Kapitola 6: Skalární a vektorový součin a spol.

Nejdůležitějším pojmem tohoto semestru je pojem zobrazení

a) už při definici vektorového prostoru se objevuje násobení (skalár KRÁT vektor), což je zobrazení $T \times V \to V$ s jistými třemi dalšími vlastnostmi (toto zobrazení bychom mohli nazvat jako akce tělesa T na množině V).

b) Každá reálná matice A typu m/n představuje lineární zobrazení $\varphi: V \to W$, kde $\dim V = n$, $\dim W = m$; toto zobrazení splňuje tzv. podmínku linearity

$$\varphi(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v})$$

c) Na determinant $\det(A)$ se lze dívat jako na zobrazení $\det: V^n \to R$, které přiřazuje n řádkům matice A reálné číslo $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$.

- zobrazení, které přiřazuje n vektorům číslo, $\equiv$ forma
- platí D2: $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_l, \dots, \vec{a}_n) = -\det(\dots, \vec{a}_l, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n)$

  záměna pořadí dvou vektorů změní znaménko obrazu

  Této vlastnosti říkáme, že forma je antisymetrická
- platí D3: každá souřadnice zobrazení det splňuje podmínku linearity:

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \alpha\vec{u} + \beta\cdot\vec{v}, \dots, \vec{a}_n) = \alpha \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{a}_n) + \beta \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{a}_n)$$

říkáme, že forma det je multilineární = lineární v každé složce

celkem $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n): V^n \to R$ je antisymetrická multilineární forma

d) v této kapitole se budeme zabývat dvěma dalšími typy zobrazení; prvním z nich je skalární součin, zobrazení $V^2 \to R$, které přiřazuje dvěma vektorům skalár a splňuje jisté vlastnosti

Definice 31 Pozitivně definitní symetrická bilineární forma $V^2 \to R$ $\equiv$ skalární součin

a) $\text{skal}(\vec{u}, \vec{u}) > 0 \quad \forall \vec{u} \in V: \vec{u} \neq \vec{o}$ ... pozitivně definitní forma

b) $\text{skal}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{skal}(\vec{v}, \vec{u})$ ... symetrická forma

(záměna vektorů nezmění obraz, tj. výsledek součinu)

c) splňuje podmínku linearity v každé složce

(multilineární pro $n=2$ $\equiv$ bilineární)

bilineární forma ... →

$$\text{skal}(\alpha\cdot\vec{u} + \beta\cdot\vec{v}, \vec{w}) = \alpha\cdot\text{skal}(\vec{u}, \vec{w}) + \beta\cdot\text{skal}(\vec{v}, \vec{w})$$

$$\text{skal}(\vec{u}, \alpha\cdot\vec{v} + \beta\cdot\vec{w}) = \alpha\cdot\text{skal}(\vec{u}, \vec{v}) + \beta\cdot\text{skal}(\vec{u}, \vec{w})$$

linearita vzhledem ke druhé složce už plyne ze symetrie a z linearity v první složce, takže by se nemusela v definici uvádět

Příklad 38. Některé příklady vektorových prostorů a skalárního součinu vektorů:

a) $V = C\langle a,b\rangle$ ... prostor reálných spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$

Pro $f(x), g(x) \in C\langle a;b\rangle$ lze definovat $skal(f(x),g(x)) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$

integrál je lineární operátor: $\int_a^b (\alpha\cdot f_1(x)+\beta\cdot f_2(x))\cdot g(x)\,dx = \alpha\cdot\int_a^b f_1(x)g(x)\,dx + \beta\cdot\int_a^b f_2(x)\cdot g(x)\,dx$

také symetrie je zaručena:

$$skal(f(x),g(x)) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\cdot f(x)\,dx = skal(g(x),f(x))$$

a pozitivní definitnost také:

$$skal(f(x),f(x)) = \int_a^b f^2(x)\,dx > 0 \quad \text{pro } f(x) \text{ různou od konstanty } 0$$

b) v R^3 je skalární součin vektorů definován standardně

$$skal(\vec{u},\vec{v}) = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

tato bilineární forma opět splňuje všechny tři vlastnosti
- pozitivní definitnost
- symetrii
- linearitu v každé složce

Skalární tento součin lze zadat i vektorově/maticově:

$$skal(\vec{u},\vec{v}) = (u_1\ u_2\ u_3)\cdot\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = (u_1\ u_2\ u_3)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

jednotková matice vynásobením nic nezmění

c) Matice E v příkladu (b) by mohla být nahrazena libovolnou symetrickou maticí A, jejíž všechny hlavní minory jsou kladné: $a_{11}>0$, $\det\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0$, $\det\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0, \dots, \det A>0$

$$skal(\vec{u},\vec{v}) = (u_1,u_2,\dots,u_n)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$$

Definice 32. Čtvercová matice A je

a) symetrická, pokud $a_{ij}=a_{ji}$ (prvky souměrné vzhledem ke hlavní diagonále jsou stejné, tj. platí $A = A^T$)

b) antisymetrická, pokud $a_{ij} = -a_{ji}$ (prvky souměrné vzhledem k hlavní diagonále se liší o znaménko)

tj. klasicky definovaný skal. součin (b) není jediná možnost, (c) naznačuje i další možnosti.

Definice 33. Prostor $(V,+,\circ)$, na kterém je definován skalární součin, ||| Euklidovský vektorový prostor

Definice 34. Pokud $(V,+,\cdot)$ je Euklidovský vektorový prostor (= vektorový prostor se skalárním součinem), $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k)$ posloupnost vektorů. **Grammova matice** je matice všech vzájemných skalárních součinů

$$G(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k)=\left(\mathrm{skal}(\vec{u}_i,\vec{u}_j)\right)_{k\times k}=\begin{pmatrix}\mathrm{skal}(\vec{u}_1,\vec{u}_1) & \mathrm{skal}(\vec{u}_1,\vec{u}_2) & \dots & \mathrm{skal}(\vec{u}_1,\vec{u}_k)\\ \mathrm{skal}(\vec{u}_2,\vec{u}_1) & \mathrm{skal}(\vec{u}_2,\vec{u}_2) & \dots & \mathrm{skal}(\vec{u}_2,\vec{u}_k)\\ \vdots & & & \\ \mathrm{skal}(\vec{u}_k,\vec{u}_1) & \mathrm{skal}(\vec{u}_k,\vec{u}_2) & \dots & \mathrm{skal}(\vec{u}_k,\vec{u}_k)\end{pmatrix}$$

Grammův determinant $\det G(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k)$ je determinant z Grammovy matice

Definice 35. Čtvercová matice A řádu n je (kladně) **pozitivně definitní**, když $\forall\, \vec{x}\in\mathbb{R}^n$ kromě nulového vektoru $(\vec{x}\neq\vec{0})$ platí

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}>0$$

Věta 23. Symetrická (čtvercová) matice A je pozitivně definitní $\Longleftrightarrow$ všechny její hlavní minory jsou kladné: $a_{11}>0$, $\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}>0$, $\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}>0$, $\dots$, $\det A>0$.

[Dk.: např. Schilow, str. 209]

Věta 24 (Zlatoš, str. 255): V Euklidovském vektorovém prostoru: Vektory $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k$ jsou lineárně nezávislé $\Longleftrightarrow$ jejich Grammova matice je pozitivně (= kladně) definitní.

[Dk.: "$\Rightarrow$" vektory $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_k$ jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow$ tvoří bázi vektorového podprostoru $S:=L(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_k)$. Tento podprostor je vektorový prostor se skalárním součinem, který se „sveze" z většího prostoru (žádnou „zvrácenost na výsledek" nemusíme řešit, protože skalární součin přiřazuje vektorům reálné číslo).

Pak Grammova matice $G(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k)$ je maticí tohoto skalárního součinu $\mathrm{skal}(\vec{u},\vec{v})$ na podprostoru $L(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_k)$ vzhledem k bázi $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_k$, tj. platí

$$\mathrm{skal}(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,\dots,x_k)\begin{pmatrix}\mathrm{skal}(\vec{u}_1,\vec{u}_1) & \mathrm{skal}(\vec{u}_1,\vec{u}_2) & \dots & \mathrm{skal}(\vec{u}_1,\vec{u}_k)\\ \mathrm{skal}(\vec{u}_2,\vec{u}_1) & \mathrm{skal}(\vec{u}_2,\vec{u}_2) & \dots & \mathrm{skal}(\vec{u}_2,\vec{u}_k)\\ \vdots & & & \\ \mathrm{skal}(\vec{u}_k,\vec{u}_1) & \mathrm{skal}(\vec{u}_k,\vec{u}_2) & \dots & \mathrm{skal}(\vec{u}_k,\vec{u}_k)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_k\end{pmatrix}$$

Protože skalární součin je bilineární forma pozitivně definitní, je matice $G(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k)$, která jej realizuje, také pozitivně definitní.

"$\Leftarrow$" sporem: $G(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k)$ je pozitivně definitní a vektory $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_k$ jsou lineárně závislé.

Pak v $\mathbb{R}^k$ $\exists$ konstanty $(c_1,\dots,c_k)$, které nejsou všechny rovny nule, že

$$\vec{v}=c_1\vec{u}_1+c_2\vec{u}_2+\dots+c_k\vec{u}_k=\vec{0}$$ (kombinací závislých vektorů vznikne nulový řádek).

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_k\end{pmatrix}_{u}$$

Pak tedy vektor $\vec{c}=(c_1,c_2,\dots,c_k)$ není roven nulovému vektoru a platí

$$\mathrm{skal}(\vec{v},\vec{v})=(c_1,c_2,\dots,c_k)\cdot G\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_k\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}c_i\cdot c_j\cdot\mathrm{skal}(\vec{u}_i,\vec{u}_j)=0$$

víme, že výsledek $\mathrm{skal}(\vec{0},\vec{0})=0$

... spor s tím, že $\vec{c}\neq\vec{0}$, tj. s tím, že G je pozitivně definitní.]

Věta 25 (Zlatoš, str. 255, 13.2.1.a)) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ jsou libovolné vektory v Euklidovském prostoru.
Pak Grammova matice $G(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ je semidefinitní symetrická matice, tj.

$\forall \vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$: $$(c_1, c_2, \ldots, c_k) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \geq 0$$

[Dk.: symetrie matice G plyne ze symetrie bilineární formy skal. Dokažme ještě nezápornost = semidefinitnost:

vezměme libovolný vektor $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{u}_1 + c_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + c_k \cdot \vec{u}_k \in L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$.

Pak $$\underbrace{skal(\vec{v}, \vec{v})}_{\geq 0} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i \cdot c_j \cdot skal(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \geq 0$$

bilinearita: vytkneme c_i před skalární součin
c_j před skalární součin

kladná definitnost
operace $skal(\vec{v}, \vec{v})$]

Důsledek vět 24, 25: $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in V$: $\det(G(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)) \geq 0$ (= 0 právě tehdy, když $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ jsou závislé lineárně)

$\Downarrow$ pro $k=2$

Věta 26 (Schwarzova nerovnost) pro $\vec{u}, \vec{v} \in V$, který je Euklidovský (= se skalárním součinem), platí

$$\det \begin{vmatrix} skal(\vec{u}, \vec{u}) & skal(\vec{u}, \vec{v}) \\ skal(\vec{v}, \vec{u}) & skal(\vec{v}, \vec{v}) \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\boxed{skal(\vec{u}, \vec{u}) \cdot skal(\vec{v}, \vec{v}) - skal^2(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0}$$

Definice 36: Norma vektoru $\vec{v}$ na Euklidovském prostoru $\|\vec{v}\| := \sqrt{skal(\vec{v}, \vec{v})}$
= velikost

pomocí pojmu norma vektoru

$$\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - skal^2(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$$

$$\boxed{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \geq |skal(\vec{u}, \vec{v})|}$$ absolutní hodnota; přičemž „=" nastane pro závislé vektory

Pozn.: Na pojmech skalární součin dvou vektorů, a velikost jednoho vektoru je krásné to, že vypočtené reálné číslo nezávisí na bázi zvolené pro skalární součin (tj. pro Grammovu matici).
Tj. tyto pojmy jsou příkladem tzv. invariantů neboli veličin, které nezávisí na volbě báze.

Věta 27 (vlastnosti normy vektoru = velikosti vektoru) pro $\|\vec{v}\|$ na Euklidovském vektorovém prostoru platí

a) $\|\vec{u}\| \geq 0$, přičemž $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}$ (pozitivní definitnost)

b) $\|\alpha \cdot \vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$ … (homogenita)

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ … (trojúhelníková nerovnost)

d) pro $\vec{u} \neq \vec{o}$ lze vektor $\vec{u}$ tzv. normovat = prodloužit či zkrátit na velikost 1: $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$

Ze Schwarzovy nerovnosti lze definovat odchylku vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

$$|skal(\vec{u}, \vec{v})| \le \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\frac{|skal(\vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \le 1$$

$$-1 \le \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \le 1$$

Definice 37. Pro nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ z Euklidovského prostoru lze definovat jednoznačně odchylku φ vztahem

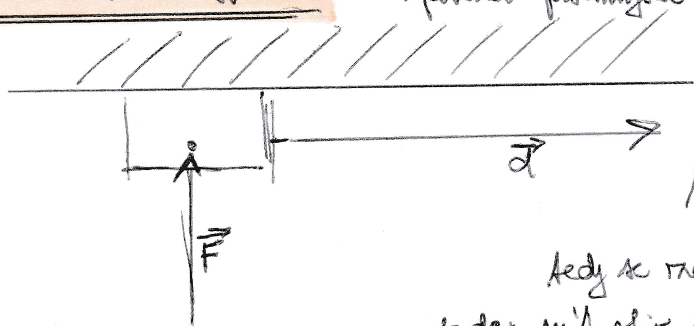
$$\cos\varphi = \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Pro hodnotu zlomku z intervalu $\langle -1; 1 \rangle$ proběhne úhel φ interval $\langle 0; \pi \rangle$ jednoznačně, tj. na $\langle 0; \pi \rangle$ existuje právě jedno φ splňující daný vztah.

Pozn.: Ze vztahu v def. 37, známe-li odchylku, můžeme vyjádřit hodnotu skalárního součinu dvou vektorů:

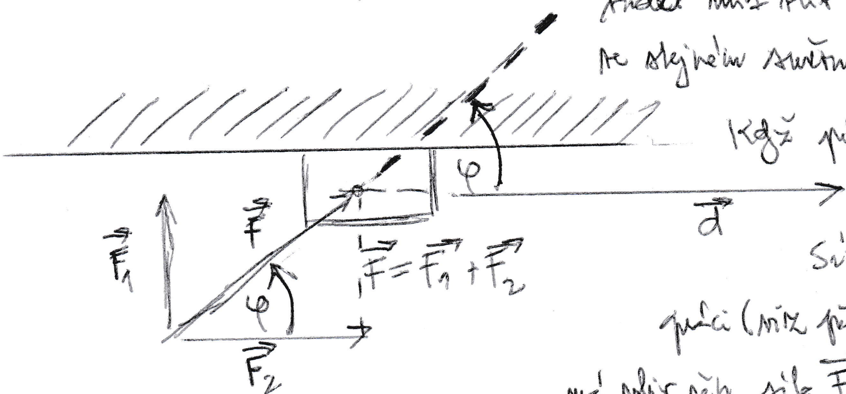
$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$$

Fyzikální význam skalárního součinu: pokud posunujeme skříň do vzdálenosti a směru $\vec{d}$ a tlačíme na ni kolmo na směr posunutí, nevykonáme žádnou práci, tj. $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 0$;



tedy se zdá, že na práci vykonanou ve směru $\vec{d}$ bude mít vliv ta část síly $\vec{F}$, která bude působit ve stejném směru jako $\vec{d}$.

Když působíme na skříň v šikmém směru, sílu $\vec{F}$ lze rozložit na součet sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Síla $\vec{F}_1$ nevykoná ve směru $\vec{d}$ žádnou práci (viz předchozí obrázek); na práci ve směru $\vec{d}$ má vliv jen síla $\vec{F}_2$. Z toho plyne pravidlo, že skalární součin vyjadřuje míru vlivu vektoru $\vec{F}$ ve směru $\vec{d}$ (míra vlivu $\vec{F}$ je vyjádřena průmětem kolmým $\vec{F}$ do směru $\vec{d}$)



$$\|\vec{F}_2\| = \|\vec{F}\| \cdot \cos\varphi$$

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos\varphi} = \|\vec{d}\| \cdot \underbrace{\|\vec{F}\| \cdot \cos\varphi}_{\text{ta část vektoru } \vec{F}\text{, která je platná ve stejném směru jako } \vec{d}} = \|\vec{d}\| \cdot \|\vec{F}_2\|$$

práce vykonaná při posunutí ve směru a délce $\vec{d}$ působením síly $\vec{F}$ je rovna skalárnímu součinu $\vec{d} \cdot \vec{F}$

(při skalárním součinu sestrojujeme průmět kolmý jednoho vektoru do směru druhého vektoru)

geom. význam: obsah obdélníka o stranách $\|\vec{d}\|$ a $(\|\vec{F}\| \cdot \cos\varphi)$