ~ CHAR. VEKTORY :

$\ldots \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix}}_{F-\lambda E} = (1-\lambda)^3 \ldots$ kořen $\lambda = 1$

$\ldots$ pro $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \iff \boxed{x_2 = 0}$ (x_1, x_0 .. lib) … OSA

zobrazení je ZÁKLADNÍ tj. osová kolineace.

(sr. s počítáním pro afinní příklady a pozn. na s. 22–23)

* BONUS : zobrazení má taky STŘED!

Najděte jej (a) konstrukčně, (b) početně.

(vzpomeňte na Desarguesovu větu ...)

OPAKOVÁNÍ

PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

ROZŠÍŘENÍ

PŘÍKLADY

ZÁKLADNÍ VĚTA

* v předchozích (a mnoha dalších) PŘÍKLADECH pozorujeme, že

$\boxed{\text{SHODNÁ} \to \text{PODOBNÁ} \to \text{AFINNÍ} \to \text{PROJEKTIVNÍ}}$

zobrazení prostoru dim $\boxed{n}$ lze vždy popsat maticí $\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{\boxed{n+1}}$, tedy $\boxed{\text{LINEÁRNÍM}}$ zobrazením vekt. prostoru dim $\boxed{n+1}$.

* Tvrdíme, že tohle platí OBECNĚ! (... viz dále)

* opakujeme, že $\boxed{\text{PROJEKTIVNÍ}}$ znamená
  a) zobrazuje přímky na přímky,
  b) zachovává dvojpoměry ← čtveřic kolin. bodů

* opakujeme, že $\boxed{\text{LINEÁRNÍ}}$ znamená, že zachovává lineární kombinace vektorů.

POZOROVÁNÍ

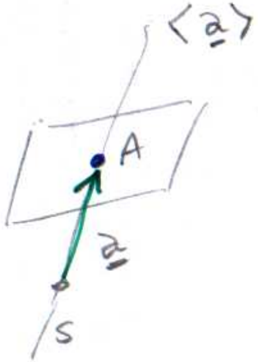
- $\tilde{a}, \tilde{a}'$ ... projektivní prostory ($\overset{\boxed{n}}{\dim} \geq 2$)
- W, W' ... odp. vektorové prostory ($\underset{\boxed{n+1}}{\dim} \geq 3$)
- $F : W \to W'$ ... <u>LINEÁRNÍ</u> (izo.)

  ⇝ obraz vekt. podpr. $U \subseteq W$ je vekt. podpr. (stejné dim)

  ⇝ indukované zobrazení $f : \tilde{a} \to \tilde{a}'$, a to takové, že

  → f zobr. <u>proj. přímky na proj. přímky</u>

  ⇝ (a navíc bijektivní)



$$\begin{array}{ccc} \langle \underline{a} \rangle \in W & \xrightarrow{F} & W' \ni \langle \underline{a}' \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \in \tilde{a} & \overset{f}{\dashrightarrow} & \tilde{a}' \ni A' \end{array}$$

- FUNGUJE TO I OPAČNĚ ?

ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

- ANO, FUNGUJE TO I OPAČNĚ!
- TJ.

  $f : \tilde{a} \xrightarrow{1:1} \tilde{a}'$ mezi prostory dim ≥ 2,
  které zobrazuje **přímky na přímky**

  $$\Downarrow$$

  f je určeno nějakým **LINEÁRNÍM** izomorfismem
  $F : W \xrightarrow{1:1} W'$.

- **DŮKAZ** ... pro nás příliš těžký (viz von Staudt 19. stol.)

- **Důsledek**

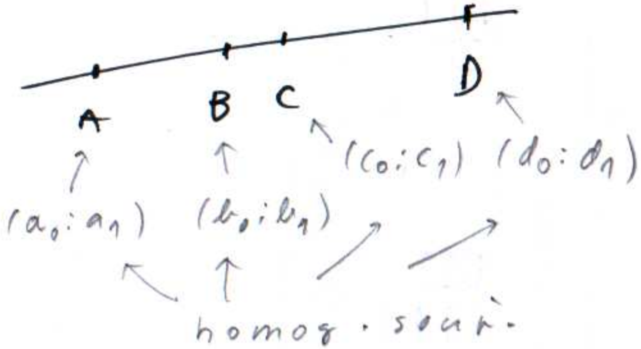
  $f : \tilde{a} \to \tilde{a}'$ jako výše ...
  ... **přímky na přímky**

  $$\Downarrow$$

  f zachovává **DVOJPOMĚRY**, a tudíž
  je PROJEKTIVNÍ!

- Důkaz důsledku (snadný):

... stačí alg. popis DVOJPOMĚRU



$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}$$

... plus Cauchyova věta o součinu det:

$$(A'B'C'D') = \frac{|(F)\cdot(\,:\,:\,)| \cdot |(F)\cdot(\,:\,:\,)|}{|(F)\cdot(\,:\,:\,)| \cdot |(F)\cdot(\,:\,:\,)|} = \frac{\cancel{|F|}\cdot|\,:\,:\,|\cdot\cancel{|F|}\cdot|\,:\,:\,|}{\cancel{|F|}\cdot|\,:\,:\,|\cdot\cancel{|F|}\cdot|\,:\,:\,|} = (ABCD)$$

$\boxed{Z}$

- CVIČENÍ ... sr. s tvrzením a důkazem Pappovy věty (viz předminulý semestr)

...

OPAKOVÁNÍ

PŘÍKLADY

MEZISHRNUTÍ

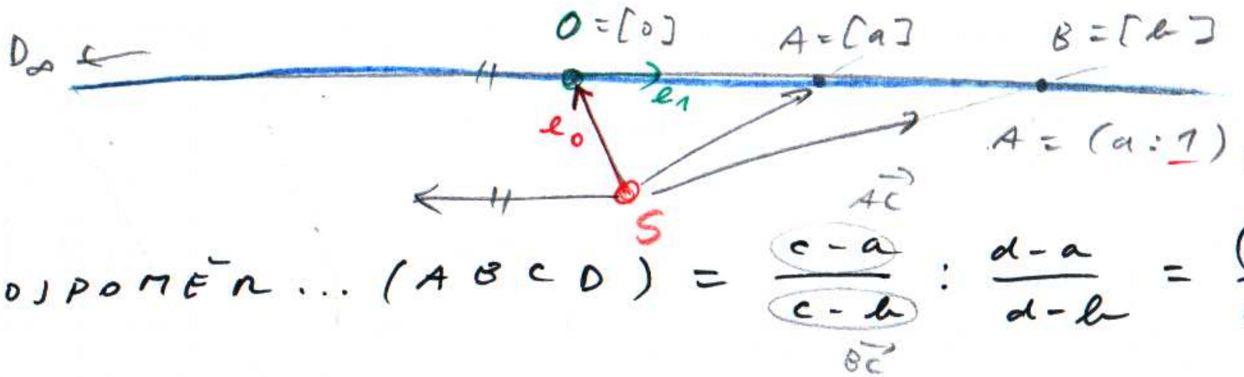
ROZŠÍŘENÍ

PŘÍKLADY

ZÁKLADNÍ VĚTA

POZNÁMKY, ZÁVĚRY

POZNÁMKY ... k alg. vyjádření dvojpoměru



... afinní souř.

$A=(a:1)$, $B=(b:1)$ ... homog. souř.

- DVOJPOMĚR ... $(ABCD) = \dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b} = \dfrac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}$

- POSTŘEH ... $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-b$ ← af. souř. vektoru $\vec{BA}$!

$$(ABCD) = \frac{|\,:\,:\,|\cdot|\,:\,:\,|}{|\,:\,:\,|\cdot|\,:\,:\,|}$$

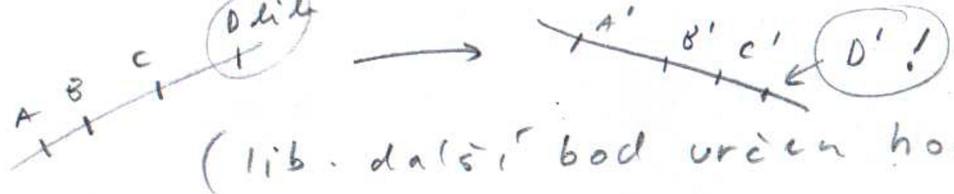
... což je navíc kompatibilní se všemi limitními představami ...

(... nevlastní bod $D_\infty = (1:0) = \lim\limits_{d\to\pm\infty} (d:1)$)

POZNÁMKY ... k dim $\boxed{1}$

- **PROJEKTIVNÍ** zobr. znamená zach. **DVOJPOMĚRY**
  (kolineárnost splněna triviálně)

- **TEDY** ... prosté PROJEKTIVNÍ zobr. mezi PŘÍMKAMI
  je určeno obrazem $\boxed{3}$ bodů ...

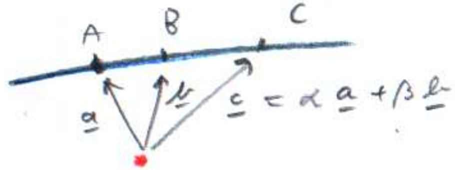


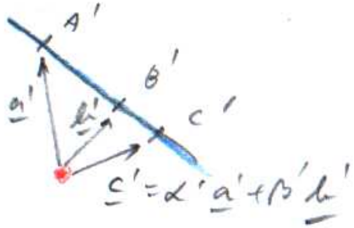
(lib. další bod určen hodnotou dvojpoměru)

- ZÁKL. VĚTA platí taky v tomto případě:

> prosté **PROJEKTIVNÍ** zobr. mezi PŘÍMKAMI
> je určeno **LINEÁRNÍM** izomorfismem
> mezi 2-dim vektorovými prostory.

DŮKAZ ... založen na vhodné manipulaci
s (nutnou) lin. závislostí ukazovacích
vektorů ...





POZNÁMKY ... k určenosti proj. zobr.

- Nejprve připomínáme, že (... viz popis na s. 42)

  LINEÁRNÍ zobr. $W \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} W'$ určují totéž

  PROJEKTIVNÍ zobr. $\tilde{a} \xrightarrow{f} \tilde{a}' \iff \boxed{F = k \cdot G}$

  $k \neq 0$

- Nyní:

  Prosté PROJEKTIVNÍ zobr. prostoru dim $\boxed{n}$

  je určeno obrazy

  - buď $\boxed{n+1}$ bodů v obecné poloze
    a $\boxed{n}$ odpovídajícími úběžníky,
  - nebo $\boxed{n+2}$ bodů v "dostatečně obecné" poloze.

známe z KONSTRUKČNÍ GEOM. pro malá $\boxed{n}$

obecně plyne z předchozí ALGEBRAICKÉ charakterizace!

(... viz též s. 46)

POZNÁMKY ... k neprostým (degen.) zobrazením

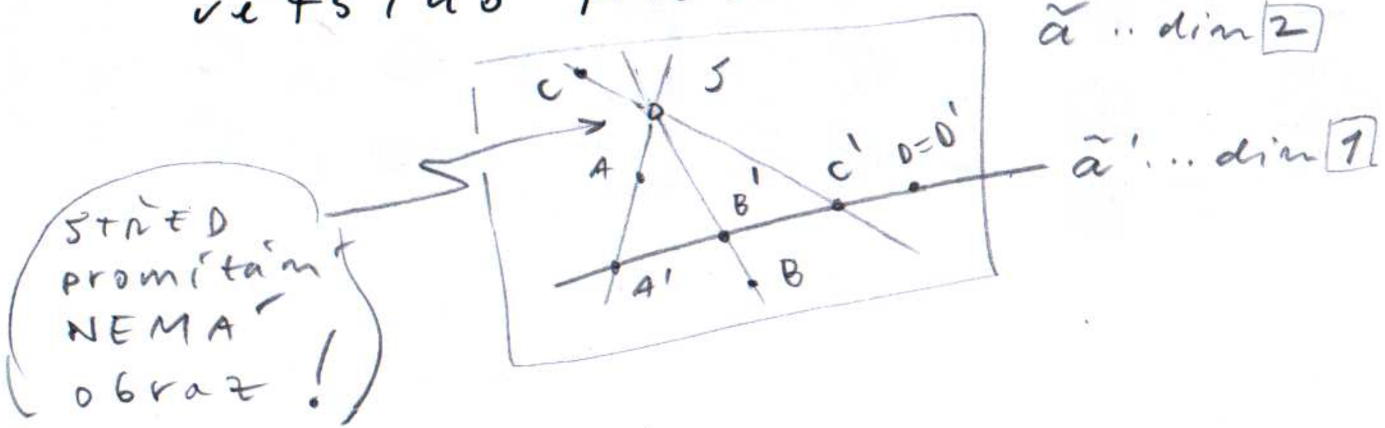
- také neprosté LINEÁRNÍ zobr. $F : W \to W'$ určuje PROJEKTIVNÍ zobr. $f : \tilde{a} \to \tilde{a}'$, akurát je třeba vyloučit jádro F ... !

  $\{x \in W : F(x) = o\}$

- tzn. neprosté PROJEKTIVNÍ zobr. NENÍ definováno na celém proj. prostoru !

... něco podobného u AFINNÍCH zobr. neznáme !

... typický příklad: STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ většího prostoru do menšího ...



POZNÁMKY ... k neprostým zobr.

- s obecnými degen. zobrazeními může být docela PROBLÉM ... (co se týká určenosti)
- s modelovým zobr. $\equiv$ se STŘEDOVÝM PROMÍTÁNÍM se VŽDY nějak domluvíme ! (viz loňské konstrukce a násl. příklad)

PŘÍKLAD ... STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

- ze středu $S = [6,0,5]$ do roviny $\rho : \{x_1 = 0\}$
- v afinních souřadnicích:

$$X = [x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left[0, \frac{6x_2}{6-x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6-x_1}\right] = X'$$

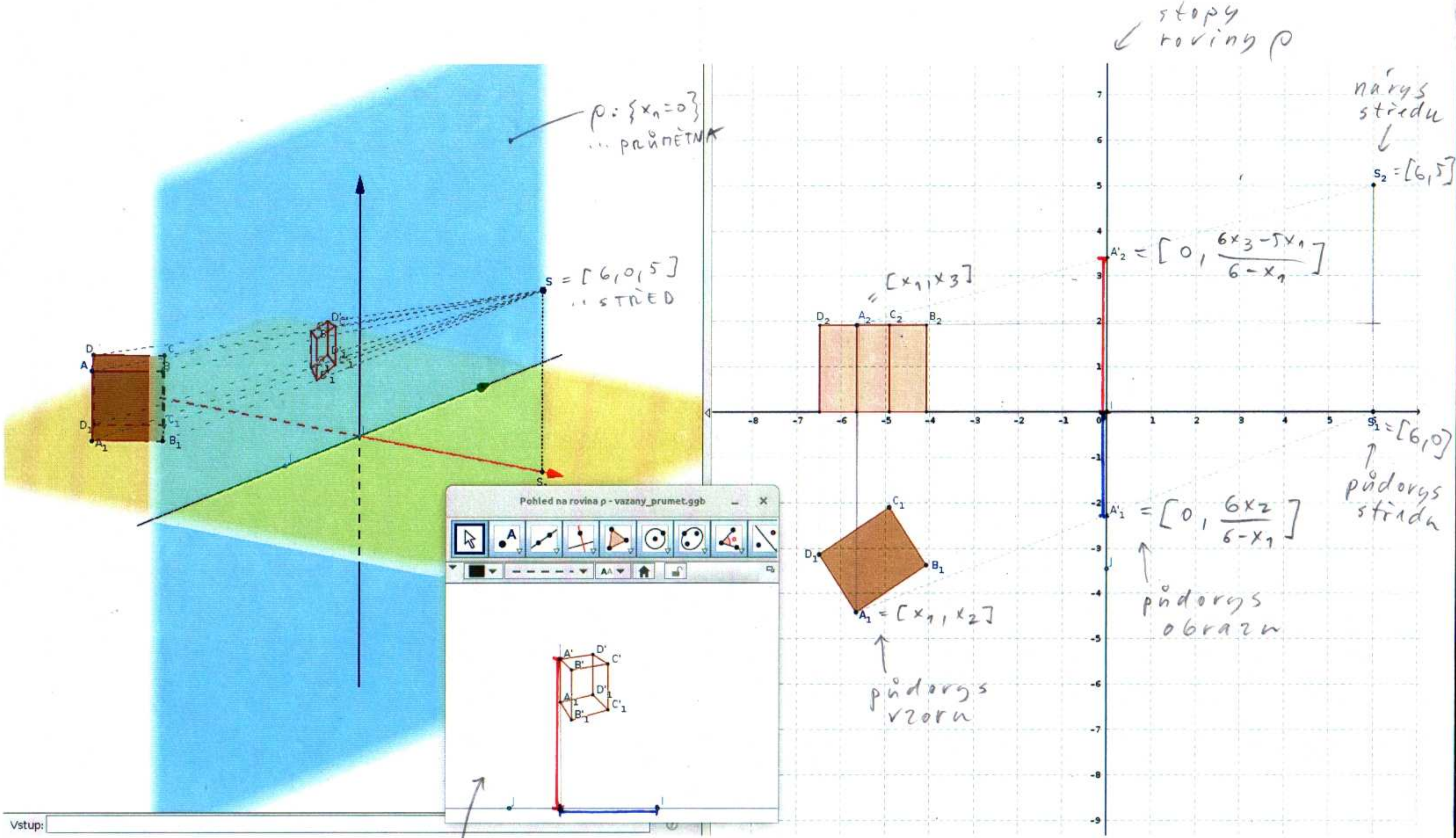
(viz podobné $\triangle$ na další str.)

- v homogenní souř.:

$$X = (x_1 : x_2 : x_3 : \underline{x_0}) \longmapsto (0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1 : \underline{6x_0 - x_1}) = X'$$

$$\text{tj.} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_0 \end{pmatrix} \;!$$

PŘÍKLAD — STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ



skutečný průmět ...

POZNÁMKY ... k afinním zobrazením

- $f: \tilde{a} \to \tilde{a}'$ ... PROJEKTIVNÍ
- $F: W \to W'$ ... odp. LINEÁRNÍ ... $\left(\frac{X'}{x_0'}\right) = \left(\frac{D \; C}{B \; a}\right) \cdot \left(\frac{X}{x_0}\right)$

- zobr. f je AFINNÍ $\iff$ zobr. vlastní body na vlastní

  tj. $\left(\frac{X}{k}\right) \mapsto \left(\frac{X'}{\ell}\right)$ ... $k, \ell \neq 0$

  (*) $\iff$ zobr. ne- .... ne-

  tj. $\left(\frac{X}{0}\right) \mapsto \left(\frac{X'}{0}\right)$

  $\iff$ $a \neq 0$ a $B = 0$.

  tj. matice F pro $a = 1$ ...

  ... $\left(\frac{D \; C}{0 \; 1}\right)$ ✓

- podmínka (*) redukuje počty na s. 47 takto:

  || Lib. AFINNÍ zobr. prostoru dim $\boxed{n}$ je určeno obrazy $\boxed{n+1}$ bodů v obecné poloze. ✓

POZNÁMKY ... k samodružným (pevným) bodům

- pevné body f $\rightleftarrows$ charakt. vektory F

tj. $f(X)=X$ tj. $F(\underline{x})=\lambda\cdot\underline{x}$ $\lambda\neq 0$

+ pevné body odp. TÉMUŽ char. číslu tvoří proj. PODPROSTOR. ← řešení homog. soustavy lin. rovnic

+ RŮZNÝM char. číslům odp. RŮZNÉ body. ← odp. vektory NEZÁVISLÉ

+ IZOLOVANÝCH pevných bodů není víc než $\boxed{n+1}$.

nezávislých vektorů není víc než dim W

(srovn. s poznámkami na s. 23)

POZNÁMKY ... k pevným bodům afinních zobr.

- charakt. polynom $\det \begin{pmatrix} D-\lambda E & C \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot \det(D-\lambda E)$

tedy $\lambda = 1$ je vždy kořenem!

* $\boxed{\text{KAŽDÁ AFINNÍ transformace má nějaký PEVNÝ BOD!}}$

vlastní či nevlastní ...

VÝZVA ... dokažte toto tvrzení elementárně (tj. bez algebry) a získáte hodnotnou věcnou cenu ...!

POZNÁMKY ... k předchozím výpočtům

pevných bodů AFINNÍCH transformací:

... vlastní ... $\underbrace{\begin{pmatrix} D & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda = 1$ a tuto podm. je ekviv.
$D \cdot X + C = X$, tj. $\boxed{(D - E) \cdot X = -C}$

(*) ✓

... nevlastní ... $\underbrace{\begin{pmatrix} D & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}}$

λ = bez apriorních omezení
a předch. podm. je ekviv.
$D \cdot X = \lambda X$, tj. $\boxed{(D - \lambda E) \cdot X = 0}$

(**) ✓

GEOM. ZOBRAZENÍ — SHRNUTÍ

vzhledem k rozšířené kartézské souř. soust.

JMÉNO	VLASTNOSTI	ALG. VYMEZENÍ	ANAL. VYJÁDŘENÍ	PŘÍKLADY
PROJEKTIVNÍ $f: \tilde{a} \to \tilde{a}'$	← kolin. ← dvojpoměr	určeno LINEÁRNÍM zobr. $F: W \to W'$	$\underline{x}' = \begin{pmatrix} a & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$	osová kolineace středová prom.
AFINNÍ $f: a \to a'$	—‖—, navíc $\| \to \|$ ← rovnoběž. ← díl. poměr	—‖—, navíc $\vec{a} \subset W \xrightarrow{F} \vec{a}' \subset W'$ $F\|_{\vec{a}} =: \vec{f}$	$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$ $X' = D \cdot X + C$	osová afinita rovnoběžné prom.
EKVI-AFINNÍ $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$	—‖—, navíc obsahy/objemy	—‖—, navíc $\vec{f}$ zach. vnější součin..	$\det(D^T \cdot D) = 1$ resp. $\det D = \pm 1$	šikmá soum. elace
PODOBNÉ $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$	poměry vzdál. odchylky, ...	—‖—, navíc $\vec{f}$ zach. skalární součin až na násobek ... k	$D^T \cdot D = k^2 \cdot E$	stejnolehlost
SHODNÉ $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$	vzdálenosti, odchylky, obsahy, ...	—‖—, navíc $k = 1$	$D^T \cdot D = E$	osová soum. posunutí otáčení