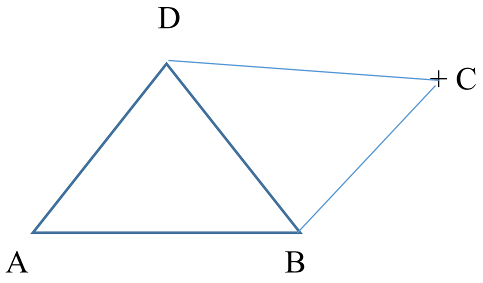
Čtyřúhelníky v učivu matematiky na 1. stupni ZŠ

Růžena Blažková

1. **Motivace**: Kde ve svém okolí vidíte čtyřúhelníky.

2. **Co je čtyřúhelník**

Je dán trojúhelník ABD a bod C, který leží vně trojúhelníku. Čtyřúhelníkem ABCD rozumíme sjednocení trojúhelníků ABD a BDC, právě když jejich průnikem je úsečka BD.



Základní pojmy: vrcholy čtyřúhelníku: body A, B, C, D.
strany čtyřúhelníku: úsečky AB, BC, CD, AD
strany sousední: AB a BC, BC a CD, CD a DA, DA a AB
strany protější: AB a CD, BC a AD
úhlopříčky čtyřúhelníku: úsečky AC a BD

3. **Třídění** – klasifikace čtyřúhelníků
   a) Konvexní, nekonvexní.
   Připomeňme, že geometrický útvar je konvexní, právě když pro každé dva jeho různé body platí, že úsečka jimi určená náleží geometrickému útvaru.
   Geometrický útvar je nekonvexní, jestliže existují alespoň dva různé body, které náleží útvaru a úsečka jimi určená geometrickému útvaru nenáleží.

Úkol č. 1

Nakreslete konvexní a nekonvexní čtyřúhelník, najděte jejich reprezentaci v praktickém životě.

b) Čtyřúhelník

jeho strany jsou různoběžné | má alespoň jednu dvojici rovnoběžných stran

různoběžník | právě jedna dvojice | dvě dvojice rovnoběžných stran

lichoběžník | rovnoběžník

sousední strany jsou na sebe kolmé | nejsou kolmé

pravoúhelníky | *kosoúhelníky*

protější strany jsou shodné | nejsou shodné | sh | nesh

, *čtverec* | *obdélník* | *kosočtverec* | *kosodélník*

Úkol č. 2

Nakreslete všechny výše vyjmenované čtyřúhelníky a uveďte jejich reprezentace z běžného života.

Na prvním stupni ZŠ poznávají děti všechny druhy čtyřúhelníků, např. různoběžník je drak – deltoid, lichoběžník může být střecha, psí bouda, necky apod. Základním učivem je zejména učivo o obdélníku a čtverci.

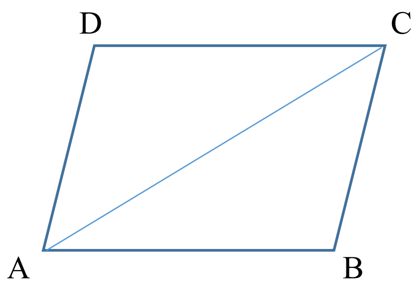
Připomeňme si, co je rovnoběžník a některé jeho vlastnosti.

Rovnoběžník je čtyřúhelník, který má dvě dvojice rovnoběžných stran.

Vlastnosti všech rovnoběžníků:

V 1. Protější strany rovnoběžníku jsou shodné. $AB \parallel CD \rightrightarrows AB \cong CD$

$BC \parallel AD \rightrightarrows BC \cong AD$

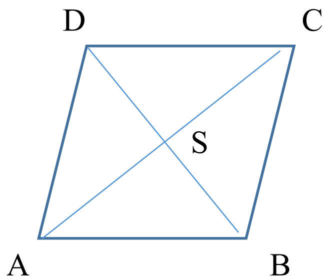


Poznámka: všechny důkazy jsou pro studenty, nikoliv pro žáky.

Tuto vlastnost můžeme ověřit (dokázat) na základě shodnosti trojúhelníků ABC a CDA podle věty o shodnosti trojúhelníků usu (strana AC je společná a najdeme dvojice střídavých úhlů mezi rovnoběžkami).

V 2. Protější úhly rovnoběžníku jsou shodné. K ověření využijeme předchozího důkazu.

V 3. Úhlopříčky rovnoběžníku se půlí.

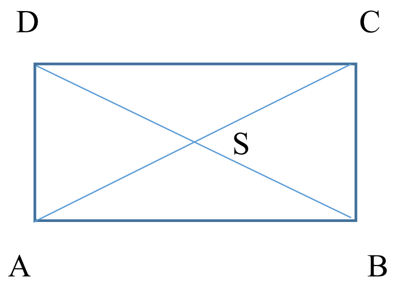


Ověříme na základě shodností trojúhelníků ABS a CDS podle věty usu.

K těmto vlastnostem pak přibývají další vlastnosti pravoúhelníků:

Obdélník

Obdélník je rovnoběžník, jehož sousední strany jsou na sebe kolmé a nejsou shodné. Má tedy všechny vlastnosti rovnoběžníku a přibývají další:



V 4. Úhlopříčky obdélníku jsou shodné   AC ≅ BD

Dokážeme na základě shodnosti trojúhelníků ABC a CDA (věta sus)

V 4. Obdélníku lze opsat kružnici.

Čtverec

Čtverec je rovnoběžník, jehož sousední stany jsou na sebe kolmé a jsou shodné. Další vlastnosti:

V 5. Úhlopříčky čtverce jsou na sebe kolmé.

V 6. Čtverci lze kružnici opsat i vepsat.

Děti dále poznávají další vlastnosti, tj. že obdélník je osově souměrný podle dvou os souměrnosti, čtverec je souměrný podle čtyř os souměrnosti.

Připomeňme si, že všechny rovnoběžníky jsou souměrné podle středu.

4. Konstrukce obdélníku a čtverce

Ke konstrukci obdélníku a čtverce využíváme jeho vlastností, každá konstrukce má určitou míru přesnosti.

Úloha: Narýsujte obdélník ABCD, jestliže strana AB má délku 4 cm a strana BC má délku 6 cm.

Při konstrukci postupujeme stejně jako při každé konstrukční úloze: rozbor (náčrtek a postup), konstrukce, ověření.

a) Využijeme rovnoběžnosti protějších stran. Narýsujeme úsečku AB, v bodě A (nebo v bodě B) narýsujeme komici, určíme bod D (nebo C) a příslušnými body narýsujeme rovnoběžky.

b) Využijeme kolmosti sousedních stran. Postupujeme podobně jako v bodě a), příslušnými body rýsujeme kolmice.

c) Využijeme shodnosti protějších stran. Postupujeme podobně jako v bodě a), v bodech B a D sestrojíme oblouky – pomocí kružítka sestrojíme úsečky dané délky, průsečík oblouků je bod C.

d) Uvedené konstrukce můžeme kombinovat, např. b) a c). Sestrojíme úsečku AB, v bodech A a B sestrojíme kolmice, na nich pomocí kružítka sestrojíme body C. D.

e) Můžeme využít i středové souměrnosti obdélníku.

Úkol č. 3

Narýsuje obdélník KLMN, délky stran si zvolte a popište, kterých vlastností obdélníku jste při konstrukci využili.

Úkol č. 4

Najděte konstrukční úlohu na konstrukci obdélníku z testů k přijímacím zkouškám na víceletá gymnázia. Můžete využít starších testů Cermatu (volně přístupné) nebo testů z denního tisku (Lidové noviny, MF Dnes). Zadání je zpravidla netradiční a žáci by měli aktivně využívat vlastností obdélníku.

5. Obvod a obsah obdélníku a čtverce

Motivace: Kdy potřebujeme zjistit obvod obdélníku? Uveďte několik příkladů.

Poznámka: Žáky neučíme „vzorečky“, ale vedeme výuku tak aby si na dané vztahy přišli sami.

Nejprve si uvědomme, co je obvod geometrického útvaru. Je to **číslo** (s jednotkou), které udává délku jeho hranice.

Možný postup výuky. Dětem rozdáme obdélníky vystřižené z barevného papíru s délkami stran v centimetrech, každý žák má jiné rozměry (nebo několik žáků stejné – podle počtu dětí) a rozdáme měřítko. Motivujeme je – představte si, že je to např. zahrada a chcete určit kolik máte koupit pletiva k jejímu oplocení, ubrus – olemování, nebo vymyslete lepší příklady.

Změřte si, co potřebujete a vypočítejte.

Co můžeme očekávat:

Někteří žáci změří všechny čtyři strany a jejich délky sečtou (podle svých rozměrů).

Obecně $a + b + a + b$

Jiní žáci si všimnou, že protější strany mají stejnou délku. Opět počítají podle svých rozměrů.

Obecně $2a + 2b$

Další žáci si všimnou, že je tam strana delší a strana kratší a že je to dvakrát.

Obecně *2(a + b)*

Každý si vztah pro obvod obdélníku vyvodí podle svého vidění a může to vždy využít k výpočtům.

Analogicky se vyvodí obvod čtverce, buď počítají $a + a + a + a$, nebo $4a$.

Úkol č. 5

Uveďte několik zajímavých aplikačních úloh na výpočet obvodu obdélníku a čtverce.

Obsah obdélníku a čtverce

Připomeňme si, co je obsah geometrického útvaru. Obsah geometrického útvaru je **číslo** (s jednotkou), které udává, kolikanásobkem jednotky je daný útvar.

Pro žáky: Kolika jednotkami obsahu (např. tvaru čtverce) můžeme daný útvar pokrýt.

Žáci určují obsah obrazce nejprve ve čtvercové síti, kde je jednotkou jeden čtverec sítě (i v nižších ročnících). Zpravidla v pátém ročníku se seznamují s výpočtem obsahu obdélníku a čtverce a s jednotkami obsahu.

Možný postup výuky:

Žáci mají barevné obdélníky z předcházející činnosti a nastříhané čtverečky o obsahu 1 cm^2. Úkolem je pokrýt obdélník čtverečky (aby útvar pokryly a nepřekrývaly se). Důležité je, aby viděli počet řádků a počet sloupců jednotek. Jasně vidí, že to významově není pouze součin délek úseček, ale součin počtu řádků a sloupců jednotek.

Potom mohou určit, kolik cm^2 použili a vypočítat obsah obdélníku.

Obecně $S = a \cdot b$

Analogicky to provedeme se čtvercem a zjistíme, že $S = a \cdot a$

Úkol č. 6

Najděte několik vhodných příkladů na výpočet obsahu obdélníku a čtverce.

Jednotky obsahu

Jestliže chceme určit, jakou velikost má nějaký plošný útvar, postupujeme podobně, jako při určování délky – srovnáme útvar s nějakou jednotkou obsahu. Protože by to v některých případech bylo složité, využíváme různých vztahů pro výpočet obsahu rovinných geometrických útvarů (např. čtverce, obdélníku, trojúhelníku, kruhu aj.)

Co je třeba vědět:

a) Útvary, které mají stejný obsah, nemusí mít stejný tvar.

b) Mít jasnou představu jednotek obsahu.

Názornou představu jednotek obsahu vytvoříme např. tak, že vytýčíme např. čtverec, který má stranu 1m a obsah 1 m^2 (přitom obsah 1 m^2 může mít rovinný útvar jakéhokoliv tvaru, např. trojúhelník, kruh apod.). Čtverec je možné vhodně rozdělit na 100 dm^2.

Model 1 dm^2 a 1 cm^2 mohou mít děti vystřižené z papíru, 1 mm^2 je vhodné ilustrovat na milimetrovém papíře. Představu 1 aru můžeme ilustrovat pomocí čtverce o straně 10 m. Obsah 1 hektaru mají přibližně dva fotbalové stadiony.

Převodní vztahy mezi jednotkami obsahu:

1. **využití převodních vztahů**

$$1\ m^2 = 100\ dm^2$$
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2$$
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2$$

$$1\ km^2 = 100\ ha$$
$$1\ ha = 100\ a$$
$$1\ a = 100\ m^2$$

Podobně

$$1\ dm^2 = \frac{1}{100}\ m^2 = 0{,}01\ m^2, \qquad 1\ cm^2 = \frac{1}{10000}\ m^2 = 0{,}0001\ m^2$$

2. **využití funkčních závislostí**

m^2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dm^2	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000

3. **mřížka k převodu jednotek obsahu:**

		km^2	ha	A	**m^2**	dm^2	cm^2	mm^2
		0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0

25 m^2 = 2 500 dm^2 = 250 000 cm^2

25 m^2 = 0,25 a = 0,0025 ha

Využití v reálném životě – v jakých jednotkách vyjádříte:

- Jaký obsah má třída, pokoj, byt?
- Jaký obsah má zahrada, pole?
- Jaký obsah má rybník, park v našem okolí?
- Jaký obsah má Václavské náměstí v Praze? Jaký obsah má náměstí v jiných městech, např. Jihlava, České Budějovice aj.

- Jaký obsah mají hřiště pro jednotlivé sporty (kopaná, hokej, košíková, volejbal, házená, tenis, atd.)

Výlet do historie

Staré jednotky k určování obsahu vycházely zpravidla ze zemědělské činnosti lidí, kdy se určovaly výměry pozemků. Výměra pozemků se v minulosti udávala množstvím obilí, které bylo zapotřebí k jeho osetí. Míry měly značné krajové rozdíly.
Korec byla jednotka, kterou se oseje pole obilím z jednoho kořce, což byla objemová jednotka k měření obilí - asi 100 litrů
Jitro – kolik jedno spřežení volů za 1 den zorati může – 2 jitra byla asi 0,5 ha.
Hon – potah zvládl naráz bez oddechu
Lán – co jedno spřežení zorá za celou dobu – asi 40 ha

Staročeské plošné míry:
Popluží – pozemek, který obdělává koňské spřežení za 1 den – asi 50 arů
Jitro – plocha osetá jedním kořcem zrní
Lán královský – asi 28 ha
Lán selský – asi 18 ha
Měřice – asi 0,19 ha
Čtverečný sáh – asi 3,6 m^2