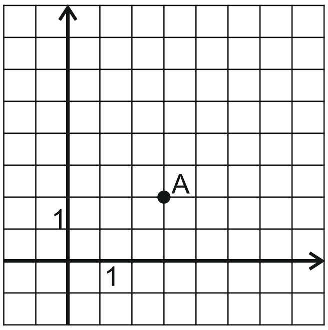
Funkce na ZŠ

Irena Budínová

Funkce jsou jedním z nejnáročnějších témat školské matematiky, které činí potíže žákům základní školy, studentům středních i vysokých škol. V učebnicích se setkáme s velice formálním zavedením funkcí. Některé učebnice jsou názornější (např. Odvárko), jiné jsou velmi formální (např. Coufalová).

Některé učebnice (Odvárko, Binterová) začínají orientací v **pravoúhlé soustavě souřadnic**. Žáci se musí naučit, co znázorňují body v soustavě souřadnic a jak bod zapisujeme v rovině: vždy udáváme dva údaje – dvě souřadnice, např. $A[3;2]$ znamená dva dílky na ose x, tři dílky na ose y. Žáci mnohdy tento zápis vnímají jako desetinné číslo (3,2), nebo jako dvě čísla, jejichž význam ale nechápou.



Pracujeme s pomocí **čtverečkovaného papíru**. Nejdříve z grafu zapisujeme souřadnice bodů. Později ze souřadnic bodu zakreslujeme body do grafu. Začínáme kladnými hodnotami.

Pro větší motivaci a co nejlepší fixaci kreslíme obrázky pomocí zadaných souřadnic. Později můžeme zadávat i záporné souřadnice.

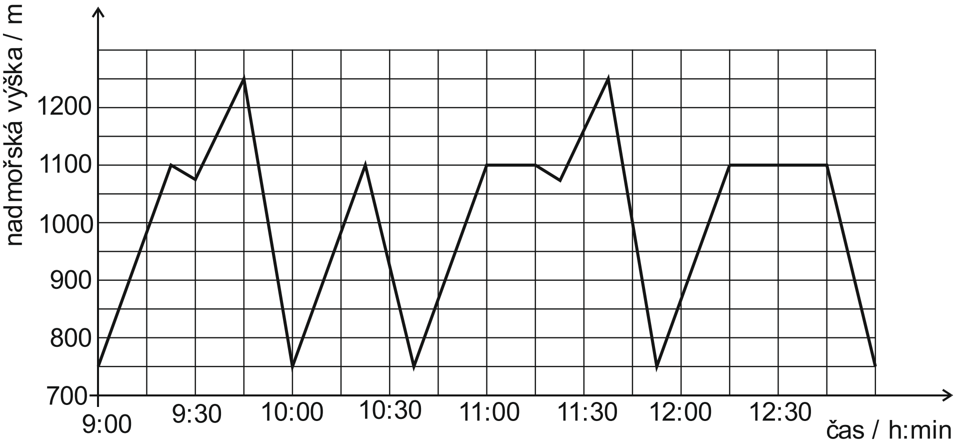
V další fázi bychom se měli zabývat **závislostmi**, se kterými se setkáme v běžném životě. Zde už se učebnice znatelně rozcházejí a odklánějí se od přirozeného vnímání závislostí. V některých učebnicích je udána definice funkce (Odvárko), žáci se učí pracovat s tabulkou, funkčním předpisem a grafem, přitom se nějak automaticky předpokládá, že žáci správně pochopí výraz „právě jedno“ v definici a to, proč něco je a něco není funkce.

Vhodné je postupovat pomocí závislostí z běžného života a řešit úlohy tak, aby to žáky nutilo vytvořit si tabulku, ze které jednoduše určí funkční předpis a zakreslí graf.

Závislosti, které nemají analytický předpis

Nejdříve je vhodné umět co nejlépe číst v grafu. Za tímto účelem volíme úlohy, kdy žáci z grafu určují různé informace.

Úloha 1: Lyžař jezdil v lyžařském areálu a zaznamenával si údaje o nadmořské výšce. Z nich pak zakreslil graf. V něm je zanesen čas a nadmořská výška v okamžiku, kdy vyjel nahoru lanovkou, sjel dolů k lanovce nebo odpočíval.



Z grafu odpovězte na následující otázky:

a) Kolikrát jel lyžař lanovkou?
b) Do jaké nejvyšší nadmořské výšky jel lyžař lanovkou?
c) Kolikrát během dopoledne sjel zpět do výchozí nadmořské výšky?
d) Kolik různých lanovek využil?
e) Kdy si udělal krátkou přestávku na čaj? Jak dlouho tato přestávka trvala?
f) V kolik hodin šel na oběd a jak dlouho obědval?
g) Mohl pít čaj ve stejné horské chatě, jako obědval?
h) Jakou rychlostí stoupala lanovka ve vyšší nadmořské výšce?

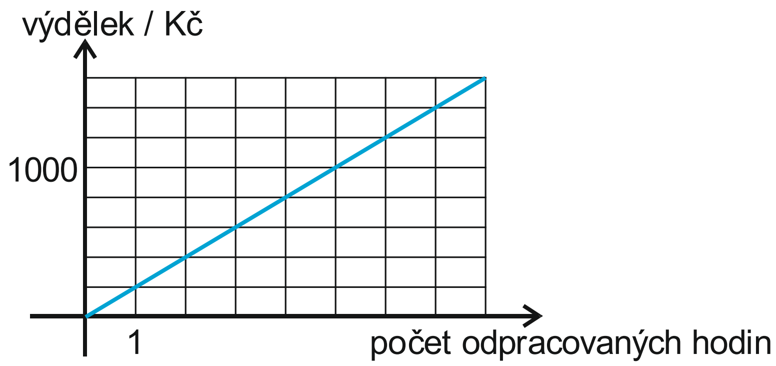
Výsledky: a) 6 krát, b) 1250 m.n.m., c) do 12 hodin 3 krát, d) 2, e) Přestávku na čaj si udělal v 11 hodin a trvala čtvrt hodiny. f) Na oběd šel ve 12:15 a obědval půl hodiny. g) Pil čaj a obědval ve stejné nadmořské výšce, proto je pravděpodobné, že se jednalo o stejnou chatu. h) Za čtvrt hodiny vystoupala z výšky 975 m.n.m. do výšky 1250 m.n.m., tj. 275 m. Rychlost stoupání lanovky tedy byla 1100 m/h neboli 1,1 km/h. Jedná se o rychlost stoupání, nikoli rychlost lanovky.

Žáci se tímto způsobem mohou seznamovat s různými závislostmi: závislost výšky či hmotnosti dítěte na čase, závislost teploty na čase během dne, atd. Závislosti mohou spojité i diskrétní.

Funkce přímá úměrnost

Také u funkce přímá úměrnost můžeme začít čtením informací z grafu. Nedefinujeme nové pojmy, pouze žáky postupně učíme pojmy používat, aby je intuitivně chápali.

Úloha 2: Z následujícího grafu zjistěte, jakou má pan Novák hodinovou mzdu. Kolik peněz vydělá za osmihodinovou pracovní dobu?



[vydělá 200 Kč za hodinu, za 8 hodin vydělá 1600 Kč]

Úloha 3: Jeden jogurt stojí 12,50 Kč. Zakreslete graf závislosti ceny jogurtů na jejich počtu.

Žáci obvykle postupují přes **tabulku**. Do prvního řádku si zapíší počet jogurtů, do druhého cenu. Do posledního sloupce pak zapíšeme obecný zápis.

Počet jogurtů / ks	1	2	3	x
Cena jogurtů / Kč	12,50	25	37,50	$12{,}50\,x$

Z tabulky zakreslí graf. Jedná se o **diskrétní závislost**, proto jsou grafem izolované body. Lze si ale všimnout, že body leží na **úsečce**.

Postupně lze zavést pojmy **definiční obor** a **obor hodnot**. Tyto pojmy nedefinujeme, pouze žákům sdělíme, jak je určujeme: definiční obor je *množina všech hodnot*, kterých nabývá proměnná na ose x, obor hodnot je *množina všech hodnot*, kterých nabývá proměnná na ose y. Učíme se, jak to zapsat: $D_f = \{1, 2, 3, \dots, x\}$, $H_f = \{12{,}50; 25; 37{,}50; \dots; 12{,}50\,x\}$. Pokud by bylo řečeno, že se koupí maximálně 4 jogurty: $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$, $H_f = \{12{,}50; 25; 37{,}50; 50\}$.

Je také potřeba zavést pojmy **nezávisle** a **závisle proměnná**. Ptáme se takto: Závisí počet jogurtů na jejich ceně, nebo cena jogurtů na jejich počtu? Podle toho poznáme, že počet je nezávisle proměnná a vynáší se na osu x, cena je závisle proměnná a vynáší se na osu y.

Z tabulky je vidět také **funkční předpis**: $y = 12{,}50\,x$.

Úloha 4: Jeden litr benzínu stojí 28 Kč. Zakreslete graf závislosti ceny benzínu na objemu natankovaného benzínu, když nádrž má 40 litrů.

Tuto závislost můžeme považovat za spojitou – také platit můžeme v podstatě spojitě, když platíme kartou. Opět určíme nezávisle a závisle proměnnou, definiční obor a obor hodnot je již nutné zapsat intervalem: $D_f = \langle 0, 40 \rangle$, $H_f = \langle 0, 1\,120 \rangle$. Z tabulky určíme funkční předpis: $y = 28\,x$.

Úloha 5: Hana, Lucka, Štěpán a Ondra jsou čtyři sourozenci. Nejmladší Hana dostává kapesné 20 Kč za týden, starší Lucka 50 Kč za týden, Štěpán 75 Kč za týden a nejstarší Ondra 100 Kč za týden. Děti si peníze spoří, ale neutrácejí. Zakreslete graf závislosti uspořených peněz jednotlivých dětí na čase (v týdnech).

Jedná se o diskrétní závislosti. Grafy závislostí leží na čtyřech úsečkách, které se liší sklonem, všechny procházejí počátkem soustavy souřadnic. Určíme definiční obory a obory hodnot, funkční předpisy: $h\colon y = 20x$, $l\colon y = 50\,x$, š: $y = 75\,x$, $o\colon y = 100\,x$. Kolikrát větší je číslo u x, tolikrát rychleji graf roste.

Zobecnění:

Funkce **přímá úměrnost** je dána předpisem $y = ax$, kde a je libovolné kladné reálné číslo. Definičním oborem je množina všech reálných čísel. Grafem je **přímka**, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

V mnoha příkladech ze života lze za x volit jen kladné číslo a grafem je pouze **polopřímka**. Definičním oborem pak je množina nezáporných reálných čísel.

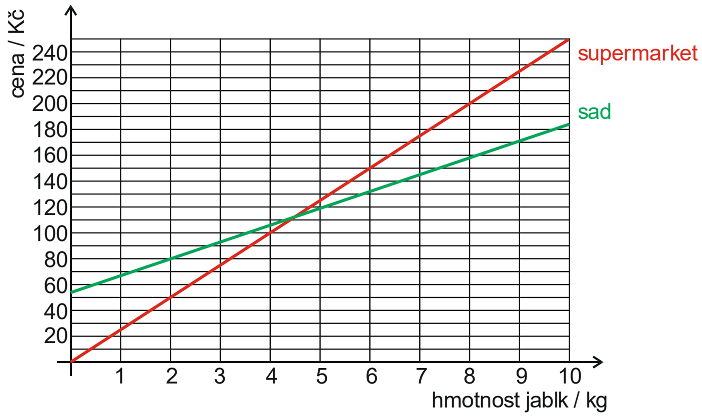
Lineární funkce

Úloha 6: Jarošovi chtějí koupit jablka na zimu na uskladnění. V supermarketu, který je v blízkosti jejich bydliště, stojí kilo jablek 25 Kč. V sadě, který je vzdálen 25 km od jejich domova, stojí kilo jablek 13 Kč. Auto Jarošových má spotřebu 6 litrů na 100 km. Aktuální cena benzínu byla 36 Kč.

a) Zakreslete graf závislosti pro obě možnosti koupě jablek.
b) Kolik peněz zaplatí Jarošovi za 10 kg jablek v sadě? Kolik zaplatí za stejné množství v supermarketu?
c) Určete funkční předpisy jednotlivých závislostí.
d) Z grafu určete a poté vypočtěte, od kolika kilogramů je pro Jarošovy výhodnější jet pro jablka do sadu.

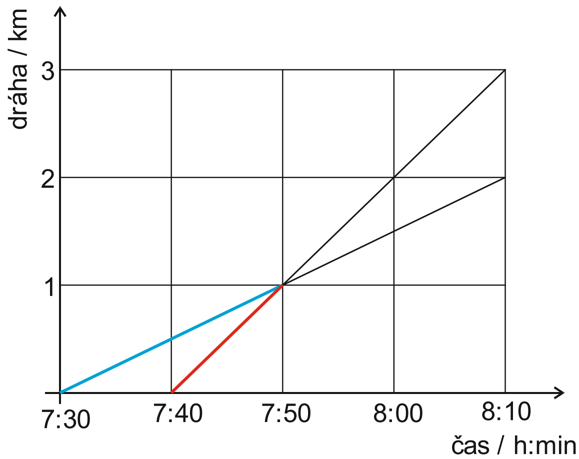
Řešení: b) V sadě: musíme uvažovat i cestu autem. Na 25 km má auto spotřebu 1,5 litru, to odpovídá ceně za benzín 54 Kč. Musíme uvažovat i cestu zpět. Celkem Jarošovi zaplatí $108\text{ Kč} + 10 \cdot 13\text{ Kč} = 238\text{ Kč}$. V supermarketu zaplatí 250 Kč. c) $y_1 = 25x, y_2 = 13x +$

54, d) Řešení rovnicí: $108 + 13x = 25x$, $x = 9$, tj. již od 9 kg se vyplatí jet do sadu. (Pozor, uvedený graf nezapočítává cestu zpět, vytvořte si jej správně.)



Úloha 7: Jakub vyšel v 7:30 z domova do školy, šel rychlostí 3 km/h. Jeho starší sestra Dana zjistila, že zapomněl svačinu a rozhodla se ho dohnat. Vyšla z domova v 7:40 rychlostí 6 km/h. Zakreslete graf závislostí ujitých kilometrů na čase. Z grafu vyčtěte, za jak dlouho Dana dožene Jakuba a jak daleko od domova. Určete funkční předpisy jednotlivých závislostí.

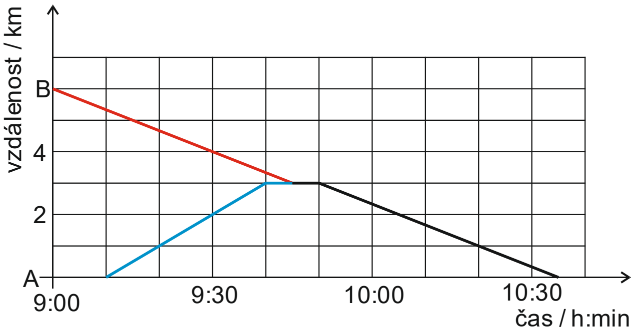
Řešení: Dana dožene Jakuba v 7:50.



Funkční předpisy: $y_J = 3x, y_D = 6\left(x - \frac{1}{6}\right) = 6x - 1$

Úloha 8: Dvě kamarádky ze sousedních vesnic se rozhodly, že si dají sraz uprostřed mezi jejich vesnicemi a pak se rozhodnou, jak stráví zbytek dopoledne. Domluvily se, že si vyrazí naproti v 9 hodin.

Barča je z vesnice B a vyrazila přesně na čas. Šla pěšky. Andrea je z vesnice B a vyrazila o několik minut později, proto jela na koloběžce. Chvíli ještě na Barču čekala. Pak se chvíli domlouvaly, co budou dělat a pak šly společně dál.



Z grafu vyčti následující informace:

a) Jak daleko od sebe jsou vesnice?
b) O kolik minut vyrazila Andrea později, než měla?
c) Jakou rychlostí šla Bára?
d) Jakou rychlostí jela Andrea?
e) Jak dlouho čekala na Barču?
f) Jak dlouho se holky domlouvaly, co budou dělat?
g) Kam se potom vydaly a jakou rychlostí?

Řešení: a) Vesnice jsou vzdáleny 6 km. b) Andrea vyrazila o 10 minut později. c) Barča ušla za půl hodiny 2 km, tedy šla rychlostí 4 km/h. d) Andrea ujela za půl hodiny 3 km a jela tedy rychlostí 6 km/h. e) Andrea čekala na Barču 5 minut. f) Holky se domlouvaly 5 minut. g) V 9:50 se vydaly do vesnice A, rychlostí 4 km/h.

Pomocí úloh zakreslujeme grafy, určujeme funkční předpis. Určujeme **vlastnosti funkcí**, jako je definiční obor, obor hodnot, monotonie, omezenost, minimum, maximum.

Úloha 9: Katka má v kasičce 500 Kč. Rozhodla se, že každý den utratí 100 Kč. Určete funkční předpis závislosti a zakreslete graf. Za kolik dní utratí všechny peníze?

Řešení: Funkční předpis: $y = 500 - 100x$, $D_f = \{0; \dots; 5\}$, $H_f = \{0; 100; 200; \dots; 500\}$. Funkce je klesající, omezená, minimum má v bodě $x = 5$, $y = 0$, maximum má v bodě $x = 0$, $y = 500$.

Zobecnění lineární funkce

Lineární funkce má předpis $y = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla. Grafem je přímka. Je-li a kladné, je funkce rostoucí, je-li a záporné, je funkce klesající, je-li $a = 0$, je funkce konstantní. Koeficient b určuje posunutí po ose y.

Úloha 10: Simona si napouštěla vanu. Nejdříve do vany přitékala 7 minut voda konstantním přítokem 0,5 l za sekundu. Pak se Simona půl hodiny koupala, voda nepřitékala ani neodtékala. Potom se voda vypouštěla konstantním odtokem 0,3 l za sekundu. Kolik litrů vody si Simona napustila? Jak dlouho se voda vypouštěla?

Pro funkční závislost objem vody ve vaně na čase zakreslete graf, určete funkční předpisy a určete vlastnosti.

Řešení: Simona napustila do vany 210 litrů vody. Voda se vypouštěla přibližně 12 minut (210:0,3=700, 700:60=11,7).

Funkční předpisy: $f_1\colon y = 0{,}5x, f_2\colon y = 210, f_3\colon y = -0{,}4(x - 37) = -0{,}4x + 14{,}8,\ f = f_1 + f_2 + f_3, D_f = \langle 0; 49\rangle, H_f = \langle 0; 210\rangle$, funkce je rostoucí na intervalu $\langle 0; 7\rangle$, konstantní na intervalu $\langle 7; 37\rangle$, klesající na $\langle 37; 49\rangle$, je omezená, má minimum $y = 0$ pro $x \in \{0; 49\}$ a maximum $y = 210$ pro $x \in \langle 7; 37\rangle$.

Určování monotonie

Někdy je problém žákům vysvětlit, kdy je funkce rostoucí a kdy klesající – nepoznají to z grafu. V učebnici Fraus (9. ročník) je následující obrázek pro monotonii funkce:

Jak na to?

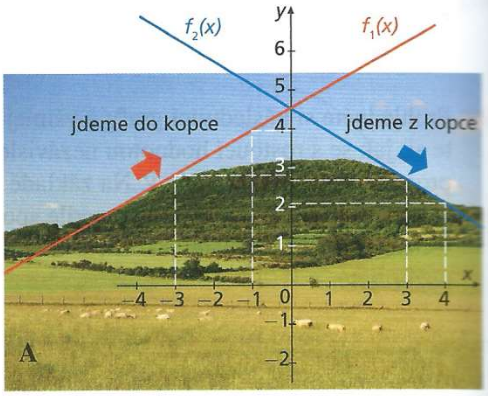
Na obrázcích vidíte horu Říp. Pozorujme nejprve obrázek **A**, na kterém jsou grafy funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$. Sledujme funkci $f_1(x)$.

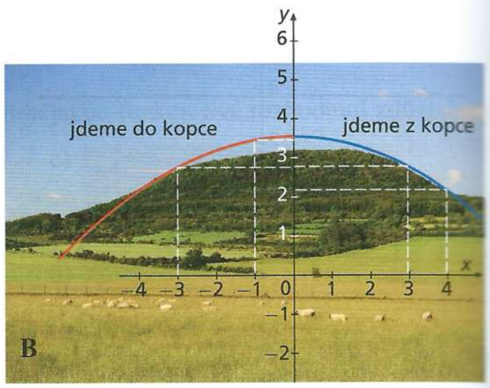
Když se po jejím grafu pohybujeme ve směru červené šipky, tj. hodnota x se zvětšuje, vidíme, že se zvětšuje i hodnota závisle proměnné y. Můžeme tuto vlastnost funkce f_1 nějak popsat? Platí, že když vybereme jakékoli hodnoty $x_1 < x_2$ proměnné x, pak pro odpovídající hodnoty proměnné y bude platit $f(x_1) < f(x_2)$.

Například $-3 < -1$ a pro funkční hodnoty platí $2{,}81 < 3{,}94$. Takové vlastnosti funkce říkáme, že **funkce** je **rostoucí**.

Grafem funkce $f_2(x)$ je také přímka. Když se však po této přímce pohybujeme ve směru modré šipky, tj. tak, aby se hodnota x zvětšovala, vidíme, že se hodnota proměnné y zmenšuje. Pro tuto funkci platí: jestliže $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) > f(x_2)$.

Například $3 < 4$ a pro funkční hodnoty platí $2{,}68 > 2{,}08$. Takové vlastnosti funkce říkáme, že **funkce** je **klesající**.





Když se podíváme na obrázek **B**, je jasné, že červeně vyznačený graf, který „kopíruje“ povrch Řípu, je grafem funkce, která je nejprve rostoucí a vpravo od vrcholu klesající.

Problém je v tom, že se žák může zeptat, co když půjdu z pravé strany. Začne složité vysvětlování, že osy vedou zleva doprava, což stále některým žákům není dostatečně jasné. Vhodné jsou proto **časové závislosti**, jako v předchozím příkladě. Je celkem jasné, že nejdříve množství vody ve vaně roste a posléze klesá.

Co je a není funkce

Definice funkce na ZŠ říká: *Funkce f je předpis, který každému číslu x z nějaké množiny přiřazuje* ***právě jedno*** *číslo y.* Problém je výraz „právě jedno“. Žáci intuitivně nechápou, proč by tomu tak mělo být.

Vhodné jsou opět časové závislosti. Můžeme do grafu zakreslovat různé úsečky třeba pro závislost vody ve vaně na čase. Úsečky vyjadřují, buď že voda přitékala, nebo odtékala, nebo se s ní nic nedělo. Co by ale znamenala svislá úsečka? To, že v jednom čase byly ve vaně různé objemy vody. To není možné.

Statické a dynamické zakreslování grafu lineární funkce

Žáci by měli v průběhu řešení slovních úloh získat poznatek, že grafem lineární funkce je **přímka** a znát **transformace**, kterými základní funkci $y = x$ postupně upravujeme.

Rozlišujeme **statické** a **dynamické metody** zakreslování grafu. V případě statických metod postupuje žák pomocí dosazení několika hodnot za x. Vytvoří tabulku a zakreslí graf. V případě dynamických metod postupuje od základní funkce a postupně ji transformuje.

Ukazuje se, že první metoda je nevhodná zejména z toho důvodu, že ji žáci používají i u dalších funkcí, např. kvadratické nebo nepřímé úměrnosti. Jenže když žák neví, že nepřímá úměrnost má bod nespojitosti, nemůže graf správně zakreslit.

Úloha 11: Zkreslete graf funkce $y = \frac{3}{2}x - 3$. Postupujte a) staticky, b) dynamicky.

Funkce nepřímá úměrnost

S nepřímou úměrností se žáci setkávali již od 7. ročníku. Můžeme připomenout na slovní úloze, jak se s nepřímou úměrností pracovalo.

Úloha 12: Fotbalové hřiště je od školy vzdáleno 3 km. Jenda jde po škole na fotbal pěšky průměrnou rychlostí 4 km/h, Tonda jede na koloběžce průměrnou rychlostí 9 km/h, pan Loučka veze Edu autem průměrnou rychlostí 30 km/h. Jak dlouho bude klukům trvat přemístění ze školy na hřiště?

Řešení: Jenda jde tři čtvrtě hodiny, tedy 45 minut, Tonda jede třetinu hodiny, tedy 20 minut a Eda jede desetinu hodiny, tedy 6 minut.

Kolikrát větší rychlostí se pohybují, tolikrát kratší dobu to trvá.

Závislost z příkladu můžeme zapsat jako $t = \frac{3}{v}$. Vyneseme si několik hodnot do tabulky a zakreslíme graf.

v (rychlost v km/h)	0,5	1	2	3	4	5
$t = \frac{3}{v}$ (potřebný čas v h)	6	3	1,5	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$

Vznikne křivka, která je částí hyperboly.

Úloha 13: Obdélník má obsah 24 čtverečních jednotek. Jaké mohou být délky jeho stran?

Řešení: Žáci mohou nejdříve postupovat experimentem, kdy určují strany obdélníku. Pak si je mohou zanést do tabulky:

a (délka strany obdélníku)	$\frac{1}{2}$	1	2	4	6
$b = \frac{24}{a}$	48	24	12	6	4

Zobecnění

Funkce nepřímá úměrnost je dána předpisem $y = \frac{k}{x}$, kde k je libovolné reálné číslo různé od 0 a nazývá se **koeficient nepřímé úměrnosti**. Grafem nepřímé úměrností je **hyperbola**. Definičním oborem nepřímé úměrnosti je množina reálných čísel bez nuly.

Úloha 14: Zakreslete grafy funkcí a) $y = \frac{2}{x}$, b) $y = -\frac{0,5}{x}$. Určete vlastnosti těchto funkcí.

U zakreslování grafů postupujeme dynamicky, i tak však potřebujeme 3 body k zakreslení každé větve hyperboly.

Kvadratická funkce

Můžeme začít závislostí obsahu čtverce na délce jeho strany. Vytvoříme tabulku, do které budeme doplňovat hodnoty a z nich zakreslíme graf.

Délka strany a	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Obsah čtverce a^2	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16

Žáci dostanou část křivky, která se nazývá **parabola**. Jestliže ji zobrazí v osové souměrnosti podle osy y, dostanou celou parabolu.

Dále můžeme daný příklad různě modifikovat. Žáci mohou do jednoho grafu nakreslit následující závislosti: závislost obsahu obdélníku na délce jedné jeho strany x, je-li druhá jeho strana rovna $\frac{1}{2}x$; závislost obsahu trojúhelníku se základnou x, je-li jeho výška $4x$; závislost obsahu kruhu, je-li jeho poloměr x. Žáci si mohou uvědomit, jaký vliv na tvar paraboly má koeficient.

Zobecnění

Funkci, jejíž předpis můžeme vyjádřit rovnicí ve tvaru $y = ax^2$, kde a je libovolné nenulové číslo, nazýváme **kvadratická funkce**. Definičním oborem funkce je množina všech reálných čísel. Grafem kvadratické funkce je **parabola**.

Dále se učíme zakreslovat grafy – pokud možno dynamicky (vždy potřebuji 3 body). Šikovnějším žákům je možno ukázat i posunování paraboly po osách.

Úloha 15: Zakreslete grafy funkcí a) $y = 0{,}5x^2 + 2$, b) $y = -(x-1)^2$. Určete vlastnosti daných funkcí.

Postupujeme už jedině dynamicky!

Na střední škole žáci rozšiřují poznatky o kvadratických funkcích, učí se zakreslovat graf obecné kvadratické funkce.

Úloha 16: Zakreslete graf funkce $y = -x^2 - x + 6$ a určete její vlastnosti.

Řešení: Průsečíky s osou x jsou -3 a 2. Graf je posunutý o $-\frac{1}{2}$ po ose x a o 6,25 po ose y.

Goniometrické funkce

Goniometrické funkce jako takové se na ZŠ nevyučují. Žáci pouze pracují s poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku. Nejčastěji se proto s funkcemi sin, cos, někdy tg setkají v geometrii, při výuce podobnosti trojúhelníků. Nezakreslují však graf goniometrických funkcí, neurčují jejich vlastnosti.

Pro podobné trojúhelníky platí, že poměr délek dvou odpovídajících si stran je konstantní číslo. Toto konstantní číslo označíme následovně:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha$$

Poměr protilehlé odvěsny úhlu α a přepony označíme jako **sinus úhlu $\boldsymbol{\alpha}$**.

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha$$

Poměr přilehlé odvěsny k úhlu α a přepony označíme jako **kosinus úhlu $\boldsymbol{\alpha}$**.

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

Poměr protilehlé odvěsny úhlu α a přilehlé odvěsny označíme jako **tangens úhlu $\boldsymbol{\alpha}$**.

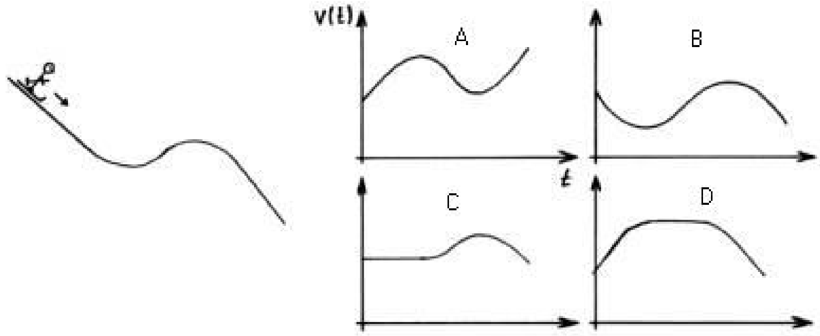
Žáci dosazují do těchto vzorců a počítají buď velikosti úhlů, nebo délky stran.

S goniometrickými funkcemi jakožto funkcemi se setkávají až studenti středních škol. Učí se pracovat s grafem, jednotkovou kružnicí, určují vlastnosti funkcí (přidá se i funkce kotangens).

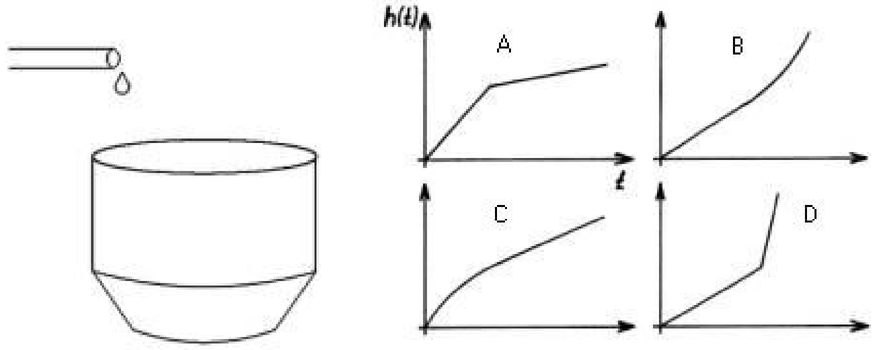
Rozvoj funkčního myšlení

Primárním cílem vzdělávání žáků v oblasti funkcí je osvojení určitých znalostí a dovedností, které umožňují řešit různé úkoly spojené s funkcemi. Druhým, ne tak patrným cílem, je rozvoj funkčního myšlení. Funkční myšlení používáme tehdy, když si utváříme názorné představy o vztahu dvou proměnných. Následující typy úloh pomáhají žákům utvářet funkční myšlení (Eisenmann, P., 2005, 2006):

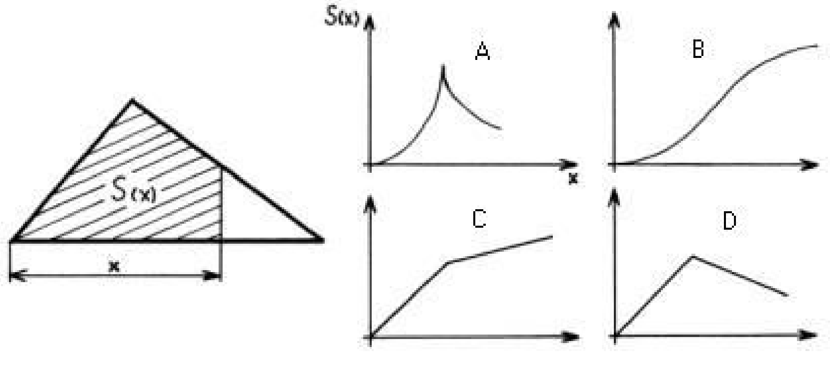
1) Grafy vpravo vyjadřují závislost rychlosti lyžaře $v(t)$ na čase t. Jen jeden z nich odpovídá situaci zachycené na obrázku vlevo. Zaškrtněte jej. (Správná odpověď je A)



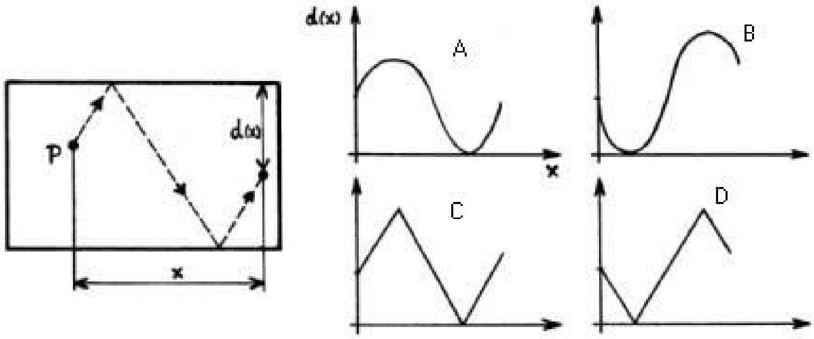
2) Nádoba se v čase $t = 0$ začne naplňovat stálým přítokem vody. Grafy vpravo vyjadřují závislost výšky hladiny $h(t)$ na čase t. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej. (Správná odpověď je C)



3) Grafy vpravo vyjadřují závislost obsahu vyšrafované části trojúhelníku $S(x)$ na vzdálenosti x. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej. (Správná odpověď je B)



4) Kulečníková koule je odpálená z bodu P ve směru čárkované čáry. Grafy vpravo vyjadřují závislost vzdálenosti $d(x)$ koule od horní hrany stolu na vzdálenosti x. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej. (Správná odpověď je D)



Definice

Nyní si uvedeme základní definice pojmů, se kterými pracujeme v učivu funkcí na základní škole. Ve výuce se ale snažíme vyvarovat formalismu. Definice pojmu by se proto neměla objevit v úvodu probírání daného pojmu, ale po vyřešení dostatečného počtu úloh, které žáci začnou chápat. Některé definice (např. graf funkce, monotonie) je lepší neuvádět vůbec a vycházet z intuitivního vnímání pojmu žáky.

Funkce (ZŠ): Předpis, podle kterého je každému číslu x z určité množiny přiřazuje právě jedno y.

Reálná funkce jedné reálné proměnné (VŠ): Zobrazení, které přiřazuje každému reálnému číslu $x \in D(f)$ právě jedno reálné číslo $y \in R$. Množina $D(f)$ se nazývá **definiční obor** funkce.

Grafem funkce f nazýváme množinu všech bodů $[x, y]$ roviny O_{xy}, jejichž kartézské souřadnice jsou sobě přiřazené hodnoty proměnné x a funkční hodnoty $f(x)$.

Specifické vlastnosti funkcí probíraných na ZŠ:

Funkce f se nazývá **zdola omezená** na množině $M \subset D(f)$, jestliže existuje $d \in R$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí: $f(x) \geq d$.

Funkce f se nazývá **shora omezená** na množině $M \subset D(f)$, jestliže existuje $h \in R$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí: $f(x) \leq h$.

Funkce se nazývá **omezená** na množině M, je-li na dané množině omezená zdola i shora.

Funkce se nazývá **rostoucí** na množině $M \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ platí: Jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce se nazývá **klesající** na množině $M \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ platí: Jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce se nazývá **neklesající** na množině $M \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ platí: Jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce se nazývá **nerostoucí** na množině $M \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ platí: Jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí, resp. klesající funkce na dané množině se souhrnně nazývají **ryze monotónní funkce** na dané množině. Neklesající, resp. nerostoucí funkce na dané množině se souhrnně nazývají **monotónní funkce** na dané množině.

Programy pro práci s funkcemi

Pro výuku funkcí na ZŠ je možno doporučit dva programy: **Geogebru** a **Graph**. Pomohou nám dokreslit představu vytváření grafu pro některé funkce. Programy je však vždy nutné začít využívat až tehdy, když je učivo řádně probrané a žáci mu do značné míry rozumí. Není možné nahradit zakreslování grafu na papíře vykreslováním pomocí počítačového programu.

Geogebra

Výhody: dá se pracovat on-line, umožňuje provádět dynamické změny

www.geogebra.org

Vybereme si možnost pracovat on-line nebo stáhnout program – je zdarma. Zvolíme algebru.

Lineární funkce:

- Kontrola správného zakreslení grafu: Žák nejdříve ručně zakreslí graf funkce (např. $y = 3x + 1$), do políčka „vstup“ zapíše funkční předpis funkce, dá „enter“ a vykreslí se mu graf.
- Zobrazení v osové souměrnosti s osou souměrnosti *y*: Na horní liště vybereme políčko „zobrazení“, osovou souměrnost. Vybereme graf funkce, potom osu *y*, obrazem je přímka $y = -3x - 1$.
- Zobrazení v osové souměrnosti s osou souměrnosti *x*: Na horní liště vybereme políčko „zobrazení“, osovou souměrnost. Vybereme graf funkce, potom osu *x*, obrazem je přímka
- Dynamické změny. Zvolíme funkci $y = ax - 1$, enter, zobrazí se „vytvořit posuvník pro a“, kliknutím na číslo na posuvníku můžeme měnit meze (předdefinováno -5 až 5). Kliknutím mimo do okénka se vrátí posuvník. Zapneme „play“, graf se začne otáčet kolem bodu $[0; -1]$. Můžeme graf zastavit v určité poloze, zjisti funkční předpis a diskutovat – posunutí po osách, rostoucí/klesající. Dále „vstup“, zadáme $y = 3x + a$, bude se posouvat po ose *y* (resp. po ose *x*).

Nepřímá úměrnost:

- Zadáme funkční předpis $y = \frac{a}{x}$, sledujeme, jak se mění graf.

Kvadratická funkce:

- Zadáme předpis $y = ax^2$ (napíšeme x a pak klikneme dole na zobrazené klávesnici na „a^2“), díváme se, jak se parabola mění (přechází přes přímku $y = 0$, můžeme diskutovat, proč nemůže být $a = 0$).
- Zadáme $y = x^2 + a$, pozorujeme posunutí po ose y.
- Zadáme $y = (x + a)^2$, pozorujeme posunutí po ose *x*.

Graph:

Zadáme „graph“ do Googlu, vyhledáme např. na www.stahuj.cz. Lze zdarma stáhnout do počítače.

Výhoda: Můžeme si obrázek uložit jako jpg.

- Volíme si osy – jejich popis, ocejchování.
- Zadáme předpis funkce – mocninu musíme psát jako x^2 (anglická klávesnice), krát jako *.

Literatura:

Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: *Matematika. Algebra. Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* Plzeň: Fraus, 2010

Budínová, I.: *Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladu učiva o funkcích na ZŠ.* Disertační práce. Brno: MU, 2010

Eisenmann, P.: Test funkčního myšlení žáků a studentů. In: *Matematika – fyzika – informatika* 15, 2005/2006. ISSN 1210-1761

Eisenmann P.: Možnosti rozvoje funkčního myšlení žáků ve výuce matematiky na základní škole. In: *Sborník příspěvků celostátní konference Jak učit matematice žáky ve věku 11 – 15 let*. JČMF, Hradec Králové, 2006, 53 - 62

Kuchařová, L.: *Přístupy k zavedení lineární a kvadratické funkce na různých stupních škol.* Bakalářská práce. Brno: MU, 2016

Polák, J.: *Didaktika matematiky.* Plzeň: Fraus, 2014