Lineární zobrazení $R^2 \to R^2$

Řada lineárních zobrazení v rovině je zobrazeními, na které jsme (snad) už zvykli ze ZŠ/SŠ:

1) a) Hezké zobrazení je identita, která nedělá nic: vektor $\vec{v}$ zobrazí na sebe sama.
Matice tohoto zobrazení je $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Např. pro $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1b)
Do třídy těchto triviálních zobrazení bychom mohli zařadit ještě projekci vektoru na osu x: matice zobrazení je $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Např. pro $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longmapsto B \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ... vektor ve směru osy x

1c)
A podobně projekce vektoru na osu y: matice zobrazení je $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Např. pro $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longmapsto C \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ... vektor ve směru osy y

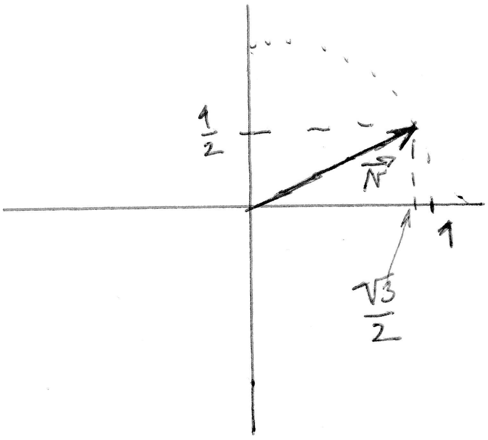
---

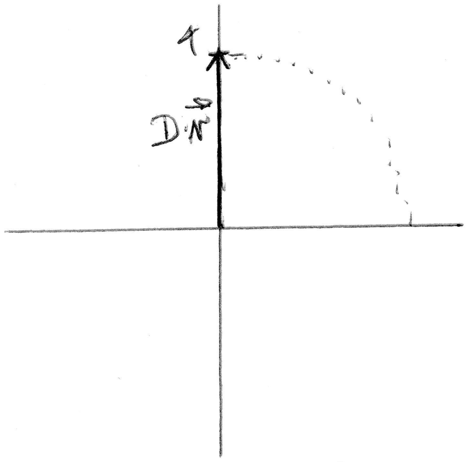
2) O něco náročnější je lineární zobrazení, které představuje otočení roviny o úhel φ_0 se středem otáčení v počátku. Lze odvodit (viz přednáška, str. 42–43), že matice tohoto lineárního zobrazení má tvar
$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix}.$$

Například pro $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ a $\varphi_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ má matice D konkrétní tvar

$D = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ a vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ se pootočí a zobrazí na vektor

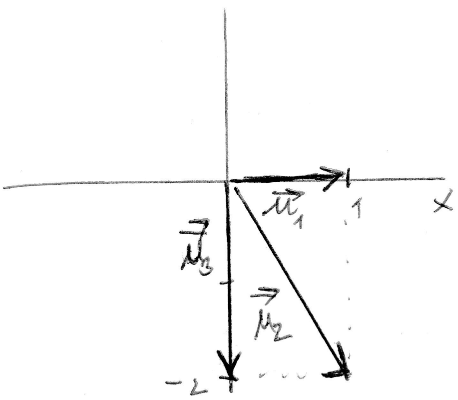
$$D \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

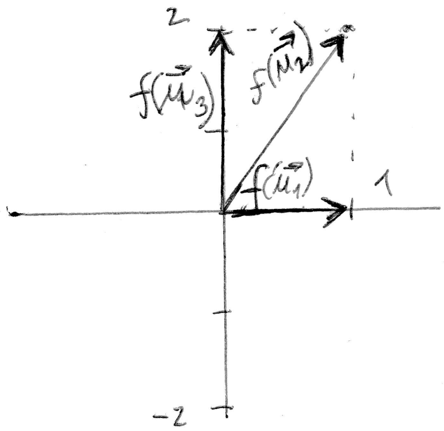




(3)

Podívejme se na osovou souměrnost vzhledem např. k ose x:





vektor $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ se zobrazí na sebe sama, protože leží na ose souměrnosti:

$$f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

vektor $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ se „překlopí" vzhledem k ose x a zobrazí se osovou souměrností na vektor $f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Najdeme nyní matici F tohoto zobrazení:

$$\left.\begin{matrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\[1em] \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$ pomocí zadání obrazů báze jsme schopni najít matici zobrazení:

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}a=1\\c=0\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}a-2b=1\\c-2d=2\end{matrix} \;\Bigg|\; \begin{matrix}1-2b=1\\0-2d=2\end{matrix}$$

$$b=0$$
$$d=-1$$

$$\text{tedy } F = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Zde je možné vhodně zmínit jeden další pojem: vektor, který se zobrazí na sebe sama nebo na svůj vlastní násobek, se nazývá vlastní vektor; a daná násobená hodnota se nazývá vlastní hodnota.

Tedy vektor $\vec{u_1}$ je vzhledem k osové souměrnosti f vlastním vektorem, příslušný násobek 1 je jeho vlastní hodnota:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

vlastní hodnota příslušná vektoru $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Nebo vektor $\vec{u_3}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ je vlastním vektorem, protože se zobrazí na svůj (-1)-násobek:

$$\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} \longmapsto \underline{\underline{f\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

vlastní hodnota příslušná vektoru $\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

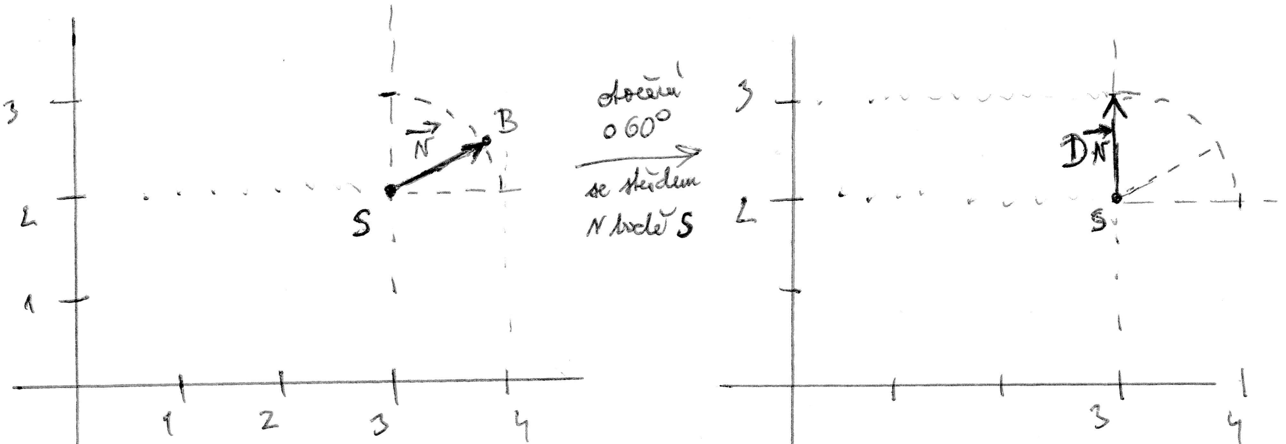
Věta: Algoritmus pro nalezení vlastních vektorů a vlastních hodnot

Z definice vlastního vektoru plyne i postup, jak tyto vlastní vektory a vlastní hodnoty nalézt.

Postup a příklad viz příručka – str. 48 uprostřed až 49 uprostřed.

(4) Podívejme se ještě na otáčení a osovou souměrnost v rovině, jestliže bod otáčení není počátek nebo osa souměrnosti není osa souřadného systému

(4a) Nalezněte matici lineárního zobrazení, které představuje otočení roviny o úhel $60°$ vzhledem ke středu otáčení $S=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$



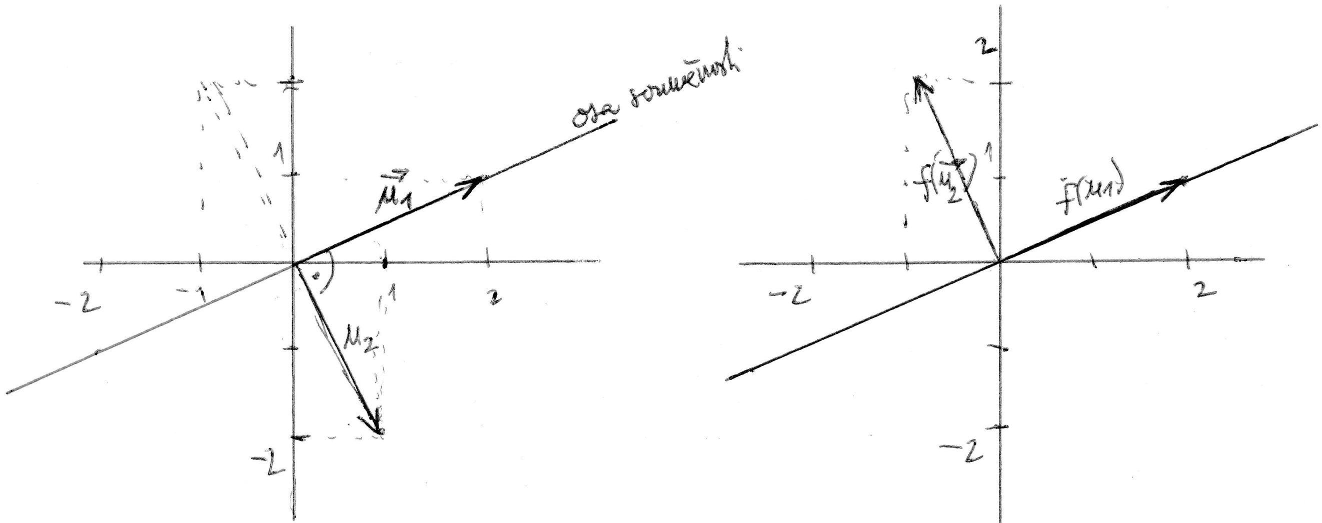
Bod B má sice souřadnice $\begin{bmatrix}3+\frac{\sqrt3}{2}\\ 2+\frac12\end{bmatrix}$, ale při vytvoření vektoru $\vec v$ odečítáme souřadnice obou bodů od sebe a dostaneme

$\vec v = B - S = \begin{pmatrix}\sqrt3/2\\ 1/2\end{pmatrix}$, tj. stejné souřadnice jako v příkladu 2, $D\vec v$ má též stejné souřadnice jako v příkladu 2, čili matice $D=\begin{pmatrix}1/2 & -\frac{\sqrt3}{2}\\ \sqrt3/2 & \frac12\end{pmatrix}$ je stejná jako v příkladu 2 – na matici zobrazení VEKTORŮ nemá vliv střed otáčení.

4.b) Určete matici zobrazení osové souměrnosti kolem přímky (= vzhledem k ose souměrnosti)

$y = \frac{x}{2}$.

Řešení: Matici najdeme pomocí zobrazení dvou vhodných vektorů



$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ se zobrazí na sebe sama $\longmapsto f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ se zobrazí na vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, tj. $f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Odtud určíme matici F:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2a+b &= 2 \\ 2c+d &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a-2b &= -1 \\ c-2d &= 2 \end{aligned}$$

řešením těchto 4 rc o 4 nezn. dostaneme

$$\begin{aligned} 2a+b &= 2 \quad /\cdot 2 \\ a-2b &= -1 \\ \hline 5a &= 3 \Rightarrow a = \tfrac{3}{5},\ b = \tfrac{4}{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2c+d &= 1 \quad /\cdot 2 \\ c-2d &= 2 \\ \hline 5c &= 4 \Rightarrow c = \tfrac{4}{5},\ d = -\tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Je jasné, že tyto složité úlohy se na ZŠ tolik nepoužijí, ale je to taková zajímavá SŠ/VŠ souvislost, že běžné zobrazení v rovině (otáčení, osovou souměrnost) lze vyjádřit pomocí matic.