Kombinatorika – možnosti využití v učivu matematiky na základní škole

Irena Budínová, Růžena Blažková

Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáváním, výběrem prvků z nějaké množiny. První kombinatorické poznatky můžeme najít již v nejstarších dochovaných textech ze staré Číny a Indie. Skutečná kombinatorika vzniká v 16. – 17. století v souvislosti s určením pravděpodobnosti výhry hazardních her a je spojena se jmény např. N. Tartaglii, B. Pascala, P. Fermata. K dalšímu vývoji kombinatoriky v 18. století přispěli zejména J. Bernoulli, G. W. Leibniz, L. Euler.

Klasická kombinatorika se zabývá otázkou výběru a rozmístění prvků do tzv. konfigurací daných prvků do skupin s určitými vlastnostmi. Nejjednodušší typy konfigurací mají své specifické názvy – variace, permutace, kombinace. V současné době se kombinatorika prudce rozvíjí, aplikace tzv. kombinatorické analýzy zahrnují, mimo jiné, ekonomické problémy. Výrazné je její využití v teorii pravděpodobnosti, statistice, teorii informací, lineárním programování apod. Kombinatorické metody hrají významnou roli v teoretické matematice, např. v teorii grup.

Pro žáky základní školy je **význam kombinatoriky** jednak z hlediska výukového, jednak k rozvoji kombinačního myšlení.

- Kombinatorika je nástrojem ke zvládnutí dalších témat školské matematiky, např. algebry, teorie čísel, pravděpodobnosti a statistiky, dále pak kódování, šifrování.
- Výsledků kombinatoriky se využívá v dalších vědních oborech, jako jsou např. lingvistika, chemie, biologie, fyzika, spojová technika.
- Zvládnutí základů kombinatoriky má význam pro život člověka obecně, neboť jej učí vybírat a posuzovat všechny možnosti, které v dané situaci mohou nastat a volit optimální řešení. Ze široké škály užití kombinatoriky lze uvést např. sestavování rozvrhu hodin ve škole, sestavování jízdních řádů, optimální rozdělování práce mezi stroje, volba kombinací plodin při osevu zemědělských kultur na pozemcích, spojení mezi molekulami či atomy, určení počtu čísel tažených v různých hrách, výběr prvků v různých hrách apod.

Na základní škole se kombinatorika nevyučuje. Přesto by se žáci měli občas setkat s jednoduchou kombinatorickou úlohou, aby si postupně rozvíjeli kombinační myšlení.

Pod pojmem „ **kombinační myšlení**“ na ZŠ rozumíme:

- schopnost uvědomovat si vztahy mezi zkoumanými objekty,
- posoudit, zda, vybrané skupiny jsou uspořádané či neuspořádané,
- umět rozlišit, zda se ve skupinách prvky mohou nebo nemohou opakovat,
- umět zobecňovat a najít pravidlo pro určení počtu skupin dané úlohy.

Metodami práce na základní škole jsou především experiment s následným zobecněním a užití grafického znázornění. Na ZŠ se pokud možno vyhýbáme kombinatorickým vzorcům, spíše sledujeme obecná zákonitosti.

Př. 1: Čtverec o straně 4 jednotky je rozdělen rovnoběžkami se stranami na 16 jednotkových čtverců. Určete, kolik je v daném obrazci čtverců.

Řešení: V obrazci jsou čtverce různých velikostí: 1 čtverec s délkou strany 4, 4 čtverce s délkou strany 3, 9 čtverců s délkou strany 2 a 16 čtverců s délkou strany 1. Všechny možnosti sečteme: 1+4+9+16=30. Využili jsme tedy **kombinatorické pravidlo součtu**.

Pravidlo součtu: Jestliže A_1, A_2, ..., A_n jsou konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, ... p_n prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků sjednocení těchto množin $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ je roven $p_1+p_2+... +p_n$.

Př. 2: Určete počet všech dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení: Na první pozici můžeme vybrat z 10 cifer 9 cifer (nemůžeme nulu), na druhou pozici zbývajících 9 cifer (i nulu), celkem $9 \cdot 9 = 81$. Použili jsme **kombinatorické pravidlo součinu**.

Pravidlo součinu: Jestliže vybíráme uspořádané k-tice čísel, přičemž první člen můžeme vybrat n_1 způsoby, druhý n_2 způsoby, ... k-tý člen n_k způsoby, pak počet všech uspořádaných k-tic je roven $n_1.n_2...n_k$.

Kombinace bez opakování

1. Kamarádi hrají tenis systémem každý s každým. Zvolte si postupně počet hráčů a sledujte, jak se mění počet zápasů v závislosti na počtu hráčů.

Řešení: Výhodou je situaci buď znázornit geometrickým modelem (mnohoúhelníkem) nebo pomocí písmen. V druhém případě přitom vedeme k tomu, aby byl jejich zápis systematický.
2 hráči – 1 zápas, 3 hráči – 3 zápasy (AB, AC, BC), 4 hráči – 6 zápasů (AB, AC, AD, BC, BD, CD), atd.

2. V rovině je dáno 5 různých bodů, žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Kolik různých přímek a kolik různých úseček je těmito body určeno? (viz seminář)

3. Kolik stran a úhlopříček má konvexní pětiúhelník? (5 stran, 5 úhlopříček)

4. Kolik úhlopříček má pravidelný šestiúhelník (*n*- úhelník)?

Řešení: čtyřúhelník má 2 úhlopříčky, pětiúhelník má 5 úhlopříček, šestiúhelník má 9 úhlopříček. Obecně $\frac{n(n-3)}{2}$.

5. Ve společnosti je 12 osob. Podají si ruce každý každému. Kolik podání ruky to bude? (Můžeme použít představu z předchozích dvou příkladů)

6. Kolik způsoby si můžete vybrat z osmi různých zákusků dva různé zákusky?

Řešení: Pro názornost můžeme začít se 3 zákusky, 4 zákusky, atd. Opět je možno využít mnohoúhelníku ke geometrické představě. Nebo písmeny: AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH (7), BC, BD, … (6), CD, … (5, 4, 3, 2, 1). Dva zákusky můžeme vybrat z osmi zákusků 28 způsoby.

7. Jsou dány úsečky a = 6,4 cm, b = 4,7 cm, c = 50 mm, d = 32 mm. Vypočítejte obvody a obsahy všech obdélníků, jejichž stranami mohou být úsečky *a, b, c, d.*

Řešení: V této úloze stojí vedle kombinatorického zkoumání také převody jednotek, znalost pojmů obvod a obsah obdélníku. Žáci nejdříve vytvoří všechny možné obdélníky a k nim pak budou dopočítávat údaje: *a,b; a,c; a,d; b,c; b,d; c,d*

8. Zahradník vypěstoval 8 druhů růží. Kolik má možností výběru kytice ze tří druhů růží?

Řešení: Druhy růží si označíme písmeny podle barev: červená, růžová, fialová, žlutá, oranžová, bílá, modrá, světle růžová

Pro začátek vybíráme trojice ze čtyř druhů: ČRF, ČRŽ, ČFŽ, RFŽ – 4 možnosti, $\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3} = 4$

Trojice z pěti druhů: ČRF, ČRŽ, ČRO, ČFŽ, ČFO, ČŽO, RFŽ, RŽO, FRO, FŽO – 10 možností, $\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$

Pro osm druhů se můžeme pokusit vypsat všechny možnosti, ale můžeme se dopustit chyby. Proto je lepší vycházet ze zobecnění: $\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56$.

9. V turnaji bylo sehráno 28 zápasů. Kolik družstev se turnaje zúčastnilo, jestliže hrál každý s každým právě jednou?

Řešení: Experimentem – 4 družstva, 6 zápasů $\left(\frac{4\cdot3}{2}\right)$, 5 družstev, 10 zápasů $\left(\frac{5\cdot4}{2}\right)$, družstev tedy musí být 8 $\left(\frac{8\cdot7}{2} = 28\right)$.

10. Pět kamarádů A, B, C, D, E jelo stanovat. Měli jeden stan pro dvě osoby a jeden stan pro tři osoby. Kolika způsoby se mohli rozdělit?

Řešení: Dvě osoby z pěti vybereme stejným počtem možností jako tři osoby z pěti, a to $\frac{5\cdot4}{2} = 10$. Je tedy 10 možností, jak se mohou rozdělit.

11. Kuželky jsou sestaveny do čtverce tak, že v každé řadě jsou tři kuželky. Při házení koulí můžeme shodit 0 až 9 kuželek. Kolik je všech možností shození kuželek?

Řešení: $1+9+36+84+126+126+84+36+9+1=512$ (např. $\binom{9}{3}=84=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}$, jedná se o náročnější úlohu)

12. Šest kamarádek A, B, C, D, E, F se rozhodlo, že budou vytvářet všechny možné skupiny po jedné, po dvou, po třech, po čtyřech, po pěti. Jak se mohly rozdělit? Kolik různých skupin vždy mohly vytvořit?

Řešení: 6+15+20+15+6, např. $\binom{6}{4}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=15$.

13. V rovině je dáno 7 různých bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Kolik různých trojúhelníků je těmito body určeno?

Řešení: Body jsou nekolineární, tj. každá trojice bodů určí trojúhelník: $\binom{7}{3}=35$.

Žáci mohou postupovat experimentálně: 3 body, 1 trojúhelník; 4 body, 4 trojúhelníky; 5 bodů: body si očíslujeme, z 1. bodu můžeme udělat 6 trojúhelníků, nový obrázek – z 2. bodu můžeme udělat 3 trojúhelníky, ze 3. už jen 1. Celkem 10 trojúhelníků. Atd. Náročnější úloha, již by bylo zapotřebí zobecnění.

14. V rovině je dáno 9 různých bodů, z nichž žádnými třemi neprochází přímka a žádnými čtyřmi neprochází kružnice. Kolik různých kružnic je těmito body určeno?

Řešení: Každý trojúhelník má svoji kružnici opsanou. Hledáme proto trojice bodů: $\binom{9}{3}=84$

15. Jsou dány úsečky délek 6 cm, 4 cm, 3 cm, 8 cm, 2 cm, 5 cm. Kolik různých trojúhelníků můžeme pomocí těchto úseček sestrojit?

Řešení: Z kombinatorického hlediska máme 20 možností. Nesníme ale zapomenout na trojúhelníkovou nerovnost. Potom musíme zvažovat možnosti. Např. k úsečkám 2 a 3 lze jedině 6 nebo 8. Celkem je pouze 5 možností (236, 238, 248, 258, 348).

K-členná **kombinace** z *n* prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. K-členná kombinace z *n* prvků je k-prvková podmnožina *n*-prvkové množiny.

Symbol $\binom{n}{k}$ se nazývá kombinační číslo. Pro všechna celá nezáporná čísla $n,k,\ n<k$ platí:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k(k-1)...2.1} \qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ se poprvé objevuje u L. Eulera v 18. století. Kombinační číslo

$\binom{n}{k}$ určuje počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.

Pro každé přirozené číslo *n* definujeme *n* faktoriál (značíme $n!$) takto: $n!=n(n-1)\ ...\ 2.1$, $0!=1$ (např. nula kuželek z 9 kuželek můžeme shodit jedním způsobem)

Na ZŠ vzorce nezavádíme, žáci pracují intuitivně, objevují vztahy, které postupně zobecňují.

Variace bez opakování

1. Kolik různých vlajek můžeme sestavit ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou-li k dispozici látky barev: červená, modrá, bílá, zelená, žlutá?

Řešení: Žáci zkouší různé možnosti. Je přitom zřejmé, že je rozdíl, když je červená nad modrou nebo modrá nad červenou. Možnosti: ČMB, ČMZ, ČMŽ; ČBM, ČBZ, ČBŽ; ČZM, ČZB, ČZŽ; ČŽM, ČŽB, ČŽZ – 12 možností, je-li nahoře červená. Pro ostatní barvy je to stejné, tj. celkem $12 \cdot 5 = 60$.
Můžeme si také říci, že na první pozici může být 5 barev, na 2. pozici 4 barvy, na 3. pozici 3 barvy, celkem $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2. Kolik různých dvoutónových signálů můžeme vytvořit ze čtyř tónů c, e, g, h?

Řešení: např. signál „hoří" je složen z tónů c f, což je zcela jiný signál než f c. Na prvním místě mohou být 4 tóny a na druhém 3, tedy $4 \cdot 3 = 12$.

3. Kolik různých trojciferných čísel můžeme zapsat pomocí číslic 8, 7, 6, 5, 2, jestliže se každá číslice vyskytuje v zápisu čísla nejvýše jednou? Kolik z těchto čísel je sudých?

Řešení: U těchto úloh začínáme vždy jednoduššími variantami: Kolik různých dvojciferných čísel můžeme zapsat pomocí číslic 8, 7, 5, když se číslice v zápisu neopakují? Žáci si systematicky vypíší možnosti, je jich $6 = 3 \cdot 2$. Dále dvouciferná čísla ze 4 cifer (12), trojciferná ze 4 cifer (24), nakonec trojciferné z 5 cifer: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Sudá čísla jsou taková, která mají na pozici jednotek 8, 6 nebo 2. Tj. celkem $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.

4. Kolik různých čísel můžeme sestavit z číslic 3, 5, 4, 0, 9, jestliže se každá číslice vyskytuje v zápisu čísla nejvýše jednou? Kolik z nich je násobkem čísla 5?

Řešení: Jednociferná čísla: 4; dvouciferná čísla: $4 \cdot 4 = 16$; trojciferná čísla: $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$; čtyřciferná čísla: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$, pěticiferných je také 96. Dohromady jich je 260.
Číslo dělitelné pěti má na pozici jednotek 0 nebo 5. Jednociferné je 1. Dvouciferná: $4 + 3 = 7$. Trojciferná: $4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 21$. Čtyřciferných: $4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 42$. Pěticiferné může mít na pozici jednotek jedině nulu, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Dohromady 95 čísel.

5. Osm spolužáků si slíbilo, že si o prázdninách pošlou pohlednice. Kolik pohlednic tak bylo rozesláno?

Řešení: Každý pošle pohlednici sedmi kamarádům, tj. $8 \cdot 7 = 56$.

6. Ve škole máme 10 vyučovacích předmětů, každý den máme 6 vyučovacích hodin. Každému předmětu se má vyučovat nejvýše jednu hodinu denně. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den?

Řešení: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$. Můžeme žáky nechat tipovat.

7. Kolik přirozených šesticiferných čísel, v jejichž zápisu jsou všechny číslice navzájem různé, lze zapsat pomocí všech deseti cifer desítkové soustavy?

Řešení: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136\,080$

K-členná **variace** z *n* prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet všech k-členných variací z *n* prvků je:

$V(k,n) = n.(n-1).(n-2). \dots .(n-k+1)$

Platí: $V(k,n) = n.\ V(k-1, n-1)$

Vztah mezi kombinacemi a variacemi:

Př.: Ze čtyř závodníků vybíráme trojici, která a) obdrží medaile, b) dostane zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili.

Řešení: a) Nezáleží na pořadí, jedná se tedy o kombinace. $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4$

b) Záleží na pořadí, jedná se o variace. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Platí, že variací je k!-krát více než kombinací. A to z toho důvodu, že to co jsou pro variace různé případy (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA) je pro kombinace jeden jediný případ ABC.

$$K(k,n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutace bez opakování

Permutace bez opakování jsou speciálním případem variací bez opakování. Žáci mohou tedy tyto úlohy řešit souběžně. Ovládají-li výpočty pro variace, umí tím i permutace (bez opakování).

1. Zapište všechna trojciferná čísla, v jejichž zápisu se vyskytují číslice 5, 3, 8, každá právě jednou. ($3! = 6$, žáci vypisují možnosti)
2. Kolik lichých čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 3, 4, 6, 7, jestliže se v zápisu čísla vyskytuje každá číslice právě jednou? (Liché číslo má na pozici jednotek 3 nebo 7, tedy $3! + 3! = 12$.)
3. Kolika způsoby můžeme rozesadit 8 dětí na jedné dlouhé lavici? ($8! = 40\,320$)
4. Kolika způsoby můžeme rozesadit 8 dětí kolem kulatého stolu? (Jednu židli označíme jako první, máme 40 320 rozesazení, všechny možnosti jsou zde obsaženy.)
5. Šest dětí se přesazuje ve školních lavicích každý den. Bude jim stačit na všechna možná rozesazení školní rok? ($6! = 720$, rok tedy nestačí)
6. Kolik způsoby můžeme posadit 10 hostů na 10 židlí? ($10! = 3\,628\,800$)

7. Kolik různých vět o sedmi slovech můžeme získat, máme-li k dispozici právě 7 různých slov? Pokuste se takovou větu sestavit. ($7! = 5\,040$, většina vět nedává smysl; např. ježek, bankovka, zatímco, a, počítat, pracovat, zahradničit; lze skloňovat a časovat: Zatímco ježek zahradničil a pracoval, počítal bankovky.

Permutace z *n* prvků je uspořádaná *n*-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek právě jednou.

Permutace z *n* prvků je každá *n*-členná variace z těchto prvků.

Počet permutací:

$$P(n) = V(n,n) = n.(n-1).(n-2). \dots . 3 . 2 . 1 = n!$$

Hodnoty faktoriálů čísel rostou velmi rychle:

$1! = 1$, $4! = 24$, $5! = 120$, $10! = 3\,628\,800$

Skupiny s opakovním

Variace s opakováním

1. Král posílá 6 spěšných zpráv. Každý ze 3 poslů může doručit libovolnou z nich. Kolik je možností, jak může rozdělit dopisy mezi kurýry? (Zakreslíme si 6 pozic pro zprávy, každou může doručit libovolný posel – může se klidně stát, že všechny doručí jeden posel. Tj. $3^6 = 729$)

2. Kolik značek Morzeovy abecedy je možno vytvořit, sestavíme-li tečky a čárky do skupiny o 1-4 prvcích? (1 prvek – tečka nebo čárka; 2 prvky – 4 možnosti, 3 prvky - $2^3 = 8$, 4 prvky - $2^4 = 16$, celkem 30 značek)

3. Kolik čtyřciferných čísel můžeme sestavit z číslic 3 a 6? (Žáci postupují tak, že vypisují všechny možnosti. Je jich 16.)

4. Kolik pěticiferných čísel můžeme poskládat z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, pokud se cifry mohou opakovat? (Na první pozici máme 6 cifer, na další 4 pozice máme 7 cifer, $6 \cdot 7^4 = 14\,406$)

5. Kolik přirozených čísel menších než 10^5 lze zapsat pouze pomocí cifer 7 a 9? ($2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$)

K-členná **variace s opakováním** z *n* prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.

Počet variací s opakováním:

$$V'(k,n) = n^k$$

Permutace s opakováním

1. Kolika způsoby můžeme sestavit 5 vagonů, když ve třech vagonech je písek a ve dvou je cement? (Lze vypsat všechny možnosti: CCPPP, CPCPP, CPPCP, CPPPC, PCCPP, PCPCP, PCPPC, PPCCP, PPCPC, PPPCC. $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$
2. Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova MATEMATIKA? (Zde už je velmi náročné experimentovat. Nejlépe nám poslouží vzorec, $\frac{10!}{3!2!2!} = 151\,200$)
3. Určete počet všech anagramů, které lze vytvořit z písmen PARABOLA, požadujeme-li, aby se ve vytvořeném anagramu pravidelně střídaly samohlásky a souhlásky. (První souhláska: $4! \cdot \frac{4!}{3!} = 96$, první samohláska: 96, celkem 192)
4. Kolik různých anagramů můžeme získat ze slova ROKOKO, nesmějí-li v takovém anagramu stát všechna písmena O vedle sebe? (Všech možností: $\frac{6!}{2!3!} = 60$, všechna O vedle sebe: $\frac{4!}{2!} = 12$, celkem 60-12=48)
5. Pro 8 studentů je připraveno ubytování ve 3 pokojích, z nichž dva jsou trojlůžkové, jeden dvojlůžkový. Kolik je způsobů rozdělení do jednotlivých pokojů? ($\frac{8!}{3!3!2!} = 560$)
6. Matka má 2 stejná jablka, 3 stejné hrušky a 4 stejné pomeranče. Každý den dá synovi po jednom kousku ovoce. Určete, kolik je možností výdeje. ($\frac{9!}{2!3!4!} = 1\,260$)

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek alespoň jednou.

Počet permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \ldots, k_n$ krát:

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1!\,k_2! \ldots k_n!}$$

Pozn.: Promyslete, jaký existuje vztah mezi permutacemi a permutacemi s opakováním.

Př.: Z číslic 1, 2, 3, 4 utvořte všechna čtyřciferná čísla. Z číslic 1, 2 utvořte všechna čtyřciferná čísla. (V prvním případě 4!. Když v druhém případě očíslujeme jednotlivé cifry, odpovídají možnosti $1_1 1_2 2_1 2_2 = 1_2 1_1 2_1 2_2$ a je jich 2!.)

Kombinace s opakováním

1. U stánku prodávají tři druhy čokolád a Aleš chce koupit 5 čokolád. Kolik má možností nákupu? (Řešíme experimentem, vypíšeme všechny možnosti: 3 možnosti, kdy jsou všechny čokolády jednoho druhu, 18 možností, kdy jsou druhy různé – celkem 21 možností.)
2. V sadě je 32 karet, 8 druhů, každá ve čtyřech barvách. Kolika způsoby můžeme vybrat 4 karty, jestliže: a) rozlišujeme jen barvy, b) rozlišujeme barvy i hodnoty karet? (a) jsou 4 barvy, $n = 4, k = 4$, tedy $\binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = 35$; b) $n = 32, k = 4$, tedy $\binom{32}{4} = 35\,960$)
3. Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 (stejných) tenisových míčků. Určete počet a) všech možných rozdělení, b) počet všech rozdělení, při kterých každé dítě dostane aspoň jeden míček. (a) $n = 6, k = 15, \binom{6+15-}{15} = 15\,504$, b) $\binom{6+9-1}{9} = 2\,002$)
4. Máme 2 druhy pohlednic, z nich chceme vybrat 3 pohlednice. Kolik je možností výběru?

   Máme 2 druhy pohlednic, chceme vybrat 4 pohlednice. Kolik je možností výběru? (Řešíme experimentem, v prvním případě jsou 4 možnosti a v druhém 5 možností. Zakreslíme si 2 přihrádky (2 druhy) a do nich vkládáme pohlednice.)
5. Máme 12 druhů pohlednic. Kolika způsoby lze provést nákup 8 pohlednic, když jeden druh může být zakoupen vícekrát? ($n = 12, k = 8, \binom{12+8-}{8} = 75\,582.$ Situaci lze znázornit – nakreslíme 12 přihrádek, je v nich tedy 11 přepážek, permutujeme 8 vybraných pohlednic a 11 přepážek.)

K-členná **kombinace s opakováním** z *n* prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.

Počet kombinací s opakováním:

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Toto číslo také udává, kolika způsoby můžeme rozmístit *k* identických předmětů do *n* přihrádek.

Využití kombinatorických úloh v učivu matematiky

6. ročník – numerace a početní výkony v oboru přirozených čísel

1. Kolik je všech trojciferných čísel zapsaných různými číslicemi?
2. Kolika způsoby můžeme zaplatit 50 Kč pomocí mincí: 20 Kč, 20 Kč, 5 Kč, 2 Kč?

3. Doplňte mezi čtyři dvojky závorky a znaménka +, -, . , : tak, abyste dostali výsledek 1.
4. Doplňte mezi čtyři sedmičky závorky a znaménka +, -, . , : tak, abyste dostali výsledek 14.
5. Z čísel 1 až 9 sestavte magický čtverec 3 krát 3 tak, aby se v každém řádku, sloupci i úhlopříčkách součty sobě rovnaly.

6. ročník – dělitelnost v oboru přirozených čísel

6. Určete všechny dělitele čísla 2730.
7. Kolik trojciferných přirozených čísel sestavených z číslic
    a. 1, 2, 3, 4, 5,
    b. 0, 1, 2, 3, 5

    je dělitelných pěti?

Algebraické výrazy

Všimněte si koeficientů u jednotlivých členů mocnin dvojčlenů a čísel v Pascalově trojúhelníku:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

V každém řádku tohoto trojúhelníku se vyskytují kombinační čísla $\binom{n}{k}$, např. $\binom{3}{2} = 3$. Pro žáky je trojúhelník důležitý v algebře - souvislost s koeficienty při výpočtu mocnin dvojčlenu $(a + b)^n$.

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Literatura

Calda, E., Dupač, V.: Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Praha: Prometheus, 1993.

Divíšek, J., Dřízal, V., Koman, M.: Matematika pro 5. ročník ZŠ. Doplňující text pro třídy s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů. Praha: Prometheus, 1991.

Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh II. Učební text. Brno: MU, 1997.

Fuchs, E.: Kombinatorika a teorie grafů. Praha: SPN, 1986.

Fuchs, E. a kolektiv: Standardy a testové úlohy z matematiky pro ZŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií. Praha: Prometheus, 2000, 152 s.

Masiar, P., Bureš, F., Koman, M.: Matematika pro 6. ročník ZŠ. Doplňující text pro třídy s rozšířeným vyučováním matematice a přírodovědným předmětům. Praha: Prometheus, 1992.

Sedláček, J.: Faktoriály a kombinační čísla. Praha: Mladá fronta, 1985.

Vilenkin, M., J.: Kombinatorika. Praha: SNTL, 1972.

Vrba, O.: Kombinatorika. Praha: Mladá fronta, 1980.