Repetitorium SŠ matematiky 2

8. cvičení

- do 19. 4. 2020 nahrajte do odevzdávárny „cv. 8"
  v jednom souboru následující příklady:
  - příklady 1, 2, 3
  - alespoň jeden z příkladů 6, 8
  - alespoň dva z příkladů 4, 5, 7
- konzultace k tomuto cvičení proběhne v MS Teams
  dne 15. 4. 2020 od 18 hodin

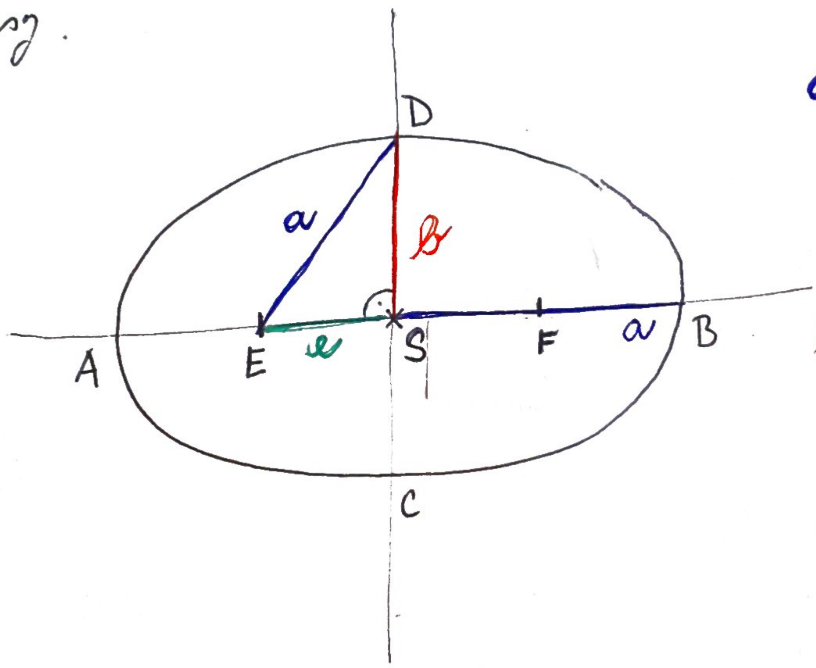
8. cvičení – elipsa

ELIPSA

V rovině jsou dány body E, F a je dáno číslo a tak, že $2a > |EF|$. Elipsou rozumíme množinu všech bodů X (v rovině), pro které platí

$$|XE| + |XF| = 2a$$

Body E, F se nazývají ohniska elipsy, číslo a je hlavní poloosa elipsy.



a – hlavní poloosa

$a = |AS| = |SB| = |ED| = |FD| =$
$= |EC| = |FC|$

b – vedlejší poloosa

$b = |SD| = |SC|$

e – excentricita (výstřednost)

$e = |ES| = |FS|$

S – střed elipsy

E, F – ohniska elipsy

A, B – hlavní vrcholy elipsy

C, D – vedlejší vrcholy elipsy

- protože pro každý bod na elipse platí $|XE| + |XF| = 2a$, platí to i pro D, který je ale stejně vzdálený od E i F, proto $|FD| = |ED| = a$, z toho plyne

$$a^2 = b^2 + e^2$$

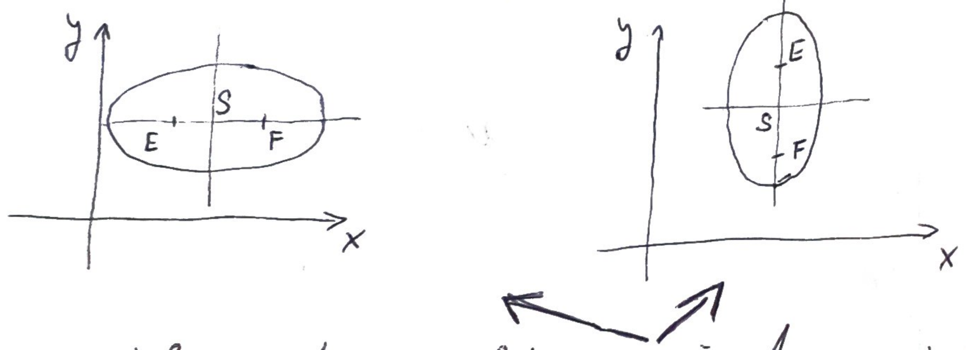
8. cvičení

- z definice elipsy lze odvodit rovnici elipsy

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$$

kde a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa, střed elipsy je $S[m,n]$

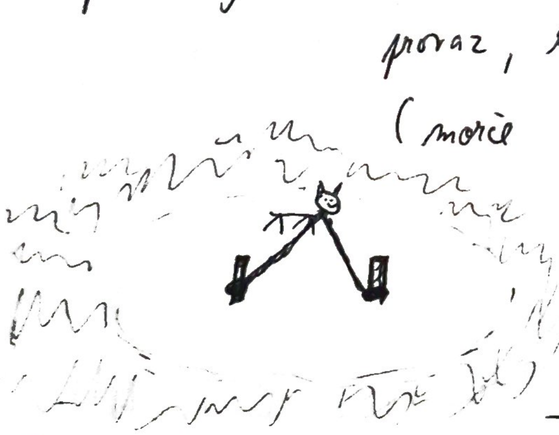
- budeme pracovat pouze s elipsami, které mají hlavní poloosu rovnoběžnou s osou x, případně s osou y



- jak poznáme, o kterou možnost se jedná?
  - podle souřadnic E, F
  - z rovnice elipsy – pokud $a > b$, je hl. poloosa $\parallel x$, pokud $a < b$, je hl. poloosa $\parallel y$, v tom případě se tedy stává hlavní poloosou b a vedlejší poloosou a.

- jak vysvětlit dětem, co je to elipsa?

potřebujete: zahradu nebo jinou plochu s trávou, dva kolíky, provaz, kozu nebo jiné hladové býložravé zvíře (morče raději ne, je moc vybíravé ☺)



→ koza přivázaná k provazu, jehož konce jsou uvázané ke kolíkům, tak, aby mohl u kozy provaz prokluzovat

→ zanedlouho koza vypase elipsu

Kdo vyzkouší, nechť pošle fotodokumentaci ☺

8. cvičení

Př. 1 Napište rovnici elipsy s ohnisky v bodech $E[-1,0]$, $F[1,0]$, která prochází bodem $X[1, \frac{8}{3}]$. Elipsu nakreslete, určete souřadnice vrcholů.

Řešení: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

Př. 2 Napište rovnici elipsy s ohnisky v bodech $E[2,5]$, $F[2,1]$, která prochází bodem $X[5,1]$. Elipsu nakreslete, určete souřadnice vrcholů.

Řešení: $\frac{(x-2)^2}{12} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

Př. 3 Určete střed a délky poloos elipsy dané předpisem

$$4x^2 + 25y^2 - 24x - 100y + 36 = 0$$

Řešení: $S[3,2]$, $a = 5$, $b = 2$

Př. 4 Napište rovnici elipsy vepsané do obdélníka, jehož strana o rozměru 10 cm leží na ~~kladné~~ záporné části osy x, strana o rozměru 8 cm leží na záporné části osy y a jeden vrchol je v bodě $[0,0]$.

Řešení: $\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$

Př. 5 Jsou dány body $M[-3,0]$, $N[3,0]$ a přímka $p: 4x + 5(2-\sqrt{3})y - 20 = 0$. Určete všechny body P ležící na přímce p, pro které je obvod ΔMNP roven 16 cm.

Řešení: Kde všechny takové body P leží?

$P_1[5,0]$, $P_2[\frac{5\sqrt{3}}{2}, 2]$

8. cvičení

Podobně jako u kružnice se odvodí rovnice tečny elipsy.

Je-li $X_0[x_0, y_0]$ bodem elipsy, pak má tečna v bodě X_0 rovnici

$$\boxed{\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} + \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1}$$

Př. 6 Určete průsečíky přímky $p: 4x+5y=140$ s elipsou $e: \frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$ a napište rovnice tečen v těchto průsečících.

Řešení: $T_1[15, 16] \in t_1: 3x+5y = 125$

$T_2[20, 12] \in t_2: 16x+15y = 500$

Př. 7 Určete parametr c tak, aby přímka $p: y = x + c$ byla tečnou elipsy $e: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Nakreslete obrázek.

Řešení: $c = \pm\sqrt{5}$

Př. 8: Je dána elipsa $5x^2 + 9y^2 = 45$ a bod $M[0, -3]$.

a) Dokažte, že bod M je vnější bod elipsy

b) Napište rovnici tečny (tečen) procházející bodem M

Řešení: $t_1: 2x - 3y - 9 = 0$

$t_2: 2x + 3y + 9 = 0$