

Na základě posledních 19 až 22 řádků matici: SLR

a) nemá žádné řešení, pokud $\text{h}(A) < \text{h}(A|b)$

b) má jediné řešení, pokud $\text{h}(A) = \text{h}(A|b) = m$

c) má nekonečně mnoho řešení

potud $\text{h}(A) = \text{h}(A|b) < m$

↑ počet neznámých

Zabýváme se nyní ještě jiným druhem homogenní SLR, protože ten má zajímavější vlastnosti a slediska pojme vektorový prostor:

$$(SLR-hom) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = 0 \end{cases}$$

Za první, m -lice $[0, 0, \dots, 0]$ je vždy řešením (SLR-hom); po druhém je 0 na prvé i levé straně rovnice

Věta 10. Množina řešení (SLR-hom) tvoří vektorový prostor dimenze $m - \text{h}(A)$

↑ počet neznámých

[Důk.: pro dva vektory vektorového podprostoru musí existovat iže pro

dvě řešení $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$; $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$ je i každá jejich lineární kombinace

$\alpha \cdot \vec{s} + \beta \cdot \vec{t}$ také řešením (SLR-hom):

$$\vec{s} \text{ je řešením (SLR-hom): } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot s_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot s_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \cdot s_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \text{ je řešením (SLR-hom): } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot t_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot t_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \cdot t_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{pak}$$

$\alpha \cdot \vec{s} + \beta \cdot \vec{t}$ je řešením (SLR-hom):

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot (\alpha \cdot s_1 + \beta \cdot t_1) + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \cdot (\alpha \cdot s_m + \beta \cdot t_m) = \alpha \cdot \left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot s_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \cdot s_m \right] + \beta \cdot \left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot t_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \cdot t_m \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- předtím jsme předpokládali
- vybereme α
- vybereme β

$= 0$; protože \vec{s} je řešením

$= 0$; protože \vec{t} je řešením

děkujeme pro váš řešení (SLR-hou) nyní přejdeme na příkladu]

Příklad 23: Najděte všechna řešení (SLR-hou)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3}x_5 &= 0 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_5 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

[Řešení: matice systému má již ve schodovitém tvaru, tj. již sestáváme množinu řešení. Protože $h(A) = 3 = m$, máme iže řešení bude nekonečnou množinu; dále víme, že počet parametrů, kterých lze dosáhnout jakéhokoli řešení, je $m - h(A) = 5 - 3 = 2$... dvě nezávislé označujeme jako parametry: například: $x_5 = \lambda$

x_4 ... nemůžeme volit jako parametr, protože se ho dá rovnice vyjádřit pomocí λ závislosti na x_5 : $x_4 = 2x_5 = 2\lambda$

x_3 ... nemůžeme volit jako parametr, protože se ho dá rovnice vyjádřit pomocí λ závislosti na x_5 : $x_3 = -\frac{1}{2}x_5 = -\frac{1}{2}\lambda$

$x_2 = \Delta$

x_1 vyjádříme z první rovnice: $x_1 = -2x_2 + \frac{1}{3}x_5 = -2\Delta + \frac{1}{3}\lambda$

Celkem množina řešení

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} -2\Delta + \frac{1}{3}\lambda \\ \Delta \\ -\frac{1}{2}\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \Delta, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \Delta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ pro } \Delta, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Jejích lineární kombinace $\Delta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$m - h(A)$ nezávislých řešení v tvar. fundamentální systém řešení
 III obecné řešení (SLR-hou)

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je řešení, které dostaneme volbou $\Delta = 1, \lambda = 0$; $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ je řešení, které dostaneme volbou $\Delta = 0, \lambda = 1$

Touto nezávislou volbou parametrů (jedem je roven jedné, ostatní jsou rovný nule)

dostaneme tzv. fundamentální řešení, která vyjadřují bázi prostoru K všech řešení (SLR-hou).

Def. 17 Obecné řešení SLR, SLR-hou... řešení, ve kterém se vyskytují parametry

Partikulární řešení SLR, SLR-hou... jedno řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů

Jaký je rozdíl mezi řešení SLR a řešení SLR-hom?
 Pochopíme se na konkrétní příklad, a souvislost pak napíšeme do též 11.

Pr. 24. Vyřešte SLR a SLR-hom pro stejnou matici A ležící stran rovnice a prokonejte souvislosti mezi možnými řešeními:

$$\begin{array}{l}
 \text{(SLR)} \quad \begin{cases} x+y+2z+3w=13 \\ x-2y+z+w=8 \\ 3x+y+z-w=1 \end{cases} \\
 \text{(SLR-hom)} \quad \begin{cases} x+y+2z+3w=0 \\ x-2y+z+w=0 \\ 3x+y+z-w=0 \end{cases}
 \end{array}$$

[Řešení: nejprve (SLR): napíšeme systém do matice a řešíme Gaussovou eliminací]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & | & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 13 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & | & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & | & -38 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2, \cdot (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 13 \\ 0 & -6 & -2 & -4 & | & -10 \\ 0 & 6 & 15 & 30 & | & 114 \end{pmatrix} \xrightarrow{+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 13 \\ 0 & -6 & -2 & -4 & | & -10 \\ 0 & 0 & 17 & 34 & | & 104 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 13 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 17 & 26 & | & 104 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{17} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 13 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix}$$

počet parametrů = $n - \text{rk}(A) = 4 - 3 = 1$
 zapíšeme chod: $x_4 = t \dots$ parametr

$$\begin{aligned}
 x_3 &= 8 - 2t \\
 x_2 &= \frac{1}{3}(5 - x_3 - 2x_4) = \frac{1}{3}(5 - 8 + 2t - 2t) = -1 \\
 x_1 &= 13 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 13 + 1 - 16 + 4t - 3t = -2 + t
 \end{aligned}
 \Rightarrow K = \left\{ \begin{pmatrix} -2+t \\ -1 \\ 8-2t \\ t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

točkové řešení SLR

SLR-hom: nejprve jsou stejné, jen sloupce pravé strany jsou nulové:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

počet parametrů = $n - \text{rk}(A) = 4 - 3 = 1$
 zapíšeme chod: $x_4 = t \dots$ parametr

$$\begin{aligned}
 x_3 &= -2t \\
 x_2 &= \frac{1}{3}(-x_3 - 2x_4) = \frac{1}{3}(2t - 2t) = 0 \\
 x_1 &= -x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4t - 3t = t
 \end{aligned}
 \Rightarrow K_h = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -2t \\ t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

točkové řešení (SLR-hom)

Porovnání SLR a SLR-hom:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ je jediné konkrétní řešení SLR rozbou $b=0$, marněme ho partikulární řešení
 jedno konkrétní řešení, které dostaneme konkrétní rozbou parametrů či parametrů?

Věta 11 (princip superpozice): Obecné řešení SLR = partikulární řešení SLR + obecné řešení (SLR-hom)

od př. 24:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kapitola 4: maticové operace, maticová metoda řešení SLR

3. metoda řešení SLR - pomocí operací s maticemi (maticová metoda)

Když bychom dokázali nějak definovat násobení matic či násobení matice krát vektor, lze SLR psát v maticovém zápisu: $Mx = b$... VRÁTME SE K SITUACI ČTVERCOVÉ MATICE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

jak máme z algebry 1, pokud by existovalo něco jako inverzní matice vzhledem k násobení, mohli bychom řešit \vec{x} spíše pomocí A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Podívejme se tedy na operace sčítání matic a násobení matic, a jakému smyslu je možné bylo operace definovat a jaké vlastnosti splňují:

Def. 18 A, B, \dots matice typu $m \times m, \dots$ stejného typu! Pak součet matic $A+B$ definujeme jako matici, která vznikne sčítáním po složkách:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mm}+b_{mm} \end{pmatrix}$$

Jake vlastnosti bychom mohli u takto definovaného sčítání matic očekávat?

Věta 12 $(M_{m \times m}, +)$ je komutativní grupa.

- 1) uzavřenost operace: výsledkem součtu je opět matice stejného typu $m \times m$
- 2) asociativita: $(A+B)+C = A+(B+C)$... plyne z asociativity sčítání reálných čísel
- 3) nulový prvek vzhledem ke sčítání je matice samých nul $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ typu $m \times m$
- 4) inverzní k A je matice $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1m} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mm} \end{pmatrix}$
- 5) komutativita plyne z komutativity sčítání reálných čísel

Def. 19 A je matice typu m/k , B je matice typu k/n . Pak lze definovat součin matic

$C = A \cdot B$ jako matice typu m/n , kterou získáme pomocí vzorce

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^k a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1k}b_{k1} & \dots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \dots + a_{1k}b_{kn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2k}b_{k1} & \dots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \dots + a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mk}b_{k1} & \dots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \dots + a_{mk}b_{kn} \end{pmatrix}$$

Poznámka: pokud bychom předchozí pojem skalárního součinu, na pozici (i,j) výsledné matice se myšlely skalární součin i -lého řádku matice A a j -lého sloupce matice B
 jak již víme možná z analytické geometrie SS:

$$C_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$\vec{a}_{i-} \cdot \vec{b}_{-j}$

(sloučky obou vektorů na odpovídajících pozicích vynásobíme, všechny tyto součiny sečteme)

Př. 25

Pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ -8 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ je součinnem $C = A \cdot B$
 matice typu 3×2

typu 3×4 typu 4×2
 aby bylo možné použít skalární součin vektorů, řádky A a sloupce B musí mít stejnou délku

kde $C = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + (-7) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-7) \cdot (-3) \\ -8 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + (-5) \cdot (-2) & -8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-5) \cdot (-3) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (1, 2, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} & (1, 2, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ (0, 1, -1, -7) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} & (0, 1, -1, -7) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ (-8, 0, 0, -5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} & (-8, 0, 0, -5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & 22 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}$$

typu 3×2