Na předchozí straně byla řeč o kolmém průmětu – musíme se tedy chvíli věnovat pojmu kolmost.

Def. 38 Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ v Euklidovském prostoru jsou ortogonální, když $\text{skal}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Pozn.: Někdy se zaměňují pojmy ortogonalita a kolmost. Kolmost definujeme v $\mathbb{R}^n$ pro vektory $\vec{u}, \vec{v}$, které jsou nenulové. Ortogonalita připouští, aby některý z vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (nebo oba) byl nulový, je to tedy obecnější pojem než kolmost.

Často při práci s bázemi vektorových podprostorů je výhodné, aby byly v nich vektory, které jsou navzájem ortogonální.

Def. 39 Báze podprostoru, nebo libovolná posloupnost nenulových vektorů je

a) ortogonální, jestliže každé dva vektory z této posloupnosti jsou ortogonální

b) ortonormální, jestliže je ortogonální a velikost všech vektorů je normovaná (=1).

Pozn.: Grammova matice ortogonální matice je diagonální, grammova matice ortonormální matice je jednotková.

Pokud už máme ortogonální matici, lze definovat i ortogonální matici a ortogonální zobrazení. Ortogonální zobrazení pak bude přirozeně reprezentovat ortogonální matici.

Def. 40 Čtvercová matice A je ortogonální, jestliže její sloupce jsou navzájem ortogonální.

Lineární zobrazení $\varphi: V \to W$ je ortogonální zobrazení, jestliže zachovává výsledek skalárního součinu, tj.

$$\text{skal}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{skal}(\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})).$$

Pozn.: Protože norma vektoru se definuje pomocí skalárního součinu, ortogonální zobrazení zachovává i normu ~~=~~ velikost vektorů. Tedy ortogonální zobrazení zachovává i odchylky vektorů, protože odchylka se definuje pomocí skalárního součinu a normy.

Dříve než se pustíme do dalších věcí, dokončíme nyní zkoumání vlastních čísel a vlastních vektorů vzhledem k ortogonalitě (teorie + následující příklad viz Kovár, str. 122–128):

Vraťme se k situaci nějaké: lineární transformace $\varphi: V \to V$ zadané maticí A;

$$\begin{tikzcd}
\text{báze } e \arrow[d, "\text{přechod mezi bázemi}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "P^{-1}", "\text{přepočet souřadnic vektorů}"'] & \text{báze } e \\
\text{báze } e' & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "P"', "\text{převod vektorů}"] \arrow[r] & \mathbb{R}^3 & \text{báze } e' \arrow[u, "\text{přechod mezi bázemi}"']
\end{tikzcd}$$

$$B := P^{-1} \cdot A \cdot P$$

(A, B … podobné matice = matice stejné lineární transformace v různých bázích)

Bez důkazu uvedeme několik vět a jeden příklad, ke kterému směřujeme.

Věta 27. Podobné matice A, B ($B = P^{-1}\cdot A\cdot P$) mají stejné vlastní hodnoty.

Tj. vlastní hodnoty lineární transformace jsou invariantní – nemění se se změnou báze.

Věta 28. Reálná čtvercová symetrická matice má právě n navzájem různých vlastních hodnot a vlastní vektory příslušející různým vlastním hodnotám jsou navzájem ortogonální.

A vrcholem bude následující věta, která ve svém tvrzení uvádí i návod na řešení následujícího příkladu.

Věta 29. Pro každou symetrickou reálnou matici A, která reprezentuje lineární transformaci $\varphi: V \to V$ existuje ortonormální báze složená ze vlastních vektorů matice A, ve které má transformace φ diagonální matici D složenou ze vlastních čísel na své hlavní diagonále.

Navíc matice přechodu H je ortogonální a její inverzi získáme pouhým transponováním $H^{-1} = H^T$

$$\boxed{D = H^T\cdot A\cdot H}$$

Př. 39 Najděte diagonální reprezentaci D lineární transformace $\varphi: R^3 \to R^3$ zadané symetrickou maticí $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Naleznete také ortonormální bázi, vzhledem k níž je φ diagonální, a ověřte, že platí $D = H^T\cdot A\cdot H$

Řešení: • matice D se skládá ze vlastních čísel, která najdeme nejdříve:

$$\det(A - \lambda\cdot E) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)\cdot(\lambda^2+2\lambda) + 4(\lambda+2) = 0$$

$$(\lambda+2)(3\lambda-\lambda^2+4) = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

• najdeme dále příslušné vlastní vektory, ze kterých složíme ortonormální bázi a matici H

$\lambda_1 = -2$: řešíme SLR $(A-(-2)\cdot E)\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to v_1 = 0 \\ \to v_2 \dots \text{libovolné} \\ \to v_3 = 0 \end{array}$$

vlastní směr: $t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: řešíme SLR $(A-(-1)\cdot E)\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2\cdot r_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to v_1 = 2t \\ \to v_2 = 0 \\ \to v_3 \dots \text{libovolné} = t \end{array}$$

$\Rightarrow$ vlastní směr: $t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ normujeme:

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$ … vektor o velikosti 1

$\lambda_3 = 4$: $\quad (A-4\cdot E)\cdot\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$: $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0\\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0}\end{array}\right)$ $\to v_{33}=t \Rightarrow v_{31} = -\frac{t}{2}$, $\quad \to v_{32}=0$

$\Rightarrow$ vlastní směr: $1\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$, vektor $\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$ normujeme: $\left\|\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt5}{2}$

$\Rightarrow \vec{v_3} = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt5\\0\\2/\sqrt5\end{pmatrix}$

- sestavení:

$$\underline{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad\qquad \underline{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} R^3 \arrow[rr, "A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&3\end{pmatrix}"] & & R^3 \arrow[d, "H^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ 2/\sqrt5&0&1/\sqrt5\\ -1/\sqrt5&0&2/\sqrt5\end{pmatrix}"] \\ R^3 \arrow[u, "H=\begin{pmatrix}0&2/\sqrt5&-1/\sqrt5\\1&0&0\\0&1/\sqrt5&2/\sqrt5\end{pmatrix}"] \arrow[rr] & & R^3 \end{tikzcd}$$

$$\underline{e}' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/\sqrt5\\0\\1/\sqrt5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt5\\0\\2/\sqrt5\end{pmatrix} \qquad\qquad \underline{e}' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/\sqrt5\\0\\1/\sqrt5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt5\\0\\2/\sqrt5\end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{pmatrix} = H^T\cdot A\cdot H$$

na diagonále matice D jsou vlastní čísla λ_i ve stejném pořadí, v jakém jsme dali do báze $\underline{e}'$ jejich normované vlastní vektory

Proč platí $H^{-1}=H^T$? $\quad H^T\cdot H = (\vec{v_i}\cdot\vec{v_j})_{i,j=1,2,3}$ a protože $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ jsou navzájem ortogonální a přitom jejich velikost $=1$,

máme pro $i\neq j$: $\quad$ skal$(\vec{v_i},\vec{v_j})=0$

pro $i=j$: $\quad$ skal$(\vec{v_i},\vec{v_i}) = \|\vec{v_i}\|^2 = 1^2 = 1$ $\quad\Big\}$ dostáváme $H^T\cdot H = E$ (z jednoznačnosti inverze u regulární matice (algebra 1 – větička 4) dostaneme, že $H^{-1}=H^T$)

Poznámka: Ne každé lineární zobrazení $V\to V$ je diagonalizovatelné; uvedeným postupem dokážeme najít D, pokud A je symetrická. Pro některé další matice diagonální podobná matice neexistuje (to, co vždy existuje, je tzv. kanonická matice v Jordanově tvaru – viz předmět „analytická geometrie" v 5. semestru)

Poznámka: Pojďme nyní k úloze nalezení ortonormální/ortogonální báze jistého vektorového podprostoru, když je máme zadánu jeho báze $\vec{u_1},\vec{u_2},\dots,\vec{u_k}$, která ortogonální není. Obecně následující věta platí i pro vektory lineárně závislé – její důkaz je konstruktivní a bude vysvětlen na příkladu.

Věta 30 (Grammův – Schmidtův ortogonalizační proces)

Když $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou libovolné vektory euklidovského prostoru $\Rightarrow$ existují po dvou ortogonální vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$: $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$

(které generují tentýž vektorový podprostor, jako zadané vektory)

[Dk.: viz násled. příklad]

Př. 40 Nalezněte ortogonální bázi podprostoru $U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[řešení: mohli bychom nejprve vyřadit některý ze vektorů, pokud je závislý na těch ostatních; když se tomu vyhneme, podívejme se na to, jak si s tím následující algoritmus poradí:

a) $\vec{e}_1 := \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ... první ze konstruovaných vektorů necháme stejný

b) hledáme $\vec{e}_2 := p_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2 \;/\cdot \vec{e}_1$ (musíme určit neznámou konstantu p_1)

využijeme ortogonality $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $\mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$

$$0 = p_1 \cdot \mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{u}_2) \Rightarrow \text{vypočteme } p_1 = \frac{-\mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{u}_2)}{\mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

dosadíme

našli jsme tedy vektor $\vec{e}_2 = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

c) hledáme $\vec{e}_3 := p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3 \;/\cdot \vec{e}_1, \cdot \vec{e}_2$ (musíme určit neznámé konstanty p_1, p_2; využijeme definiční rovnici už zkonstruovaných vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — $\vec{e}_3$ sice neznáme, ale protože $\mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0$, $\mathrm{skal}(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$, tak $\vec{e}_3$ z rovnic vypadne a dostaneme 2 rovnice pro 2 neznámé konstanty p_1, p_2)

$$0 = p_1 \cdot \mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + p_2 \cdot \overbrace{\mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}^{0} + \mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{u}_3)$$
$$0 = p_1 \cdot \underbrace{\mathrm{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{0} + p_2 \cdot \mathrm{skal}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + \mathrm{skal}(\vec{e}_2, \vec{u}_3)$$

$$0 = p_1 \cdot 6 + 2 \Rightarrow p_1 = -\frac{1}{3}$$
$$0 = p_2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \Rightarrow p_2 = 1$$

$\Rightarrow$ našli jsme vektor $\vec{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pokud jsme nevyloučili $\vec{u}_3$ závislý na vektorech $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, tak Grammův–Schmidtův proces najde $\vec{e}_3 = \vec{o}$, a ten do báze pak nebereme, i když je ortogonální k $\vec{e}_1$ i k $\vec{e}_2$.

Odpověď: $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ má bázi ortogonální: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$]

(atd., při větším počtu vektorů hledáme

$e_4 := p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + p_3 \cdot \vec{e}_3 + \vec{u}_4 \;/ \cdot \vec{e}_1 \dots, \cdot \vec{e}_2 \dots, \cdot \vec{e}_3 \dots$ dostaneme tři rovnice pro tři neznámé p_1, p_2, p_3)

U ortogonality nemusíme uvažovat jen dva vektory, ale i dvě množiny vektorů:

Definice 41. Množiny vektorů A, B jsou ortogonální, když $\forall \vec{a} \in A, \vec{b} \in B$: vektory $\vec{a}, \vec{b}$ jsou ortogonální
(označení: $A \perp B$)

Z linearity skalárního součinu plyne, že množiny A, B jsou ortogonální právě tehdy, když jsou ortogonální i vektorové podprostory $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ jimi generované. Proto má smysl následující definice:

Definice 42. Když U je vektorový podprostor euklidovského prostoru V, tak ortogonální doplněk $U^\perp$ podprostoru U ve prostoru V se definuje jako množina všech vektorů ortogonálních k U:

$$U^\perp = \{\vec{x} \in V : \text{skal}(\vec{x}, \vec{u}) = 0 \ \forall \vec{u} \in U\}.$$

Věta 31
a) ortogonální doplněk $U^\perp$ je vektorový podprostor
b) $V = U \dotplus U^\perp$ (tzv. přímý součet, tj. $U \cap U^\perp = \{\vec{o}\}$, $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$)
c) $(U^\perp)^\perp = U$
d) $(U+S)^\perp = U^\perp \cap S^\perp$
e) $(U \cap S)^\perp = U^\perp + S^\perp$

$\Big\}$ jakási analogie de Morganových pravidel (viz Základy, kap. 4) pro vektorové podprostory U, S euklidovského prostoru V

Př. 41 (Horák sbírka, str. 31): V $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor $U = \left\langle \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Najděte ortonormální bázi podprostoru $U^\perp$

I řešení: nejprve ze vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ eventuálně vyloučíme vektor závislý na těch ostatních; pokud bychom na to zapomněli, algoritmus si s tím stejně poradí:

pro $\vec{x} \in U^\perp$ platí:
$$\left.\begin{array}{l} \text{skal}(\vec{x}, \vec{u}_1) = 0 \\ \text{skal}(\vec{x}, \vec{u}_2) = 0 \\ \text{skal}(\vec{x}, \vec{u}_3) = 0 \end{array}\right] \text{ to je SLR } \begin{array}{ll} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 &) - r_1 \sim \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 &) - 2 \cdot r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ | \cdot \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = s - 2t \\ x_2 = 2t - 2s \\ \text{volíme } x_3 = s \\ x_4 = t \end{array}$$

tedy řešením SLR jsme našli vektory z $U^\perp$: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ... lineární kombinace bázických vektorů; zortogonalizujeme Gr.-Schm. procesem:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 := p_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \cdot \vec{e}_1$$

$$0 = 6p_1 - 6 \Rightarrow p_1 = 1 \Rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektory znormalizujeme: $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$]