Př. 30 Příklady lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory:

a) K matici A typu $m \backslash n$ existuje lineární zobrazení $\varphi : R^n \to R^m$, které lze touto maticí reprezentovat.

b) Nulová matice typu $m \backslash n$ zobrazí všechny vektory prostoru R^n na nulový vektor $\vec{o} \in R^m$.

c) Jednotková matice E_n typu $n \backslash n$ (= řádu n) představuje identické zobrazení, které zobrazí každý vektor $\vec{v} \in R^n$ na sebe sama.

d) Zobrazení $V \to V$, které přiřadí každému vektoru $\vec{v} \in V$ jeho λ-násobek $\lambda \cdot \vec{v}$, kde λ je konstanta z tělesa T, je lineární a tzv. podobnostní zobrazení.

V libovolné bázi je matice tohoto zobrazení

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

e) Používejme v R^2 tzv. polární souřadnice ρ, φ (stejné jako ρ a φ v goniometrickém tvaru komplexního čísla):

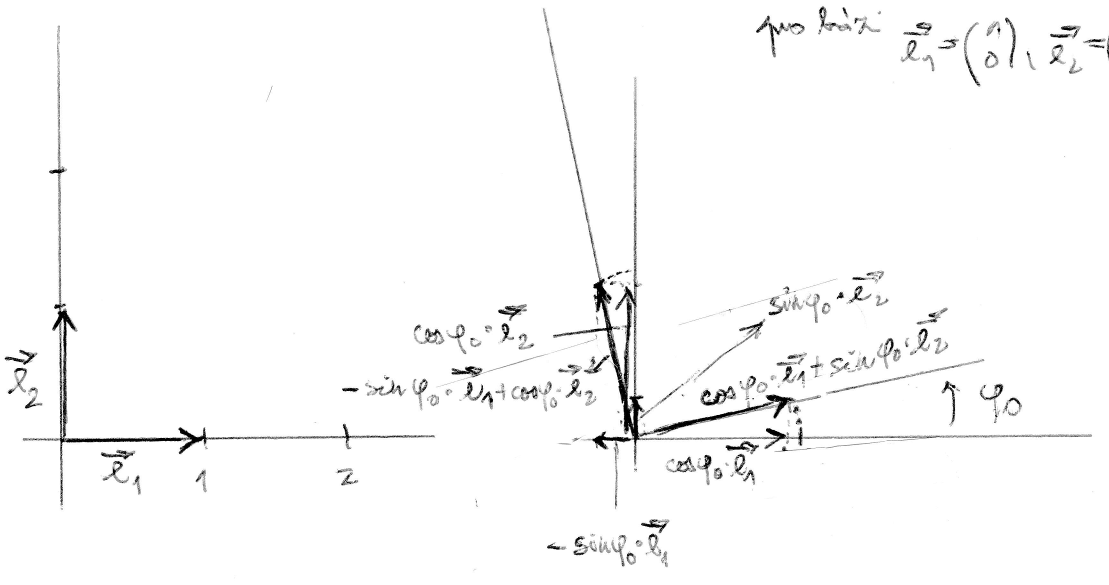
ρ = vzdálenost daného bodu od počátku,

φ = úhel, který svírá průvodič bodu s kladným směrem osy x.

Zobrazení

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi + \varphi_0 \end{pmatrix}$$ představuje pootočení roviny o úhel φ_0

je lineární zobrazení, tzv. rotace o úhel φ_0; pokusme se najít matici tohoto zobrazení pro bázi $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Tedy $\vec{e}_1 \longmapsto \cos\varphi_0 \cdot \vec{e}_1 + \sin\varphi_0 \cdot \vec{e}_2 = \cos\varphi_0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sin\varphi_0 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi_0\\ \sin\varphi_0\end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 \longmapsto -\sin\varphi_0 \cdot \vec{e}_1 + \cos\varphi_0 \cdot \vec{e}_2 = -\sin\varphi_0 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \cos\varphi_0 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi_0\\ \cos\varphi_0\end{pmatrix}$

Víme, že obrazy vektorů báze vytvářejí sloupce matice A:

$$A = \begin{pmatrix}\cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0\\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0\end{pmatrix}$$

Pak dohromady $\forall \vec{v} \in V = \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0\\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0\end{pmatrix}}_{\text{zadání zobrazení maticí}} \cdot \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}v_1\cos\varphi_0 - v_2\sin\varphi_0\\ v_1\sin\varphi_0 + v_2\cos\varphi_0\end{pmatrix}}_{\text{zadání zobrazení předpisem}}$$

zadání zobrazení předpisem: $\varphi(\vec{v}) = \varphi\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\cos\varphi_0 - v_2\sin\varphi_0\\ v_1\sin\varphi_0 + v_2\cos\varphi_0\end{pmatrix}$

f) pro $m < n$ je lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ v bázi $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n$ projekcí prostoru $\mathbb{R}^n$ na podprostor dimenze m (s bází $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$), tj.

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_m\\ v_{m+1}\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_m\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

najdeme matici reprezentující toto zobrazení:

$\vec{e}_1 \longmapsto \vec{e}_1$
$\vec{e}_2 \longmapsto \vec{e}_2$
$\vdots$
$\vec{e}_m \longmapsto \vec{e}_m$

} prvních m vektorů se zobrazí na sebe sama

$\vec{e}_{m+1} \longmapsto \vec{o}$
$\vdots$
$\vec{e}_n \longmapsto \vec{o}$

} dalších $n-m$ vektorů se zobrazí na nulový vektor

prvních m souřadnic vektoru $\vec{v}$ zachováme, další souřadnice budou tedy rovny 0

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \leftarrow m \text{ tý řádek}$$

g) Uvažujme následující zobrazení $\varphi: V \to V$, kde $\dim V = n$, mat. $= A$

$\psi: V \to V$, mat. $= B$

A složené zobrazení $\psi \circ \varphi: V \to V$

s maticí $\underline{B \cdot A = E}$: složením těchto zobrazení vzniklo identické zobrazení

(44)

Množina čtvercových matic s operací násobení, bez nulové matice vzhledem ke sčítání, není grupa. Proto nemůžeme ze rovnosti $B \cdot A = E$ za použití věty 4 z algebry 1 říci, že B je inverzí k A a A je inverzí k B. Inverzní matice k A ani k B totiž nemusí existovat.

Maximálně můžeme říci, že

(definice 24) Při $A \cdot B = E$ se matice A říká levá inverze matice B, matice B říká pravá inverze matice A vzhledem k násobení

Věta 19 a) maticový operátor A (tj. matice příslušející k lineárnímu zobrazení)
může mít více levých inverzí a žádnou pravou inverzi] příklady viz cvičení
více pravých inverzí a žádnou levou inverzi

b) jakmile P je nějaká levá inverze matice A } $\Rightarrow P = Q$ a žádná
Q je pravá inverze k matici A } další levá ani pravá inverze k A neexistuje

[Důkaz: ad a) viz cvičení

ad b) $P = P \cdot E = P \cdot (A \cdot Q) = (PA) \cdot Q = E \cdot Q = Q$

(vlastně tentýž důkaz jako u věty 2 v algebře 1)]

Def. 25 Pokud matice A lineárního zobrazení $V \to V$ je invertibilní (tj. existuje její jednoznačná levá i pravá inverze A^{-1}), lineární zobrazení zadané maticí A^{-1} se říká inverzní lineární zobrazení

Příklad 31 a) lineární zobrazení φ zadané maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ (matice ze př. 17)

zobrazí např. vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{y}$: $\vec{x} \xrightarrow{\varphi} \boxed{\vec{y} = A \cdot \vec{x}}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pak inverzní zobrazení φ^{-1} je zadáno inverzní maticí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & -3/2 & 3/4 \\ 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

která naopak zobrazí vektor $\vec{y}$ na vektor $\vec{x}$:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi^{-1}} \boxed{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}}, \text{ tj. } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & -3/2 & 3/4 \\ 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka: existuje tedy vztah mezi systémem lineárních rovnic s maticí A a lineárním zobrazením s maticí A:

Např. řešit systém rovnic (ad př. 19) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

znamená hledat vzor vektoru pravých stran $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k lineárnímu zobrazení φ zadanému touž maticí A:

zjistíme, že existuje jediný vzor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

který bychom našli též inverzním zobrazením φ^{-1}: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dále např. řešit systém rovnic (ad př. 20) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ znamená

hledat vzor vektoru pravých stran $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ vzhledem k lin. zob. φ zadanému maticí A:

V příkladu 20 jsme zjistili, že těchto vzorů je nekonečně mnoho $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-2p \\ 2+3p \\ 3+2p \\ 0+p \end{pmatrix}$

(takže ikdyž inverzní relace φ^{-1} není lineárním zobrazením, neexistuje matice, která ji reprezentuje

protože např. pro vzor (při φ^{-1}) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ existuje nekonečně mnoho

obrazů, lze symbolem $\varphi^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ označit celou nekonečnou množinu vzorů $\begin{pmatrix} -5-2p \\ 2+3p \\ 3+2p \\ 0+p \end{pmatrix}$

A nakonec, řešit systém rovnic (ad př. 22) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

znamená hledat vzor vektoru $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ vzhledem k zobrazení φ zadanému touž maticí.

Z př. 22 lze vidět, že žádný takto vzor neexistuje – to znamená, že $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im} f$.)

b) Ad př. 30, část (e): najděte matici inverzního pootočení roviny o úhel MINUS φ_0.

(viz cvičení)

Poslední šestice příkladů stránky dává inspiraci k následující definici:
(pro $\varphi : V \to V$ a vektor $\vec{v} \in S$ někdy $\varphi(\vec{v}) \in S$, jindy $\varphi(\vec{v}) \notin S$)

Definice 26. podprostor S vektorového prostoru V je invariantní podprostor vzhledem k lineárnímu zobrazení $\varphi : V \to V$, pokud $\boxed{\varphi(S) \subseteq S}$

vlastně jakási vlastnost uzavřenosti podprostoru S vzhledem k lineárnímu zobrazení φ: invariantní podprostor S vzhledem k φ je zobrazen do (nebo na) sebe sama.

Ad př. 30 ad b, c, d, každý podprostor S je invariantní vzhledem k nulovému zobrazení, identitě i podobnostnímu zobrazení

ad a) Prostor $\{\vec{0}\}$ a prostor V samotný jsou triviálními invariantními podprostory vzhledem k lineárnímu φ – ty existují vždy.

ad e) Vzhledem k pootočení o úhel φ_0 v rovině je pro $\varphi_0 \neq k\pi$ invariantním podprostorem jen ten triviální – $\{0\}$ nebo celý V. Pokud ovšem $\varphi_0 = k\pi$ (pootočení o násobek π), každá množina bodů na přímce je jednorozměrným invariantním podprostorem

ad f) u projekce $\mathbb{R}^n$ na podprostor prvních m souřadnic jsou invariantními podprostory (mimo jiné) například prostory $S_1 = \{\vec{v} \in L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)\}$

$$S_2 = \{\vec{w} \in L(\vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n)\}$$

(vektory ze S_1 se zobrazí na sebe sama: jedná se o vektory typu
$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m, 0, \dots, 0);$$
vektory ze S_2 se zobrazí na nulový vektor)

Př. 32 Důležitým příkladem zobrazení lineárního, jež budeme studovat na chvíli podrobněji, je tzv. diagonální zobrazení φ – to je takové lineární zobrazení $V \to V$, které můžeme zkonstruovat pro jakoukoli bázi $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ prostoru V:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_1 \mapsto \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \mapsto \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_n \mapsto \lambda_n \cdot \vec{u}_n \end{array}\right\}$$

každý vektor báze se zobrazí na nějaký svůj násobek; pak pro $\vec{v} \in L(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi} \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ \lambda_n v_n \end{pmatrix}$

zobrazení je zadáno maticí

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Zde libovolný podprostor S generovaný některými ze bázových vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ je invariantní vzhledem k tomuto diagonálnímu zobrazení φ.