1 Cramerovo pravidlo pro řešení SLR

- totální vzorec pro řešení SLR – odvození pro systém dvou rovnic o dvou neznámých;
- Definice 1: matice typu m-n
- Cramerovo pravidlo – vzorce, slabina metody
- Příklad: pomocí Cramerova pravidla vypočtěte řešení SLR:

$$\begin{aligned} x \quad\; - z &= 0, \\ 3x + y \quad\; &= 1, \\ -x + y + z &= 4. \end{aligned}$$

2 Definice determinantu

- Definice 2: determinant čtvercové matice
- Příklad 2: výpočet determinantu matice řádu 4 z definice, pomocí geometrického názoru počtu inverzí při každé permutaci sloupců v daném součinu, určení znaménka u součinu pomocí geometrického názoru počtu hran příbuzných vedlejší diagonále. Můžete vysvětlit na příkladu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots .$$

- Definice 3: hlavní a vedlejší diagonála matice
- Definice 4: inverze ve vztahu mezi dvěma prvky v permutaci

3 Pravidla pro úpravu determinantu

- D1: determinant se transponováním nezmění
- D2: determinant je antisymetrické zobrazení – důsledek: přehozením dvou řádků determinant změní znaménko;
- D3: determinant jako zobrazení je lineární v každé složce;
- D4: determinant se nezmění, pokud k jednomu řádku matice přičteme reálný násobek jiného řádku;
- Def. 7: schodový tvar matice. Jak souvisí výpočet determinantu se schodovým tvarem matice a pravidly D3, D4 ?

4 Laplaceův rozvoj determinantu, determinant matice s jedním řádkem zkombinovaným z jiných řádků

- D5: Vzorec pro rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce
- Vysvětlete na příkladu rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \dots.$$

- D6: determinant matice, kde jeden řádek je lineární kombinací jiných řádků, je roven nule.

5 Vektorový prostor

- Vlastnosti sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem – pouze grafický názor vlastností z následující definice u běžných vektorů v prostoru R^2.
- Def. 8: vektorový prostor
- Příklady: nejmenší možný vektorový prostor, prostor polynomů stupně nejvýše n, prostor funkcí spojitých na intervalu.

6 Závislost a nezávislost skupiny vektorů

- Def. 6: lineární kombinace vektorů;
- Def. 9: lineárně závislá posloupnost vektorů;
- Def.10: báze a dimenze vektorového prostoru, souřadnice
- Příklady báze (u příkladů vektorových prostorů z předchozí otázky)
- Postup sestavování báze.

7 Vektorový podprostor

- Def.11: vektorový podprostor: co stačí ověřit, abychom věděli, že podmnožina vektorového prostoru je sama už vektorovým prostorem?
- Příklady vektorového podprostoru (co je podprostor; co není podprostor)
- Je průnik dvou podprostorů vektorový podprostor? Důkaz věty 3.
- Je sjednocení dvou podprostorů vektorový podprostor? Protipříklad + lze tedy definovat nějak podprostor určený sjednocením? (věta 4, def. 12, def. 13)

8 Generátory vektorového podprostoru

- Věta 5: přičtení kombinace jiných řádků nemění nezávislost posloupnosti vektorů (důkaz nemusíte)
- Příklad: je vektor na pravé straně následujícího SLR lineárně závislý na sloupcích matice na levé straně? Proč?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad &= 4, \\ -x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= 5, \\ 5x_3 + 3x_4 &= 7, \\ 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

- Věta 6: EŘÚ (def. 14) nemění množinu řešení SLR (dokazovat nemusíte)
- Věta 7: vztah mezi dimenzí součtu a dimenzí průniku podprostorů (důkaz nemusíte)

9 Hodnost matice, Frobeniova věta, tři typy výsledků řešení SLR

- Co je to hodnost matice?
- Jaké tři situace mohou nastat u SLR vzhledem k počtu řešení – a kdy vzhledem k hodnosti matice A a matice rozšířené (viz shrnutí str. 27 nahoře)?
- příklad řešení SLR Gaussovou eliminací: vyřešte následující systém rovnic:

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3, \\ 2x + 5y - z - 9w &= -2. \end{aligned}$$

- Opravte předchozí příklad (některé koeficienty ze zadání), aby počet řešení byl a) 0, b) 1.
- V případě nekonečně mnoha řešení: Jak počet parametrů souvisí s hodností matice systému?

10 Homogenní SLR, princip superpozice, dva typy výsledků řešení SLR-hom

- Co je to SLR-hom? Jaké jsou typy SLR-hom podle počtu jejich řešení?
- Množina řešení SLR-hom tvoří vektorový podprostor **(včetně důkazu – zkuste systém psát jen maticově, bude to přehlednější)**.
- Obecné a partikulární řešení SLR, princip superpozice.
- Princip superpozice ilustrujte na příkladu:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= -1. \end{aligned}$$

11 sčítání a násobení matic – analýza z algebry 1

- Jak se definuje sčítání matic a jaké matice lze sčítat?
- Věta 12: uveďte a dokažte vlastnosti operace sčítání matic
- Jak se definuje operace násobení matic a jaké matice lze násobit?
- Věta 13: uveďte a dokažte vlastnosti operace násobení matic (přednostně tedy násobení na množině čtvercových matic)

12 Maticová metoda při řešení SLR

- Co je to maticová metoda řešení systému lineárních rovnic?
- Výpočet inverzní matice Jordanovou metodou – vysvětlete na příkladu v otázce číslo 1.
- Kdy lze užít metodu inverzní matice při řešení SLR? (singulární matice, regulární matice)

13 Lineární zobrazení

- Uveďte definici lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory.
- Zadání lineárního zobrazení pomocí předpisu – pomocí matice – pomocí obrazů báze. Vztah mezi těmito typy zadání ... vysvětlete na příkladu zobrazení

$$\varphi: R^3 \to R^2 \text{ definovaného vzorcem } \varphi(\vec{v}) = \varphi\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 & & + v_3 \\ v_1 - v_2 - v_3 \end{pmatrix}.$$

- Příklad: najděte matici lineárního zobrazení, které představuje osovou souměrnost v rovině vzhledem k přímce $y = \frac{x}{2}$.
- Věta 16: základní vlastnosti lineárního zobrazení

14 Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

- Def. 22: jádro a obor hodnot lineárního zobrazení
- Na příkladu vysvětlete, jak jadro a obor hodnot konkrétního lineárního zobrazení najdeme:

$$\varphi: R^4 \to R^3, \quad \varphi(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3v_1 - v_2 + 2v_3 - v_4 \\ 2v_1 + 3v_2 + v_3 + v_4 \\ 5v_1 + 2v_2 + 3v_3 \end{pmatrix}.$$

- Věta 17: vlastnosti jádra a oboru hodnot, vztah jejich dimenze a dimenze celého prostoru vzorů.
- Věta 18: lineární zobrazení je injektivní právě tehdy, když ... (a lineární zobrazení je surjektivní, právě tehdy, když ...)
- K čemu jsou pojmy jádra a oboru hodnot zobrazení užitečné?

15 Vlastní čísla (hodnoty) a vlastní vektory (směry) lineární transformace

- Def 27: vlastní čísla a vlastní směry lineární transformace vektorového prostoru.
- Najděte matici lineárního zobrazení, které představuje osovou souměrnost v rovině vzhledem k ose $y = \frac{x}{2}$.