Už jsme se několikrát zabývali řešením systému lineárních rovnic. Podívejme se na tento systém ještě jednou a trochu pozvolna. Řada úloh lineární algebry vede na řešení systému lineárních rovnic. Dále se s ním setkáváme v elektrotechnice (Kirchhoffovy zákony), v ekonomii (tzv. úloha lineárního programování) a v dalších oborech.

Def. 15 Hodnost matice A (typu $m \backslash n$) = počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne z matice A elementárními řádkovými úpravami.

Pozn. 1) Na základě věty 5 (elementární řádkové úpravy nemění lineární závislost/nezávislost řádků) můžeme definici hodnosti matice A vyslovit i jinak: hodnost matice A = dimenze vektorového prostoru generovaného jejími řádky.

2) Protože z řádků matice A lze vybrat bázi podprostoru těmito řádky generovaného (tak, že vyloučíme řádky lineárně závislé na ostatních řádcích), v příslušném schodovém tvaru budou nebázické řádky právě řádky samých nul.

Def. 16. Mějme obecný SLR (viz str. (19)). Pak

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ... matice systému}, \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

... rozšířená matice systému SLR.

Věta 8 $h(A) = h(A^T)$ ... hodnost matice A je stejná jako hodnost matice transponované A^T

[Dk.: důkaz nebudeme provádět, ale věta je tak zajímavá, že je dobré ji na tomto místě zmínit]

Pozn. Věta 8 vlastně říká, že maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A (tj. dimenze podprostoru generovaného řádky) je stejné číslo jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice A (tj. dimenze podprostoru generovaného sloupci), a to bez ohledu na typ matice. Např. pokud je A typu $3/7$ a $h(A) = 2$, znamená to, že dimenze podprostoru generovaného sloupci je také 2 a při hledání báze podprostoru generovaného sloupci musíme 5 sloupců vyloučit.

Věta 9 (Frobenius–Kronecker–Capelli) SLR má nějaké (aspoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$

[Důkaz: SLR má řešení $[t_1, t_2, \dots, t_n]$ (ta n-tice je jen jedno řešení, nikoli n řešení)

$$\begin{aligned} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n &= b_1 \\ \iff \quad a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2n}t_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}t_1 + a_{m2}t_2 + \dots + a_{mn}t_n &= b_m \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot t_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot t_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot t_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

tj. sloupec béček je lineární kombinací sloupců áček,
tj. přidáním vektoru béček se nezmění sloupcová hodnost
$\iff h(A) = h(A|b)$, protože podle věty 8 je sloupcová hodnost totéž co řádková hodnost]

Gaussova eliminační metoda – 2. metoda řešení SLR (jedná se vlastně o metodu, kterou jsme již použili: převod rozšířené matice $(A|b)$ na schodovitý tvar)

Př. 19

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=9\\ 2x-y+z&=8\\ 3x\qquad -z&=3 \end{aligned}\right]$$

Tento systém lineárních rovnic napíšeme do matice, kterou pomocí elementárních řádkových úprav převedeme na schodovitý tvar = v každém dalším řádku je více nul směrem zleva než v tom předchozím, popřípadě už je celý další řádek nulový

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9\\ 2 & -1 & 1 & 8\\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1\\ -3\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & -5 & -5 & -10\\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 5 & 12 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

nyní si zjednodušené rovnice vyřešíme ve zpětném chodu (zdola nahoru)

$x+2\cdot(-1)+3\cdot 3=9 \Rightarrow \underline{x=2}$

$y+3=2 \Rightarrow \underline{y=-1}$

$2z=6 \Rightarrow \underline{z=3}$

řešením rovnice je jediná trojice hodnot

$$\left.\begin{aligned} x&=2\\ y&=-1\\ z&=3 \end{aligned}\right|$$

(tuto trojici považujeme za jedno řešení)

Př. 20

$$\begin{aligned} x+y+2z-5w&=3\\ 2x+5y-z-9w&=-3\\ 2x+y-z+3w&=-11\\ x-3y+2z+7w&=-5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3\\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3\\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11\\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1\\ -2\cdot r_1\\ -r_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3\\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9\\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17\\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1)\\ \\ \end{array}$$

vyměníme 2. a 3. řádek, protože na pozici (2,2) bude pak 1 nebo −1, a tak se nejsnáze pomocí $a_{22}=1$ vykonstruují nuly ve 2. sloupci:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot r_2 \\ +4\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -20 & 40 & -60 \\ 0 & 0 & 20 & -40 & 60 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\left(\frac{-1}{20}\right) \\ +r_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

nenulových řádků v příslušném schodovitém tvaru je méně než počet neznámých, řešení tedy bude nekonečně mnoho ;

výsledek bude obsahovat parametry (= libovolné reálné číslo), jejich počet je roven

$$\boxed{\text{počet parametrů} = \text{počet neznámých MINUS počet nenulových řádků ve schodovitém tvaru}}$$

$$1 = 4 - 3$$

řešení v našem příkladu bude obsahovat 1 parametr $p \in \mathbb{R}$;

nasadíme nyní zpětný chod dosazování do rovnic a v první rovnici zdola zvolíme jednu neznámou rovnu parametru p :

$$x + (2+3p) + 2\cdot(3+2p) - 5p = 3 \Rightarrow \underline{x = -5-2p}$$

$$y + 5\cdot(3+2p) - 13p = 17 \Rightarrow \underline{y = 2+3p}$$

$$z - 2w = 3 : \underline{w = p}$$
$$\underline{z = 3+2p}$$

daný systém lineárních rovnic má nekonečně mnoho řešení

$$\begin{aligned} x &= -5-2p \\ y &= 2+3p \\ z &= 3+2p \\ w &= p \end{aligned} \quad \text{pro } p \in \mathbb{R}$$

Množinou řešení je přímka ve čtyřrozměrném prostoru

$$\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + p\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

... přímka prochází bodem $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ a má směrový vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ř. 21

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad\quad\; - 3x_4 + x_5 \quad\quad &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad\; - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -3\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ -r_2-r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

počet parametrů $= 6 - 3 = 3$

$r, s, t \in \mathbb{R}$

ve zpětném chodu bereme rovnice zdola a volíme za parametry počet neznámých v dané rovnici MINUS jedna, abychom poslední neznámou v každé rovnici mohli dopočítat pomocí ostatních neznámých

$$x_1 + 2x_2 + 0 - 3x_4 + (2-t) = 1 : \quad \begin{array}{l} x_1 = -1 - 2r + 3s + t \\ x_2 = r \\ x_4 = s \end{array}$$

$$x_3 + 2t = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - 2t$$

$$x_5 + x_6 = 2 : \quad \begin{array}{l} x_6 = t \\ x_5 = 2 - t \end{array}$$

řešení je nekonečně mnoho a vytváří trojrozměrný podprostor šestirozměrného prostoru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pro } r, s, t \in \mathbb{R}$$

Podprostor řešení je určen bodem a lineární kombinací tří vektorů, kterou přičítáme k danému bodu

Př. 22

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4w &= 5 \\ x+3y+5z+7w &= 11 \\ x \qquad -z-2w &= -6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

sice je ve schodovitém tvaru více nezávislých než nenulových řádků, ale řešení neexistuje řádné, protože první nenulová rovnice zdola je

$$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0\cdot w=1,$$

a taková rovnice nemá řešení

(od věta 9: $h(A)=2 < h(A|b)=3$)

Poznámka: nelze jen tak zbůhdarma provádět řádkové úpravy, jak se nám líbí: cyklus představuje neekvivalentní úpravu:

$$\text{cyklus} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_3 \\ -r_2 \end{array}$$

vlastně tutéž úpravu uděláme dvakrát a napíšeme ji do dvou různých řádků

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dostali jsme závislé řádky, i když původní r_2, r_3 lineárně závislé nebyly

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = r \in \mathbb{R} \text{ parametr} \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 2-r \end{array}\right\}$$

toto řešení je špatně!!

Nejedná se o ekvivalentní úpravu, protože jsme ztratili informaci o třetí rovnici, která není lineárně závislá na druhé rovnici

k cíli vede kaskáda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1 \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

nebo pivotový řádek = jediný řádek, jehož násobky odčítáme od ostatních řádků

1. řádek je pivotový řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1 \\ -2\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ -2\cdot r_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

jediné správné řešení zde je $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$