Podobně jako v algebře 1 vedly konkrétní množiny $(Q,+)$, $(Q,\cdot)$ k definici abstraktního pojmu grupy a okruhu, nyní v algebře 2 se budeme zabývat tím, že konkrétní poznatky o vektorech vede k vytvoření abstraktního pojmu vektorový prostor (jehož vlastnosti budeme dále studovat, podobně jako jsme studovali abstraktní strukturu grupy či okruhu):

**Definice 8:** $(V,+)$ ... vektorový prostor nad tělesem $(T,+,\cdot)$, prvky $\vec{v}\in V$ ... vektory, prvky $s\in T$ ... skaláry

pokud a) $(V,+)$ je komutativní grupa, tj. operace $+ : V\times V \to V$ splňuje vlastnosti

① $\forall \vec{u},\vec{v}\in V: \vec{u}+\vec{v}\in V$ ... uzavřenost operace + na V

② $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V: (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ ... asociativita operace +

③ $\exists \vec{o}\in V: \vec{u}+\vec{o} = \vec{u} = \vec{o}+\vec{u}$ ... $\forall \vec{u}\in V$ ... existence neutrálního prvku

④ $\forall \vec{u}\in V\ \exists (-\vec{u})\in V: \vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{o}$ ... existence inverzí vzhledem k +

⑤ $\forall \vec{u},\vec{v}\in V: \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

zobrazení $T\times V\to V$ vykazuje vlastnosti „příbuzné" vlastnostem operace na množině

b) zobrazení $\cdot : T\times V \to V$ (tzv. násobení skalár KRÁT vektor, výsledkem je vektor)

splňuje vlastnosti

"①" $\forall t\in T, \vec{v}\in V: t\cdot\vec{v}\in V$ (uzavřenost součinu skalár KRÁT vektor)

"②" $\forall s,t\in T, \vec{v}\in V: s\cdot(t\cdot\vec{v}) = (s\cdot t)\cdot\vec{v}$

"③" $\exists 1\in T: 1\cdot\vec{v} = \vec{v}\ \ \forall \vec{v}\in V$

c) souhra operací + a operace (skalár KRÁT vektor) splňuje vlastnosti

"6a" $\forall s,t\in T, \vec{v}\in V: (s+t)\cdot\vec{v} = s\cdot\vec{v}+t\cdot\vec{v}$

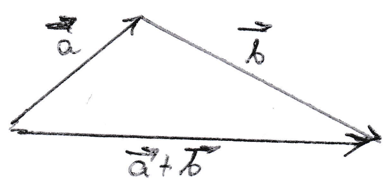
"6b" $\forall s\in T, \vec{u},\vec{v}\in V: s\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = s\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$

sčítání skalárů a sčítání vektorů vykazuje vůči násobení skal. KRÁT vektor vlastnost „příbuznou" distributivnímu zákonu dvou operací na množině

Pozn.: Jak si dobře zapamatovat vlastnosti "①", "②", "③", "6a", "6b": v žádné z těchto vlastností se nevyskytuje součin dvou vektorů, ale jen součiny skalár KRÁT skalár nebo skalár KRÁT vektor

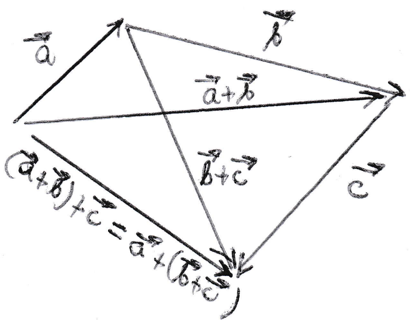
Př. 5: Vlastnosti ① až ⑤ jsme we zkoumali v algebře 1 – tyto vlastnosti platí i u vektorů: Např. množina V volných vektorů v rovině nad tělesem R reálných čísel je vektorový prostor:

ad ①



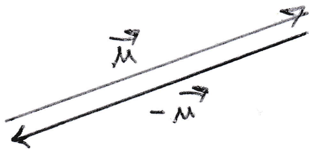

$\forall \vec{a},\vec{b}\in V$ je $\vec{a}+\vec{b}$ také vektor

ad ②



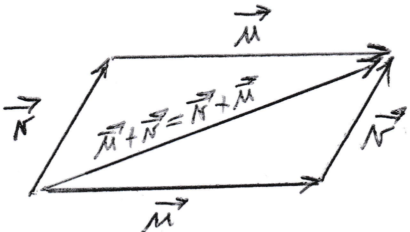

asociativní zákon pro sčítání vektorů: důkaz je proveden graficky ad 3 Každý volný vektor v rovině je určen svou velikostí (délkou) a svým směrem, kromě nulového vektoru $\vec{o}$, který má velikost rovnu nule a jeho směr je libovolný

ad 4




pro každý vektor $\vec{u}$ volný v rovině existuje i vektor $(-\vec{u})$ k němu inverzní vzhledem ke sčítání

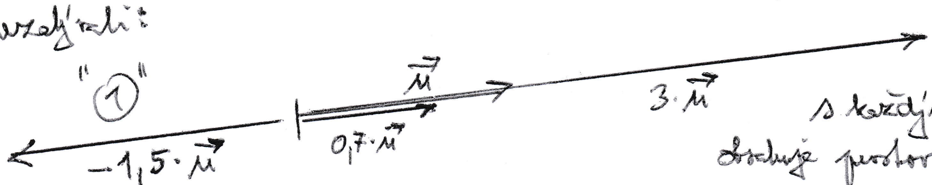
ad 5




$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ ... sčítání volných vektorů splňuje komutativní zákon

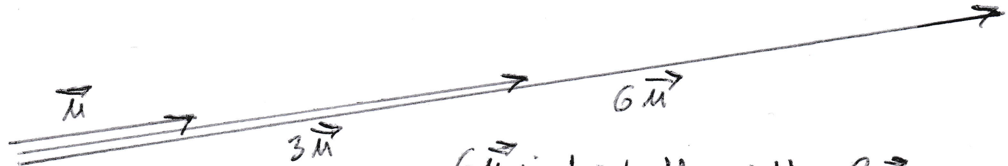
právě uvedené vlastnosti vektorů lze popsat pojmem komutativní grupy; i ostatní následující vlastnosti jsou pro vektorové prostory specifické a ještě jsme se jimi nezabývali:

"1"




s každým vektorem $\vec{u}$ obsahuje prostor volných vektorů i nekonečně mnoho dalších vektorů, (reálné násobky vektoru $\vec{u}$)

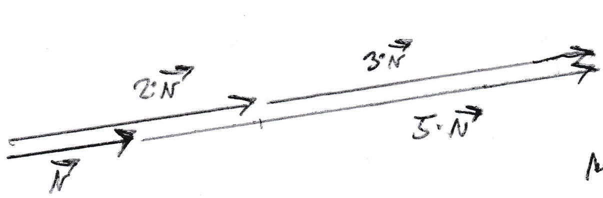
"2" např. $2\cdot(3\cdot\vec{u}) = (2\cdot3)\cdot\vec{u} = 6\vec{u}$




$6\vec{u}$ je dvojnásobkem vektoru $3\vec{u}$, a současně i šestinásobkem vektoru $\vec{u}$

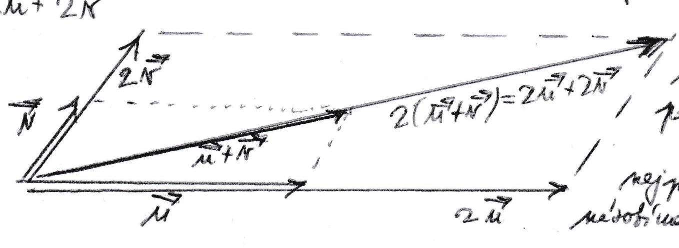
"3" $\exists$ jednotkový skalár $1 \in R$: $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ ... vynásobení konstantou 1 se nezmění velikost ani směr vektoru $\vec{u}$

"6a" např. $(2+3)\cdot\vec{v} = 2\vec{v} + 3\vec{v}$




nezáleží na tom, zda nejprve sečteme skaláry, pak násobíme vektor, nebo zda nejprve provedeme násobení skalár KRÁT vektor, a pak výsledné vektory sečteme

"6b" $2(\vec{u}+\vec{v}) = 2\vec{u}+2\vec{v}$




nejprve sečteme vektory, pak násobíme skalárem je totéž co nejprve dílčí vektory násobíme skalárem, pak sečteme

**Př. 6** $(R[x]_n, +, \cdot)$ ... prostor všech polynomů stupně nejvýše $n$ nad tělesem $R$ je vektorový prostor;

např. $n=3$: $\vec{w} = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$

$\vec{u} = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$

$\vec{v} = 3x^3 + 5x^2 + x - 2$

① $\vec{u} + \vec{v} = 5x^3 + 6x^2 - 4x - 1$

② $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = 7x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

③ $\vec{o} = 0$ ; $\vec{u} + \vec{o} = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$

④ např. $-\vec{u} = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$

$-\vec{v} = -3x^3 - 5x^2 - x + 2$ atd.

⑤ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

"①" $2 \cdot \vec{u} = 4x^3 + 2x^2 - 10x + 2 \in (R[x]_3, +, \cdot)$ ... násobení se definuje u každého koeficientu

"②" $(2 \cdot 3) \cdot \vec{u} = 2 \cdot (3 \cdot \vec{u}) = 12x^3 + 6x^2 - 30x + 6$

"③" $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

"6a" $(2+3) \cdot \vec{u} = 10x^3 + 5x^2 - 25x + 5 = 2\vec{u} + 3\vec{u}$

"6b" $2 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 10x^3 + 12x^2 - 8x - 2 = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

**Př. 7** $(R\langle a,b\rangle, +, \cdot)$ ... prostor všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a;b\rangle$

① $+$ ... součet funkčních hodnot:

$\forall f(x), g(x) \in R\langle a,b\rangle$: $f(x) + g(x)$ je opět funkce na $\langle a,b\rangle$, která je spojitá

② $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$, což plyne z asociativity sčítání reálných čísel

③ $e(x) = 0$ $\forall x$ je neutrální prvek: $f(x) + e(x) = f(x)$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$

④ $\forall f(x) \in R\langle a,b\rangle$ $\exists (-f(x)) \in R\langle a,b\rangle$: $f(x) + (-f(x)) = e(x) = 0$

⑤ $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$

"①" konstanta $s \cdot f(x)$ je opět spojitá reálná funkce proměnné $x$ na $\langle a;b\rangle$

"②" např. $2 \cdot (3x) = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x$, nebo $2(3 \cdot f(x)) = (2 \cdot 3) \cdot f(x)$ $\forall f(x) \in R\langle a,b\rangle$

"③" $\exists 1 \in R$: $1 \cdot f(x) = f(x)$ $\forall f(x) \in R\langle a,b\rangle$

"6a" $(2+3) \cdot f(x) = 5f(x) = 2 \cdot f(x) + 3 \cdot f(x)$ $\forall f(x) \in R\langle a;b\rangle$

"6b" $2 \cdot (f(x) + g(x)) = 2f(x) + 2g(x)$ $\forall f(x), g(x) \in R\langle a;b\rangle$

Pozn.: V analytické geometrii je někdy užitečné uvažovat vektory nikoli volné, ale takové, jejichž počátek je v průsečíku souřadných os kartézské soustavy souřadnic; pak je každý vektor spojen s určitým bodem v prostoru, a sice se svým koncovým bodem; tedy ke každému bodu prostoru lze sestrojit polohový vektor s počátkem v průsečíku os a koncem v daném bodě, který uvažujeme.

V tomto smyslu někdy říkáme, že prvky vektorového prostoru jsou body, nikoli vektory. Jedná se jen o jakýsi ústupek v terminologii, nazývat prostor různých vektorů prostorem bodů – na daných deseti vlastnostech vektorového prostoru se nic nemění!

Př. 8 $V = \{\vec{o}\}$ … nejmenší možný vektorový prostor je prostor, který obsahuje pouze nulový vektor. (vzhledem k počtu prvků)

Klíčovou konstrukcí či klíčovým výpočtem při naší práci s vektory bude zjišťování, zda je určitý vektor lineární kombinací (= součtem násobků) jiných vektorů

Definice 9 Posloupnost vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ je lineárně závislá, pokud některý z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci těch ostatních

(*) (např. $\vec{a}_k = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot \vec{a}_{k-1}$);

V opačném případě je posloupnost vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ lineárně nezávislá

Pozn.: pokud platí (*), říkáme také, že vektor $\vec{a}_k$ je lineárně závislý na vektorech $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{k-1}$

Podobně jako při studiu grup a okruhů, i u vektorových prostorů se budeme zabývat množinou vektorů, která generuje (= vytváří pomocí lineárních kombinací) celý vektorový prostor. Pokud uvážíme, že násobení vektoru skalárem vygeneruje nekonečně mnoho dalších vektorů, asi se často budeme setkávat se situací, kdy i pro nekonečnou množinu V bude množina generátorů (co do počtu prvků) celkem málo početná. Těmto množinám generátorů budeme říkat báze.

Definice 10. Uvažujme vektorový prostor $(V, +)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Posloupnost vektorů $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ ||| báze vektorového prostoru $(V, +)$, pokud

a) je lineárně nezávislá – žádný ze vektorů nelze vyjádřit jako lin. kombinaci ostatních

b) každý vektor $\vec{v} \in V$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci,

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{u}_k$$

– tj. $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ už generují celý prostor V

Dále dimenze vektorového prostoru $(V, +)$ ||| počet vektorů nějaké jeho báze

a čísla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ve vyjádření vektoru $\vec{v}$ ||| souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$

**Př. 9** a) Jsou vektory $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ lineárně závislé?

ANO, nulový vektor je vždy lineárně závislý na ostatních vektorech, protože je jejich 0-násobek:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

b) Jsou vektory $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ lineárně závislé? NE, neexistuje $\alpha$: $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

(dva vektory jsou závislé, když jeden je násobkem druhého)

c) Jsou vektory $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ lineárně závislé? NE, protože

- $\vec{u}_1$ je nenulový
- $\vec{u}_2$ není násobkem $\vec{u}_1$
- $\vec{u}_3$ není lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

protože $\nexists\ \alpha_1, \alpha_2 \in R$: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ ... díky třetí souřadnici žádné $\alpha_1, \alpha_2$ nenajdeme.

<u>Odtud plyne postup při sestrojení báze:</u>

$\vec{u}_1$ ... zvolíme jakýkoliv nenulový vektor z V

$\vec{u}_2$ ... zvolíme takový vektor z V, který není násobkem $\vec{u}_1$

$\vec{u}_3$ ... zvolíme takový vektor z V, který není kombinací $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

atd.

**Př. 10.** a) Bází prostoru $\mathbb{R}^3$ je např. posloupnost vektorů $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

b) Bází prostoru $R^n$ je nějaká posloupnost $n$ nezávislých vektorů, dimenze $R^n$ je $n$.

c) Bází prostoru $(R[x]_n,+,\cdot)$ všech polynomů stupně nejvýše $n$ je posloupnost polynomů $(1, x, x^2, x^3, \dots, x^n)$. Tj. dimenze $R[x]_n$ je $n+1$

d) Bází prostoru $R\langle a,b\rangle$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$ je např.

$(1, x, x^2, \dots, x^n, \dots)$
nebo $(1, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin(nx), \dots)$ } tj. $\dim(R\langle a,b\rangle)=\infty$

**Př. 11.** Je posloupnost vektorů $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ bází prostoru $\mathbb{R}^3$.

Ano, každý prostor má řadu různých bází, často i nekonečně mnoho různých bází, pokud se tedy zrovna nejedná o primitivní maličký $V=\{\vec{o}\}$.

**Př. 12** Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ v bázi a) $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$