Metody řešení matematických úloh 2 – jaro2020

Zpracování: R. Blažková, M. Vaňurová, J. Panáčová

KOMBINATORICKÉ ÚLOHY

Na prvním stupni ZŠ není kombinatorika, jako téma zařazena do výuky matematiky, ale rozvíjení kombinačního myšlení žáků lze docílit právě řešením kombinatorických úloh. Snadněji si pak poradí s kombinatorickými úlohami, které jsou zařazeny do vyšších ročníků.

Pojem **kombinační myšlení** je schopnost či dovednost, při kterých si žáci

- uvědomují, zda v dané skupině existují prvky požadovaných vlastností,
- provádí výběr prvků ze skupiny podle požadovaných vlastností,
- provádí rozdělování prvků dané skupiny na základě určitého požadavku,
- provádí uspořádání prvků dané skupiny zadaným způsobem,
- poznávají, zda se jedná o skupiny uspořádané nebo neuspořádané,
- rozlišují, zda se prvky ve skupinách mohou nebo nemohou opakovat,
- nachází pravidlo pro vyhledávání všech skupin splňujících dané podmínky.

K řešení kombinatorických úloh žáci využívají nejčastěji experimentální metody, například výčtem prvků nebo pomocí grafického znázornění, obrázků, stromů logických možností či tabulek. Tyto činnosti směřují k tomu, aby se žáci postupně naučili hledat všechny možnosti dané úlohy, případně sami najít a vysvětlit pravidlo, podle kterého by postupovali. Učí se rozlišovat jednotlivé skupiny – **kombinace, variace, permutace** tak, aby byli schopni v budoucnu správně volit odpovídající vztahy. Kombinatorické myšlení má pro žáka význam rovněž v běžném životě. Každý člověk často něco vybírá, zvažuje různé možnosti výběru, rozhoduje se a hledá pro sebe efektivní řešení. S kombinačním myšlením se děti setkávají od malička při různých deskových hrách, jako např. *pexeso*, *karty*, *Člověče, nezlob se*, apod. Deskových her, které jsou založeny na kombinačním myšlení, je na trhu velká spousta (*Osadníci z Katanu*, *Carcassonne*, *Ticket to ride*, *Fazole*, *Bobří banda*, *Krycí jména* a mnohé další). Rovněž hra na hudební nástroj je založena na kombinačním myšlení.

V následujícím textu si připomeneme pojmy z kombinatoriky, které znáte ze střední školy:

a) <u>Kombinace bez opakování</u>

- Vytváříme *k* prvkové skupiny z *n* prvků, ve kterých <u>nezáleží na pořadí prvků</u>, přičemž prvky se ve skupině neopakují
- Těmto *k* prvkovým skupinám z *n* prvků říkáme ***k* prvkové kombinace bez opakování**
- Počet všech *k* prvkových kombinací bez opakování z *n* prvků vyjádříme vzorcem

$$K(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- Výrazu $\binom{n}{k}$ říkáme **kombinační číslo** a čteme jej „***n* nad *k***“.
- Výraz čteme „**n faktoriál**“, přičemž platí $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

b) <u>Variace bez opakování</u>

- Vytváříme *k* prvkové skupiny z *n* prvků, ve kterých <u>záleží na pořadí prvků</u>, přičemž prvky se ve skupině neopakují
- Těmto *k* prvkovým skupinám z *n* prvků říkáme ***k* prvkové variace bez opakování**
- Počet všech *k* prvkových variací bez opakování z *n* prvků vyjádříme vzorcem

$$V(k, n) = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot k! = (n-k+1)!$$

c) <u>Permutace bez opakování</u>

- Vytváříme *n* prvkové skupiny z *n* prvků, ve kterých <u>záleží na pořadí prvků</u>, přičemž prvky se ve skupině neopakují
- Těmto *n* prvkovým skupinám z *n* prvků říkáme ***n* prvkové permutace bez opakování**
- Počet všech *n* prvkových permutací bez opakování z *n* prvků vyjádříme vzorcem

$$P(n) = n!$$

Žáci 1. stupně ZŠ výše uvedené pojmy kombinace, variace ani permutace bez opakování pochopitelně neznají, neznají ani vzorec pro určení jejich počtu. Kombinatorické úlohy tedy řeší nejčastěji experimentálně nebo pomocí grafického znázornění, jak bylo uvedeno výše.

Do dalšího textu jsou vybrány kombinatorické úlohy. Pokuste se tyto úlohy nejdříve řešit metodou žákovského řešení a pak si výsledek můžete ověřit prostřednictvím vzorců.

Úlohy

a) <u>Kombinace bez opakování</u>

1. Pět hochů Tomáš, Filip, Jan, Petr a Zbyněk si podali navzájem každý s každým ruce. Kolik celkem proběhlo takovýchto podání?

2. Pět dívek Dana, Hana, Jana, Zdena a Katka hrají tenis každá s každou. Kolik zápasů celkem sehrají? Poznámka: Zadání úlohy analogické se zadáním úlohy 1.

3. Na přímce je vyznačeno 5 různých bodů. Kolik úseček je těmito body určeno?

4. V rovině je dáno 5 různých bodů, žádné tři neleží v jedné přímce. Kolik přímek a kolik úseček je těmito body určeno? Poznámka: Zadání úlohy analogické se zadáním úlohy 1.

5. Na zahradě si hrají 4 děti. Maminka potřebuje, aby 2 z nich přišly a pomohly jí. Kolik takovýchto dvojic pomocníků může maminka využít?

6. Vedoucí skautského tábora vybírá 3 děti z oddílu, které ponesou při nástupu vlajku ke stožáru. V oddílu je 6 dětí. Kolik existuje možností pro sestavení těchto trojic?

7. Je dáno pět přirozených čísel. Zapište všechny příklady na:
   a) Sčítání dvou různých čísel (nerozlišujeme pořadí sčítanců),
   b) Sčítání tří různých čísel (nerozlišujeme pořadí sčítanců),
   c) Odčítání menšího čísla od většího.

b) <u>Variace bez opakování</u>

8. Máme čtyři kostky – červenou, modrou, bílou a zelenou. Kolik různých věží postavíme ze tří různobarevných kostek?

9. Kolik různých
   a) dvojciferných čísel,
   b) trojciferných čísel,

   můžeme zapsat pomocí číslic 1, 2, 3, 4, jestliže se v zápisu čísla vyskytuje každá číslice nejvýše jednou?

10. Kolik trojciferných čísel můžeme sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, jestliže se číslice v zápisu čísla neopakují?

11. Kolik trojciferných sudých čísel můžeme sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, jestliže se číslice v zápisu čísla neopakují?

12. V městské radě je celkem 5 lidí, z nichž se má zvolit starosta a místostarosta. Kolik existuje možností pro volbu starosty a místostarosty, když na obou pozicích nemůže být tentýž člověk?

c) **<u>Permutace bez opakování</u>**

13. Pomocí číslic 5, 6, 7 zapište všechna trojciferná čísla tak, aby se v zápisu čísla neopakovala.

14. Čtyři děti stojí za sebou v řadě. Kolika různými způsoby se mohou za sebe postavit?

15. V městské radě jsou celkem 4 lidé, z nichž se má zvolit starosta, místostarosta, tajemník a pokladník. Kolik existuje možností pro volbu jednotlivých pozic, když na téže pozici nemůže být tentýž člověk?

16. Ve středu mají žáci 5 vyučovacích hodin: matematiku, český jazyk, vlastivědu, přírodovědu a tělesnou výchovu. Kolika způsoby je možné sestavit rozvrh hodin pro tento den?

d) <u>Skupiny s opakováním prvků</u>

V běžném životě se můžeme setkat se skupinami prvků, které se ve skupině opakují. Vytváříme pak *k* prvkové kombinace, *k* prvkové variace či *n* prvkové permutace s opakováním.

17. Kolik
    a) dvojciferných čísel,
    b) trojciferných čísel,

    můžeme zapsat pomocí číslic 1, 2, 3, 4, jestliže se v zápisu čísla mohou číslice opakovat?

18. Zapište všechna pěticiferná čísla, ve kterých se vyskytují pouze cifry 3 a 7.

19. Kolik přeskupení písmen získáme ze slov
    a) ANNA
    b) ROKOKO?

20. Kolika způsoby můžeme navléknout 6 korálků – 3 bílé a 3 červené?

21. V prodejně mají tři druhy lízátek. Chceme koupit 5 lízátek. Kolik možností máme?