Speciální roli hrají jednorozměrné invariantní podprostory vzhledem k lineárním zobrazení $\varphi: V \to V$ – tzv. invariantní směry

Definice 27. Invariantní směr, invariantní vektor = vlastní vektor lineárního $\varphi: V \to V$ s maticí A je takový nenulový vektor $\vec{v} \in V$, že

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\vec{v}) &= \lambda\cdot\vec{v} \\ A\cdot\vec{v} &= \lambda\cdot\vec{v} \end{aligned}\right\}$$ vektor $\vec{v}$ je zobrazen na svůj λ-násobek.

Reálné číslo λ v tomto vztahu je vlastní číslo odpovídající vlastnímu vektoru $\vec{v}$.

Poznámka: Označení vlastní směr je šťastné: pokud $\vec{v}$ je vlastní vektor, i jeho násobek $\alpha\cdot\vec{v}$ je vlastní vektor: $A\cdot\vec{v} = \lambda\cdot\vec{v} \Rightarrow A\cdot\alpha\cdot\vec{v} = \lambda\cdot\alpha\cdot\vec{v}$, tj. $\alpha\vec{v}$ se zobrazí na svůj λ-násobek.

Tedy nekonečné množství vektorů $\alpha\cdot\vec{v}$ je vlastních, tyto vektory se mezi sebou liší pouze násobkem, libovolné dva z nich jsou lineárně závislé. Mluvíme proto o jednom vlastním směru a pro daný invariantní směr vybereme jednoho reprezentanta, např. vektor o velikosti 1, vektor neobsahující mezi svými souřadnicemi zlomky, apod.

Ad př. 30 ad b) nulové zobrazení ... každý $\vec{v} \in V$ je vlastní vektor, příslušné vlastní číslo je 0

ad c) identické zobrazení ... — " — 1

ad d) podobnostní zobrazení — " — λ

ad e) rotace o úhel $\varphi_0 \neq k\pi$ nemá vlastní vektory

$\varphi_0 = 2k\pi$ ... každý $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ je vlastní, pro $\lambda = 1$

$\varphi_0 = (2k+1)\cdot\pi$ ... — " — $\lambda = -1$

ad f) projekce $\varphi: \mathbb{R}^n \to$ (podprostor $\mathbb{R}^n$ dimenze m):

Vektory $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou vlastní pro $\lambda = 1$

Vektory $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{m+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ jsou vlastní pro $\lambda = 0$

Ad př. 32 Ad diagonální zobrazení: vzhledem ke konstrukci $\varphi(\vec{u}_i) = \lambda_i\cdot\vec{u}_i$ je každý vektor báze $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ vlastním vektorem

Věta 20 a) pro matici zobrazení A s vlastními vektory $\vec{v}_1$ ... pro λ_1, $\vec{v}_2$ ... pro λ_2, ..., $\vec{v}_m$ pro λ_m a $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$ $\Rightarrow$ posloupnost vlastních vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ je lineárně nezávislá.

b) vlastní vektory $\vec{v}$ odpovídající jedné vlastní hodnotě λ tvoří vektorový podprostor.

[Dk. ad a) dokážeme indukcí: $m = 1$ ... $\vec{N}$ je lineárně nezávislý, protože je nenulový

indukční krok: (*) $\boxed{\text{tvrzení platí pro } m-1 \text{ vlastních vektorů matice } A}$ ⇒ tvrzení platí pro m vlastních vektorů matice A

předpokládejme sporem, že

(1) $\underbrace{\vec{N}_m}_{\text{nenulový}} = \underbrace{\alpha_1 \cdot \vec{N}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{N}_2 + \dots + \alpha_{m-1} \cdot \vec{N}_{m-1}}$ ⇒ některé $\alpha_i \neq 0$, BÚNO $\alpha_1 \neq 0$

vynásobme tuto rovnost maticí A a využijeme předpoklad pomocí $A\vec{N}_i = \lambda_i \vec{N}_i$:

(2) $\lambda_m \cdot \vec{N}_m = \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \vec{N}_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{N}_2 + \dots + \alpha_{m-1} \cdot \lambda_{m-1} \cdot \vec{N}_{m-1}$

Pokud od rovnice (2) odečteme λ_m-násobek rovnice (1), dostaneme $\vec{O} = \overset{\neq 0}{\alpha_1}(\lambda_1 - \lambda_m)\vec{N}_1 + \dots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot \vec{N}_{m-1}$

na základě indukčního předpokladu (*) musí být všechny koeficienty $= 0$, protože $\vec{N}_1, \dots, \vec{N}_{m-1}$ jsou nezávislé

$\lambda_1 = \lambda_m$ ... spor s tím, že všechny λ_i jsou různé

ad b) prostor vlastních vektorů pro jedno vlastní λ je uzavřený na lineární kombinace:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot \vec{N}_1 = \lambda \cdot \vec{N}_1 \\ A \cdot \vec{N}_2 = \lambda \cdot \vec{N}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A \cdot (\alpha_1 \vec{N}_1 + \alpha_2 \vec{N}_2)} = \alpha_1 \cdot \underbrace{A \cdot \vec{N}_1}_{\lambda \cdot \vec{N}_1} + \alpha_2 \cdot \underbrace{A \cdot \vec{N}_2}_{\lambda \cdot \vec{N}_2} = \lambda(\alpha_1 \vec{N}_1 + \alpha_2 \vec{N}_2)$$

⇓ $\alpha_1 \vec{N}_1 + \alpha_2 \vec{N}_2$ je vlastní v. pro tentýž λ]

Pozn.: Nalezení vlastních směrů a hodnot matice A (čtvercové)

reprezentuje zobrazení $\varphi: V \to V$

$$A \cdot \vec{N} = \lambda \cdot \vec{N} = \lambda \cdot E \cdot \vec{N}$$ (vložením jednotkové matice se výpočet nezmění)

$\boxed{(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{N} = \vec{O}}$ ... $\vec{N}$ leží v jádru zobrazení $A - \lambda E = \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot E)$

(v jádru vždy leží $\vec{N} = \vec{O}$, ale ten nás nezajímá, protože nulový vektor se nepovažuje za vlastní vektor; další vektory – tzv. vlastní – v jádru leží tehdy, když systém $(A - \lambda E) \cdot \vec{N} = \vec{O}$ má řešení nekonečně mnoho

postup: krok 1: řešíme $\det(A - \lambda E) = \vec{O}$ ... rovnice s neznámou λ, řešení vlastní čísla

krok 2: do systému $(A - \lambda E) \cdot \vec{N} = \vec{O}$ dosadíme konkrétní číslo λ a příslušné vlastní vektory nalezneme jako množinu řešení systému

Př. 33 Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lin. zobrazení $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ v bázi $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zadaného

(zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ... transformace roviny)

[řešení: krok 1: řešíme

$$\det |A-\lambda E| = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-8) = 0$$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 8$

krok 2: vlastní vektory pro $\lambda_1 = 2$: $(A - 2\cdot E)\cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 3 \\ 3 & 5-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{array}\right) \Uparrow \begin{array}{l} N_{11} = -t \\ N_{12} = t \end{array}$$

$\vec{N_1} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ... vlastní směr je určen jednoznačně, až na násobek

vlastní vektory pro $\lambda_2 = 8$:

$$(A - 8\cdot E)\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5-8 & 3 & 0 \\ 3 & 5-8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{-3} & \cancel{0} \end{array}\right) \Uparrow \begin{array}{l} N_{21} = t \\ N_{22} = t \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{N_2} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ... druhý vlastní směr, jakýkoli nenulový násobek vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$]

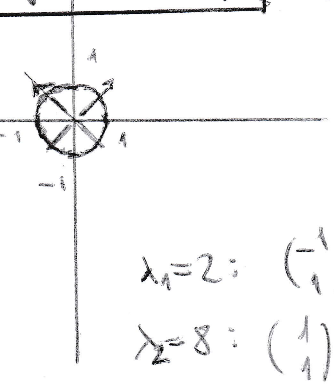
Geometrický význam lin. zobrazení z př. 33: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ v bázi $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

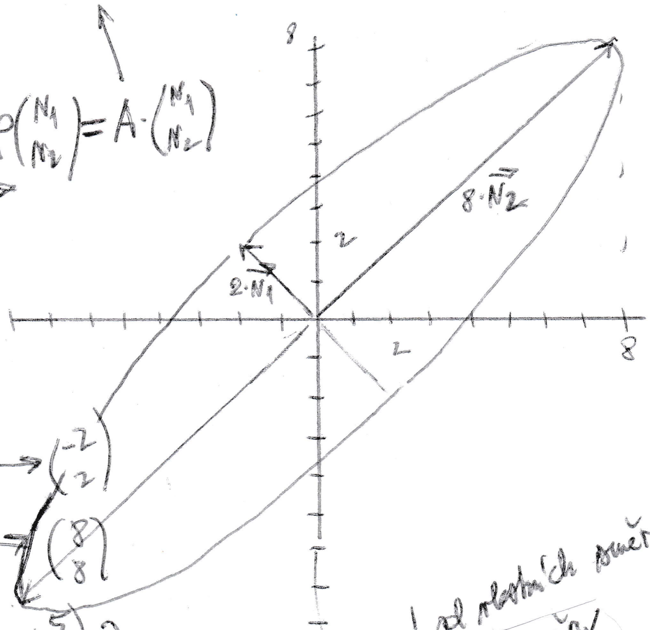
$$\boxed{\text{(v bázi } \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{N}_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\vec{N}_2} \text{ by matice zobrazení } \varphi \text{ byla diagonální } A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ s vlastními čísly na diagonále)}}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

ale POZOR: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_N$





$\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 8$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

zobrazení báze: $\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \to$ vektory různé od vlastních směrů se zobrazí na jiné směry a změní i svou délku

vlastní vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se zobrazí na svůj dvojnásobek

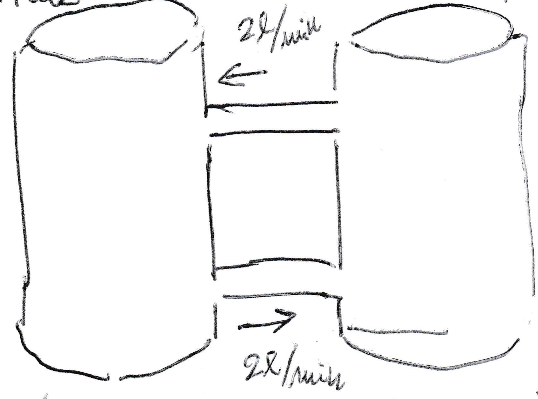
vlastní vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se zobrazí na svůj osminásobek

body na jednotkové kružnici $x^2 + y^2 = 1$ se zobrazí na body na elipse s poloosami délek 2 a 8

(najít vlastní čísla a směry tedy vedlo ke zjištění geometrických vlastností zobrazení φ)

Př. 34 Model míchání hnojiva: v 1. nádrži je 100 l čisté vody, ve 2. nádrži je ve 100 l vody rozpuštěno 150 jednotek hnojiva. Obě nádrže jsou navzájem propojeny (2 l/min tok, 2 l/min odtok) – promícháváme je, voda mezi nádržemi cirkuluje

N_1: čistá voda $\qquad N_2$: voda s hnojivem



$y_1(0)=0 \qquad y_2(0)=150$ jednotek

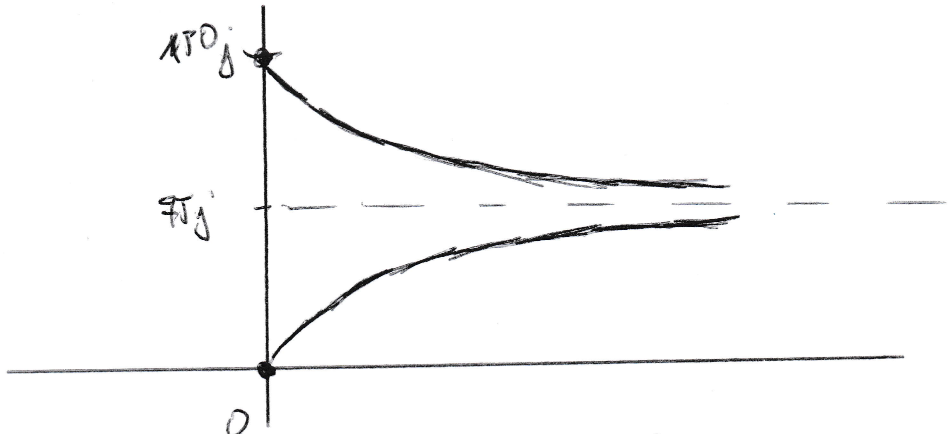
označme:

$y_1(t)$ ... množství hnojiva v nádrži 1 v čase t

$y_2(t)$ ... množství hnojiva v nádrži 2 v čase t

→ najděte neznámé funkce $y_1(t), y_2(t)$ modelující množství hnojiva v závislosti na čase

Dovedeme si asi představit grafy těchto funkcí: ale nalezneme i vzorce těchto průběhů



[Řešení: nárůst hnojiva 1 = přítok/min MINUS odtok/min

nárůst hnojiva 2 = přítok/min MINUS odtok/min

---

derivace modeluje rychlost změny veličiny = nárůst veličiny:

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= \frac{2}{100}\cdot y_2(t) - \frac{2}{100}\cdot y_1(t) \\ y_2'(t) &= \frac{2}{100}\cdot y_1(t) - \frac{2}{100}\cdot y_2(t) \end{aligned}\right]$$

→ přepíšeme, aby ve sloupcích byly stejné neznámé:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= -0{,}02\cdot y_1 + 0{,}02\cdot y_2 \\ y_2' &= 0{,}02\cdot y_1 - 0{,}02\cdot y_2 \end{aligned}}$$

budeme řešit tento systém diferenciálních rovnic 1. řádu:

Přepíšeme si tento systém maticově:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

a využijeme metodu vlastních čísel matice A krok 1: řešíme rovnici $\det(A-\lambda E)=0$

$$\det\begin{pmatrix}-0{,}02-\lambda & 0{,}02\\ 0{,}02 & -0{,}02-\lambda\end{pmatrix}=0$$

$$0{,}0004+0{,}04\cdot\lambda+\lambda^2-0{,}0004=0$$

$$\lambda(\lambda+0{,}04)=0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1=0}},\ \underline{\underline{\lambda_2=-0{,}04}}$$

krok 2: najdeme pro daná vlastní čísla jejich vlastní vektory:

$\lambda_1=0$: řešíme systém $(A-0\cdot E)\cdot\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}-0{,}02 & 0{,}02 & 0\\ \cancel{0{,}02} & \cancel{-0{,}02} & \cancel{0}\end{array}\right) \Rightarrow N_{12}=t \nearrow N_{11}=t$$

$$\underline{\underline{\vec{N}_1=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}}$$

pro $\lambda_1=0$

$\lambda_2=-0{,}04$: řešíme systém $(A+0{,}04\cdot E)\cdot\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}0{,}02 & 0{,}02 & 0\\ \cancel{0{,}02} & \cancel{0{,}02} & \cancel{0}\end{array}\right) \Rightarrow N_{22}=t \nearrow N_{21}=-t$$

$$\underline{\underline{\vec{N}_2=t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}}$$

pro $\lambda_2=-0{,}04$

Závěr: obecné řešení daného systému diferenciálních rovnic je dáno tvarem

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=c_1\cdot e^{\lambda_1\cdot t}\cdot\begin{pmatrix}N_{11}\\N_{12}\end{pmatrix}+c_2\cdot e^{\lambda_2\cdot t}\cdot\begin{pmatrix}N_{21}\\N_{22}\end{pmatrix}$$, pro $c_1,c_2\in R$

tedy po dosazení $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=c_1\cdot e^{0\cdot t}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\cdot e^{-0{,}04\cdot t}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1-c_2\cdot e^{-0{,}04t}\\ c_1+c_2\cdot e^{-0{,}04t}\end{pmatrix}$

Konstanty c_1,c_2 máme ze počátečních podmínek:

$$\left.\begin{array}{ll}y_1(0)=0: & c_1-c_2\cdot e^{0\cdot t}=0\\ y_2(0)=150: & c_1+c_2\cdot e^{-0{,}04\cdot 0}=150\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}c_1-c_2=0\\ c_1+c_2=150\\ \hline c_1=75 \Rightarrow c_2=75\end{array}$$

řešením naší úlohy jsou tedy funkce

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}75-75\cdot e^{-0{,}04t}\\ 75+75\cdot e^{-0{,}04t}\end{pmatrix}}}$$

Vidíme tedy, že vlastní čísla a vlastní vektory se používají v různých úlohách souvisejících s maticemi.