Př. 42 (Horák sbírka, př. 6.2.B.15) Nalezněte bázi podprostoru $W^\perp$, je-li W jako podprostor řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} 3x_1+3x_2+2x_3+7x_4&=0\\ 3x_1\qquad\;\, -2x_3-9x_4&=0\\ x_3+x_4&=0\end{aligned}$$

[Řeš.: W je množina všech vektorů $\vec{x}$, pro které platí

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{skal}\left(\begin{pmatrix}3\\3\\2\\7\end{pmatrix},\vec{x}\right)&=0\\ \mathrm{skal}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-9\end{pmatrix},\vec{x}\right)&=0\\ \mathrm{skal}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\vec{x}\right)&=0\end{aligned}\right\}$$

Tedy $W^\perp$ je právě podprostor generovaný vektory $\begin{pmatrix}3\\3\\2\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Ověříme pouze, zda tyto vektory jsou lineárně nezávislé:

$$\begin{pmatrix}3&0&-2&-9\\3&3&2&7\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-r_1\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&-2&-9\\0&3&4&16\\0&0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{báze } W^\perp=\left(\begin{pmatrix}3\\3\\2\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$]

Pozn.: poslední drobnůstka, kterou nyní potřebujeme použít u pojmu ortogonalita, je tzv. ortogonální projekce vektoru do podprostoru. K čemu to potřebujeme?

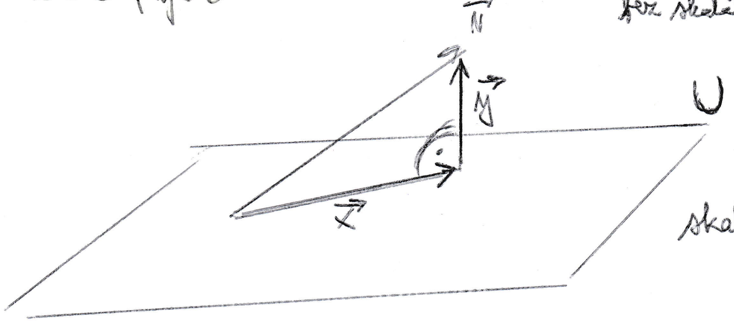
a) pokud chceme např. určit odchylku vektoru od podprostoru, promítneme tento (nenulový) vektor kolmo do daného podprostoru a určíme odchylku vektoru a jeho průmětu

c) ortogonální projekci budeme potřebovat při konstrukci n-rozměrného objemu – viz str. 68

b) při výpočtu skalárního či vektorového součinu pracujeme s kolmými průměty vektoru do směru druhého vektoru (u skalárního součinu) a do směru kolmého na druhý vektor (u vektorového součinu). Rozklad vektoru na součet dvou vektorů, které jsou na sebe kolmé, lze tedy spočítat s využitím kolmého průmětu.

Def. 43 Ortogonální projekce (nenulového) vektoru $\vec{v}$ do podprostoru U ||| vektor $\vec{x}$ takový, že

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{v}$, kde $\vec{x}\in U$, $y\in U^\perp$ (vše se odehrává v eukleidovském prostoru, protože bez skalárního součinu není umožněn pojem kolmosti)



$\mathrm{skal}(\vec{x},\vec{y})=0$

Konstrukce ortogonální projekce bude vysvětlena na příkladu

Př. 43 (Horák, str. 83) Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\\4\end{pmatrix}$ do podprostoru generovaného vektory $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix},\vec{u}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

[Řešení: Podívejme se, zda $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé, a vytvoříme z nich bázi:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&3\\1&2&2&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-r_1\\-r_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-1&2\\0&1&1&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\|\cdot(-1)\\+r_2\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{báze } U = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\vec{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix}}_{=\vec{w}_2}\Big)$$

Protože projekce $\vec{x} \in U$, lze $\vec{x}$ vyjádřit jako lineární kombinaci $\vec{w}_1, \vec{w}_2$:

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{w}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{w}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{x} + \vec{y}, \text{ kde } \operatorname{skal}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \vec{y} \quad \Big/ \begin{matrix}\cdot \vec{w}_1 \ldots \\ \cdot \vec{w}_2 \ldots\end{matrix}$$

dostaneme dvě rovnice, ze kterých vypadne $\vec{y}$, protože $\vec{y} \perp U = L(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$

$$\operatorname{skal}(\vec{v}, \vec{w}_1) = \alpha_1 \cdot \operatorname{skal}(\vec{w}_1, \vec{w}_1) + \alpha_2 \cdot \operatorname{skal}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) + 0$$
$$\operatorname{skal}(\vec{v}, \vec{w}_2) = \alpha_1 \cdot \operatorname{skal}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) + \alpha_2 \cdot \operatorname{skal}(\vec{w}_2, \vec{w}_2) + 0$$

dvě rovnice o dvou neznámých α_1, α_2

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\\4\end{pmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix}: \quad \begin{matrix}4 = \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 0\\ -12 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 6\end{matrix} \Bigg] \Rightarrow \begin{matrix}\alpha_1 = 1\\ \alpha_2 = -2\end{matrix} \Bigg] \Rightarrow \vec{x} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\5\end{pmatrix}}}$$

[Pozn.: vektor $\vec{y}$ lze nyní již snadno vyjádřit $\vec{y} = \vec{v} - \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\5\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}}}$]

Nyní se blížíme zpět k pokrytí posledního pojmu, kterým tento kurz zakončíme, a to je pojem vektorového součinu vektorů. Tento pojem je obecně odvozen od pojmu n-rozměrného objemu (Dále podle Zlatoš, kap. 15, od str. 300): V EUKLIDOVSKÉM VEKTOROVÉM PROSTORU

Def. 44. Objem v euklidovském vektorovém prostoru

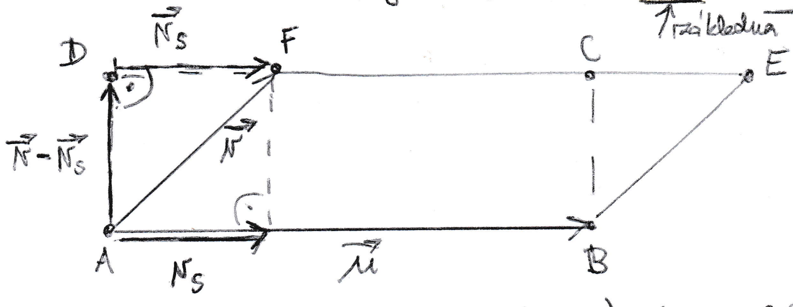
Uvažujme jednorozměrný objem jako délku vektoru $\vec{u}$: $\operatorname{vol}_1(\vec{u}) = \|\vec{u}\|$

(vol … z anglického volume = objem)

Dále dvojrozměrný objem $\operatorname{vol}_2(\vec{u}, \vec{v})$ bude vyjadřovat obsah rovnoběžníka určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$:

tento obsah je stejný jako obsah obdélníka ABCD, tj. $\operatorname{vol}_2(\vec{u}, \vec{v}) = \underbrace{\|\vec{u}\|}_{\text{základna}} \cdot \underbrace{\|\vec{v} - \vec{v}_S\|}_{\text{výška rovnoběžníka}}$

$S(\triangle BEC) = S(\triangle AFD)$

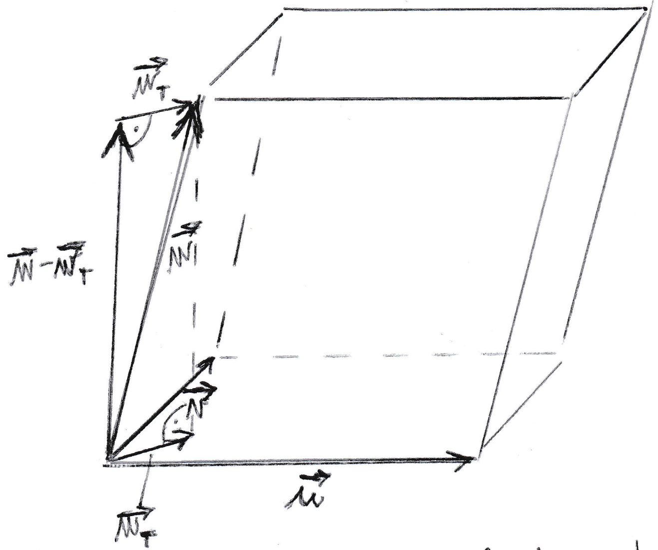


kde $\vec{v}_S$ je ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ do podprostoru $S = L(\vec{u})$; tedy $\operatorname{vol}_2(\vec{u}, \vec{v}) = \operatorname{vol}_1(\vec{u}) \cdot \|\vec{v} - \vec{v}_S\|$

Podobně trojrozměrný objem $\operatorname{vol}_3(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ a vypočteme jej jako

$$\operatorname{vol}_3(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \underbrace{\operatorname{vol}_2(\vec{u}, \vec{v})}_{\text{obsah rovnoběžníka, který je základnou rovnoběžnostěnu}} \cdot \|\vec{w} - \vec{w}_T\|$$

výška rovnoběžnostěnu, určená velikostí vektoru $\vec{w} - \vec{w}_T$, kde $\vec{w}_T$ je kolmý průmět vektoru $\vec{w}$ do podprostoru $T = L(\vec{u}, \vec{v})$



Podle tohoto schématu pokračujeme do vyšších dimenzí a definujeme (rekurentním vztahem) k-rozměrný objem rovnoběžnostěnu jako funkci $vol_k : V^k \to R$, která vektorům $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k \in V$ přiřadí reálné číslo

$$vol_k(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k) = vol_{k-1}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{k-1}) \cdot \| \vec{u}_k - \vec{u}_U \|,$$

kde $\vec{u}_U$ je ortogonální projekce (= kolmý průmět) vektoru $\vec{u}_k$ do podprostoru $U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{k-1})$

<u>Pozn.</u>: Z geometrické názornosti takto definovaného objemu plyne, že v naší terminologii k-rozměrný objem je symetrická k-lineární forma. Dále z konstrukce objemu plyne násl. věta:

objem nezávisí na pořadí vektorů

multilineární = lineární v každé složce

<u>Věta 32</u> (Zlatoš, str. 301) V je vektorový prostor se skalárním součinem (= eukleidovský vekt. prostor), $k \geq 1$.
Pro libovolné vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in V$ platí:

a) $vol_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) \geq 0$, přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou lineárně závislé.

b) $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou ortogonální $\iff vol_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \cdot \ldots \cdot \|\vec{u}_k\|$

c) pokud $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou lineárně nezávislé, tak lze Gr.-Schm. procesem získat ortogonální vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$: $vol_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = vol_k(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \ldots \cdot \|\vec{v}_k\|$

<u>Pozn. ad a)</u> pokud vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně závislé, tj. leží v jedné rovině, rovnoběžnostěn jimi určený je degenerovaný – jeho objem vol_3 v prostorových jednotkách je roven 0.

Def. 45. Elementární úpravy matice bilineární formy

Bilineární forma $\varphi : V^2 \to R$ je zadána maticí A řádu n, tzn.

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

. Elementární úpravy matice bilineární formy (budeme jim říkat ERÚ/ESÚ úpravy = řádkové i sloupcové úpravy) jsou takové úpravy, které změní matici A na matici B stejné bilineární formy φ, ovšem vyjádřené v jiné bázi (tj. při transformaci souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}$) a platí $B = P^T \cdot A \cdot P$ pro nějakou regulární P.

Protože do vzorce bilineární formy vstupují dva vektory současně (řádkový i sloupcový), na rozdíl od Gaussovy eliminace každá elementární úprava zde bude spočívat v tom, že s řádkovou úpravou se hned následně provede i sloupcová úprava stejné povahy.

(ERÚ+ESÚ matice bilineární formy):

a) prohodíme i-tý řádek s j-tým řádkem, a hned poté i-tý sloupec s j-tým sloupcem

b) i-tý řádek vynásobíme nenulovou konstantou c, a hned poté i-tý sloupec vynásobíme c

c) k j-tému řádku přičteme c-násobek i-tého řádku, a hned poté k j-tému sloupci přičteme c-násobek i-tého sloupce

Věta 33. Matice B získaná z matice A elementárními ERÚ+ESÚ úpravami ($B = P^T \cdot A \cdot P$ pro nějakou regulární P) je maticí téže bilineární formy, pouze vzhledem k jiné bázi daného prostoru.

Př. 44 Převeďte matici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$
dané symetrické bilineární formy φ vzhledem ke standardní bázi $\underline{e}$ na jinou matici vzhledem k jiné bázi $\underline{e}'$.

[Řešení: Všimněme si nejprve, jak bilineární forma φ pracuje vzhledem k bázi $\underline{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Např. pro vektory $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$ máme
$$\varphi(\vec{u},\vec{v}) = (1,2,3,-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix} = \underline{\underline{-11{,}5}}$$

Pokusme se matici A zjednodušit elementárními ERÚ+ESÚ úpravami:

Strategie: vezmeme první nenulový prvek a_{ii} a pomocí něj vynulujeme prvky pod ním a napravo od něj:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\frac{1}{2}\cdot r_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \overset{+\frac{1}{2}\cdot s_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +3\cdot r_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 3/4 & 0 & 0 & -9/2 \end{pmatrix} \overset{+3\cdot s_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & -2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & -9/2 \end{pmatrix} = B \ldots$$

je zachována symetrie matice B!

matice B je maticí téže bilineární formy vzhledem k jiné bázi

(s úpravami matice B bychom mohli pokračovat)]

Vraťme se nyní k výpočtu k-rozměrného objemu :

Věta 34 Na euklidovském vektorovém prostoru nad tělesem R platí pro libovolné vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$:

$$vol_k(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k) = \det\left(G(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)\right)^{\frac{1}{2}}$$

← odmocnina z determinantu !!

Pozn.: Z předchozí věty plyne návod pro výpočet objemu : Vytvoříme Grammovu matici $G(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ a protože se jedná o matici symetrické bilineární formy, upravíme ji symetrickými ERÚ+ESÚ úpravami na diagonální tvar. Když se nám to podaří, tento diagonální tvar je

výpočet determinantu z diagonální matice, a z něho odmocnina !!

$$\begin{pmatrix} \|\vec{u}_1\|^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|\vec{u}_2\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \|\vec{u}_k\|^2 \end{pmatrix}, \text{ a tedy } vol_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) \overset{!}{=} \sqrt{\text{ze součinu prvků na diagonále}}$$

Pokud na tento tvar upravit nelze ($a_{ii} = 0$), znamená to, že $vol_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = 0$.

Def. 46: Dvě báze vektorového prostoru jsou souhlasně orientované, pokud matice přechodu mezi nimi má kladný determinant ; (nesouhlasně orientované ... záporný ...)

Pozn.: Relace souhlasné orientace mezi dvěma bázemi (tj. binární relace !) je relací ekvivalence, protože
- každá báze je souhlasně orientovaná sama se sebou : $\det E = 1$
- $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ ... relace je symetrická : $\det P \cdot \det P^{-1} = \det E = 1$, tj. $\det P > 0 \Leftrightarrow \det P^{-1} > 0$
- $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ ... relace je tranzitivní : $P_{\alpha \to \beta} \cdot P_{\beta \to \gamma} = P_{\alpha \to \gamma}$ ... vztah mezi maticemi přechodu
  ($\det P_{\alpha \to \beta} \cdot \det P_{\beta \to \gamma} = \det P_{\alpha \to \gamma}$ ... výsledek součinu kladných čísel je opět kladný)

Strategie kladné orientace : Vybereme jednu bázi (v $\mathbb{R}^n$ zpravidla $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \dots$) a prohlásíme ji za kladně orientovanou, pak všechny báze s ní orientované souhlasně mají též kladnou orientaci

číslo 45

Př. a) Kladně orientovaná báze v prostoru jedné dimenze $L(\vec{u})$: báze $\vec{v}$ má stejný směr jako vektor $\vec{u}$

b) Kladně orientovaná báze v prostoru dimenze 2 $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$: $\vec{u}_1$ otáčíme do směru $\vec{u}_2$ proti směru pohybu hodinových ručiček

c) Kladně orientovaná báze v prostoru dimenze 3 $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$: (pravidlo pravé ruky: když otáčíme $\vec{u}_1$ do směru $\vec{u}_2$ proti směru ručiček, tj. ve směru prstů pravé ruky, vidíme toto otáčení jako proti směru ručiček z vrcholku vektoru $\vec{u}_3$ (= palec ukazuje ve směru vektoru $\vec{u}_3$))