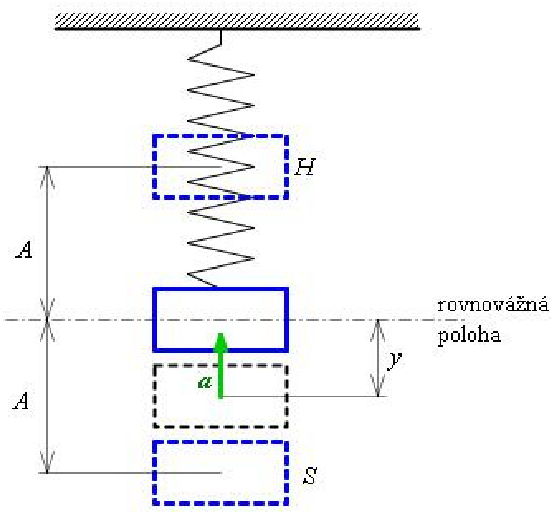
1.7. Mechanické kmitání

1. Umět vysvětlit princip netlumeného kmitavého pohybu.
2. Umět srovnat periodický kmitavý pohyb s periodickým pohybem po kružnici.
3. Znát charakteristické veličiny periodického pohybu periodu, frekvenci, úhlovou frekvenci a jejich jednotky.
4. Znát pojmy okamžitá výchylka, okamžitá rychlost, okamžité zrychlení a zapsat rovnice, které je popisují.
5. Vysvětlit pojmy maximální výchylka (amplituda), maximální rychlost, maximální zrychlení.
6. Vědět, co je síla pružnosti.
7. Umět popsat netlumený kmitavý pohyb z hlediska kinetické energie, potenciální energie, celkové energie.
8. Umět definovat zákon zachování energie netlumeného kmitavého pohybu.
9. Vysvětlit pojem matematické kyvadlo.
10. Vysvětlit pojem fyzické kyvadlo.

.

Kmitání je takový pohyb hmotného bodu (tělesa), při němž hmotný bod nepřekročí konečnou vzdálenost od určité polohy, kterou nazýváme rovnovážnou polohou RP. Pohybuje se periodicky z jedné krajní polohy (H) do druhé krajní polohy (S) a zpět. Jakýkoliv kmitající objekt se nazývá oscilátor.

Mechanické kmity hmotných bodů prostředí mají tu výhodu, že jsou názorné, a proto je studujeme nejdříve.



Obr.1.7.-1a

Ovšem za kmity (oscilace) považujeme jakýkoliv opakující se periodický děj, při němž dochází k pravidelné změně libovolné fyzikální veličiny v závislosti na čase. Například při periodické změně velikosti a orientace intenzity elektrického pole nebo intenzity magnetického pole hovoříme o elektrických nebo magnetických kmitech. Popisují je stejné rovnice.

1.7.1. Kmitavý pohyb netlumený

Pro jednoduchost a názornost je výhodné představit si oscilátor jako kuličku (libovolné těleso) hmotnosti m, kterou zavěsíme na ocelovou pružinku o určitých materiálových vlastnostech. Pružina je charakterizovaná veličinou k, kterou nazýváme tuhost pružiny. Jednotkou tuhosti pružiny je $N.m^{-1}$.

V případě, že na pružinku zavěsíme závaží hmotnosti m, pak se pružinka se působením tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ postupně prodlužuje.

Následkem pružnosti vzniká v pružině síla pružnosti $\boldsymbol{F}_p$, jejíž velikost se v závislosti na prodloužení zvětšuje.

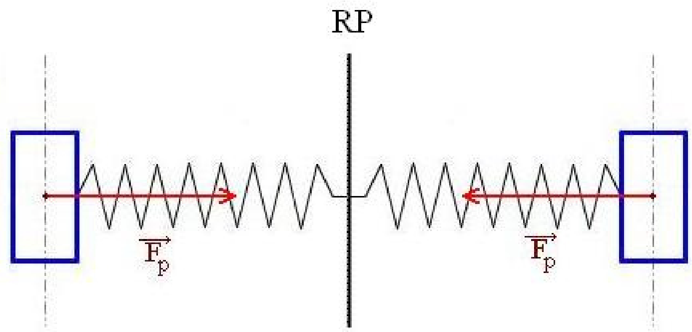
Je orientovaná opačným směrem než tíhová síla. Konstantou úměrnosti je tuhost pružiny k. Po určité době, ve které se pružinka protahuje, se velikosti tíhové síly a síly pružnosti vyrovnají a kulička se ustálí ve stabilní rovnovážné poloze RP a platí, že $\boldsymbol{F}_G = -\boldsymbol{F}_p$

Pokud nyní vychýlíme působením vnější síly F kuličku z rovnovážné polohy do určité krajní polohy a uvolníme, vrací se zpět do rovnovážné polohy.
Setrvačností projde rovnovážnou polohou do druhé krajní polohy a opět se vrací k rovnovážné poloze.

Děj se periodicky opakuje mezi krajními polohami KP 1 a KP 2. Největší vzdálenost kuličky od rovnovážné polohy nazýváme amplitudou a značíme A. Okamžitá vzdálenost je okamžitá výchylka (elongace) a značíme ji y. Jednotkou amplitudy a okamžité výchylky je metr.
Síla pružnosti je úměrná okamžité výchylce a je charakterizovaná vztahem

$$\boldsymbol{F}_p = -k\,\boldsymbol{y}\,. \qquad 1.7.\text{-}1$$

Periodicky mění svou velikost a rovněž i orientaci v závislosti na okamžité poloze. V amplitudě je maximální a v rovnovážné poloze je nulová. Znaménko $(-)$ vyjadřuje fakt, že je orientovaná proti pohybu a vždy směřuje do rovnovážné polohy.



Obr. 1.7.-1b

Kmitavý pohyb je pohyb nerovnoměrný, protože při průchodu rovnovážnou polohou má kulička maximální rychlost. Postupně se její rychlost zmenšuje a v krajních polohách se zastaví. Její rychlost je zde nulová.

Kmitavý pohyb je pohyb periodický. Lze jej srovnat s jiným periodickým pohybem, a sice pohybem po kružnici.

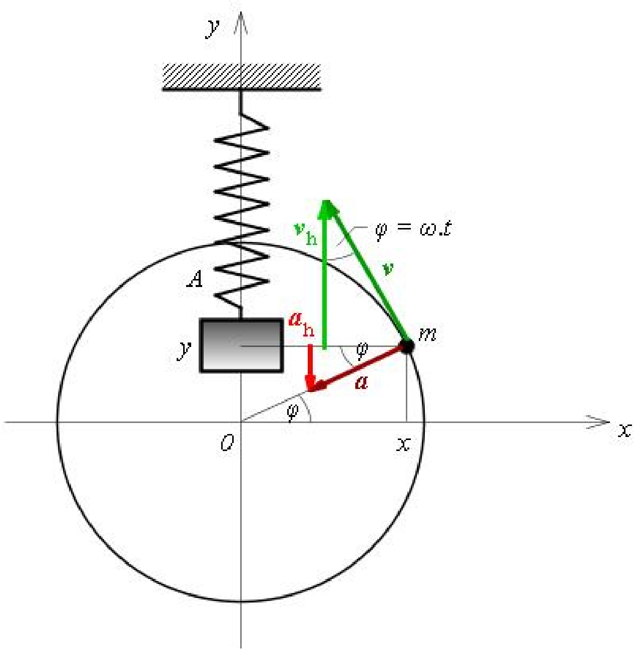
Doba, za kterou se kulička dostane z jedné krajní polohy do druhé a zpět, se nazývá perioda *T*, podobně jako doba jednoho oběhu hmotného bodu (kuličky) po kružnici. Převrácená hodnota doby kmitu (periody) je frekvence *f*. Jednotkou periody je s , jednotkou frekvence je s^{-1}. Platí,

že $f = \dfrac{1}{T}$.

Při rovnoměrném pohybu po kružnici je úhlová dráha $\varphi = \omega t$.

Úhlová rychlost pohybu po kružnici je $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Při kmitavém pohybu používáme pro ω termín úhlová frekvence a pro φ označení fáze. Jednotkou ω je rad.s^{-1}, jednotkou fáze φ je rad.



Obr. 1.7.-2

Amplituda *A* je totožná co do velikosti s poloměrem kružnice *r*. Vektor $\boldsymbol{v_h}$, který představuje velikost okamžité rychlosti kmitavého pohybu, je roven kolmému průmětu obvodové rychlosti $\boldsymbol{v}$ do horizontálního směru. Vektor $\boldsymbol{a_h}$ představuje kolmý průmět vektoru zrychlení do horizontálního směru. Je orientovaný proti výchylce, protože pohyb brzdí.

Poznámka:
Radián je doplňková jednotka soustavy SI, a proto ji nelze vyjádřit pomocí základních jednotek. Jednotka úhlové frekvence rad.s^{-1} vyjádřená v základních jednotkách, je s^{-1}. Takto se používá při vyjadřování jednotek jiných fyzikálních veličin obsahujících úhlovou frekvenci ω nebo fázi φ.

1.7.1.1. Rovnice netlumeného kmitavého pohybu

Síla pružnosti působící harmonický kmitavý pohyb je $F_p = -k\,y$.

Tuto sílu lze podle Newtonova pohybového zákona zapsat ve tvaru

$$m\,a = -k\,y\,. \qquad 1.7.\text{-}2$$

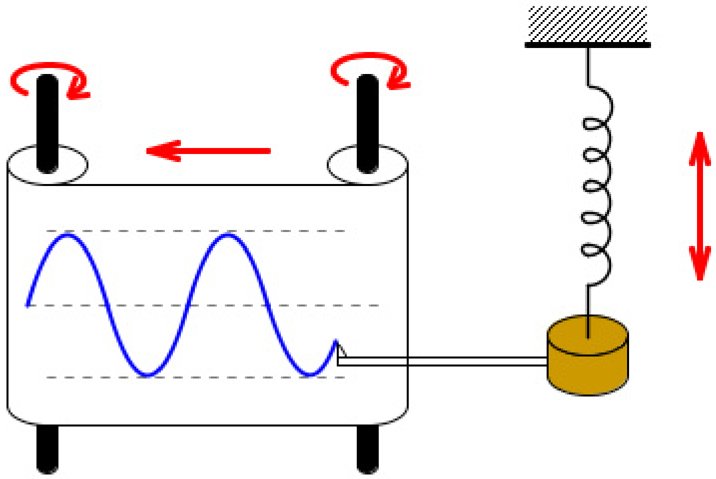
Dalším odvozením a použitím substituce $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ získáme pohybovou rovnici netlumeného kmitavého pohybu .

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 . \qquad 1.7.\text{-}3$$

Tato rovnice je diferenciální pohybovou rovnicí netlumeného kmitavého pohybu.

Jejím řešením je rovnice charakterizující dráhu hmotného bodu (okamžitou výchylku *y*), kde po vyřešení získáme rovnici

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad 1.7.\text{-}4$$



Obr. 1.7.-3.

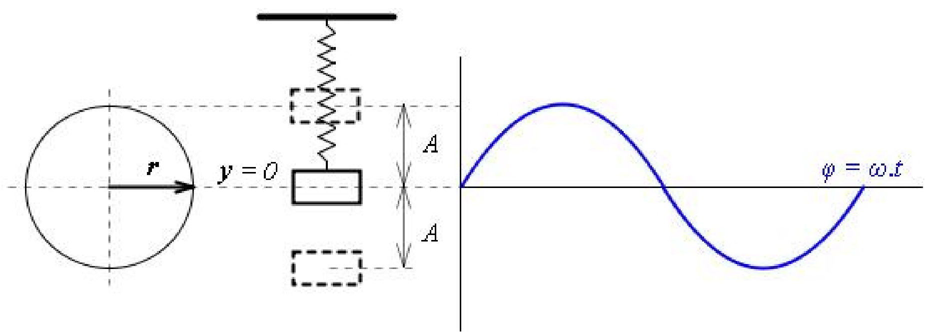
kde A je amplituda kmitu, ω je úhlová frekvence netlumeného kmitavého pohybu, φ_0 je počáteční fáze. Jednotkou počáteční fáze je *rad*. Počáteční fáze určuje velikost okamžité výchylky v čase $t = 0$ s.

Výraz v závorce je fáze pohybu φ

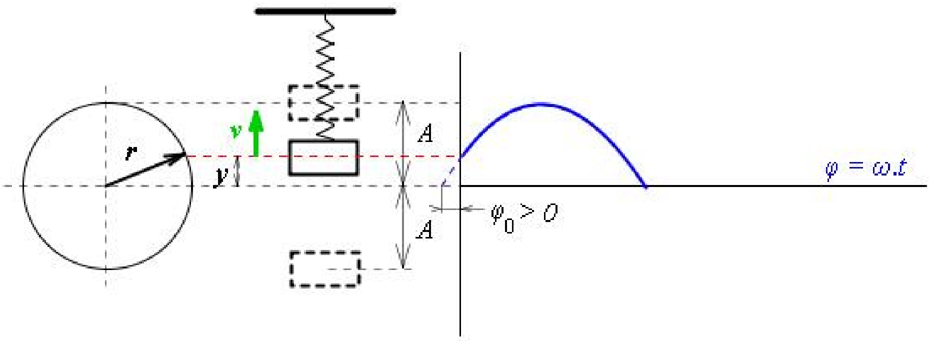
$$\varphi = \omega t + \varphi_0 .$$

Vzhledem k tomu, že se při kmitavém pohybu jedná o periodickou změnu okamžité výchylky *y* v závislosti na čase *t*, lze tuto veličinu v časovém rozvinutí popsat pomocí periodické funkce *sinus*.Takový pohyb nazýváme **harmonickým pohybem**.

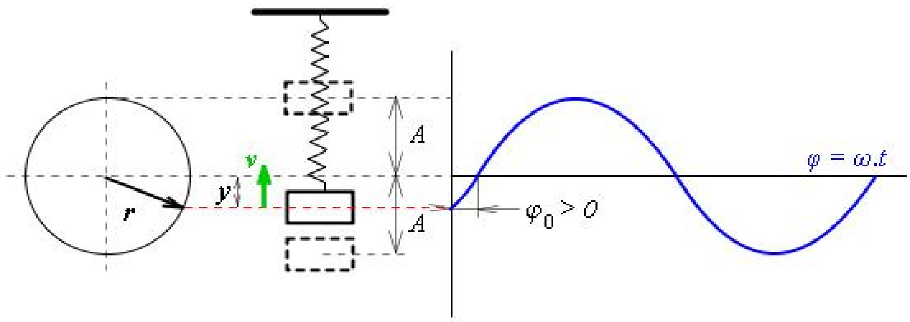
Na obrázcích 1.7.-4 až 1.7.-6 jsou postupně zakresleny případy, kdy je závaží v okamžiku, kdy je v spuštěn čas kmitání, v různých polohách.



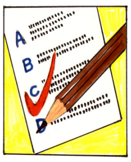
Obr. 1.7.-4



Obr. 1.7.-5a



Obr. 1.7.-5b



TO 1.7.-1. Těleso o hmotnosti 0,2 kg kmitá s úhlovou frekvencí 6 rad.s^{-1}.Určete velikost působící síly při výchylce 0,5 m.

a) 3,6 N
b) 36 N
c) 6 N
d) 60 N

TO 1.7.-2. Těleso o hmotnosti 1 kg kmitá s úhlovou frekvencí 2 rad.s^{-1}. Určete výchylku tělesa při působící síle 20 N.

a) 10 m
b) 5 m
c) 4 m
d) 16 m

TO 1.7.-3. Stanovte hmotnost tělesa kmitajícího s úhlovou frekvencí 2 rad.s^{-1}, které má při působící síle 8 N okamžitou výchylku 0,2 m.

a) 10 kg
b) 3,2 kg
c) 0,8 kg
d) 160 kg

TO 1.7.-4. Těleso kmitá s okamžitou výchylkou danou rovnicí $y = 0{,}5\sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$. Určete amplitudu kmitu.

a) 6 cm
b) 0,5 cm
c) 0,5 cm
d) 6 cm

TO 1.7.-5. Těleso kmitá s okamžitou výchylkou danou rovnicí $y = 0{,}2\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Určete počáteční fázi.

a) $\frac{\pi}{2}$ rad

b) 8π rad

c) 4π rad

d) 0,2 rad

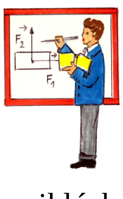
TO 1.7.-6. Těleso kmitá s okamžitou výchylkou danou rovnicí $y = 0{,}6\sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Určete periodu kmitu.

a) $\frac{1}{3}$ s

b) 3 s

c) 6 s

d) $\frac{1}{6}$ s



Závaží o hmotnosti 4 kg je zavěšeno na pružinu. Pružina se tím prodlouží o 16 cm vzhledem ke své nezatížené délce.

a) Jaká je tuhost pružiny?

b) Dané závaží odstraníme a na tutéž pružinu zavěsíme závaží o hmotnosti 0,5 kg. Poté pružinu ještě poněkud protáhneme a uvolníme. Jaká bude perioda vzniklých kmitů?

---

m =4 kg, y = 0,16 , k = ?

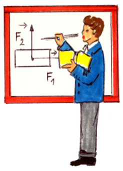
a) Na těleso působí síla pružnosti a tíhová síla, které jsou v rovnováze pak

$$k\ y = m\ g \Rightarrow k = \frac{m\ g}{y} \Rightarrow k = \frac{4.9{,}81}{0{,}16} \Rightarrow k = 245{,}25 \quad \mathrm{N.m^{-1}}$$

Tuhost pružiny je 245,25 N.m^{-1}.

b) Pro tuhost pružiny platí $k = m\,\omega^2 = \dfrac{4\,\pi^2}{T^2} \Rightarrow T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}5}{245{,}25}} = 0{,}284$ s.

Perioda kmitů je 0,284 s.



Na píst, který harmonicky kmitá ve svislém směru, položíme závaží.

a) Je-li perioda kmitů pístu *1* s, při jaké amplitudě výchylky se závaží oddělí od pístu?
b) Je-li amplituda výchylky kmitů pístu *5* cm, jaká může být největší frekvence, pro kterou zůstává závaží nepřetržitě v kontaktu s pístem?

<u>T = 1 s, A = ?</u>

a) Na těleso působí síla pružnosti a tíhová síla, které jsou v rovnováze, pak

$$k\,A \Rightarrow A = \frac{m\,g}{k} \Rightarrow A = \frac{m\,g\,T^2}{m\,4\pi^2} \Rightarrow A = \frac{g\,T^2}{4\,\pi^2} = 24{,}9 \text{ m.}$$

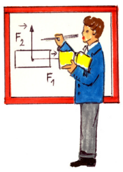
Amplituda je 24,9 m.

b) Podobně jako v předchozím případě:

pak

$$k\,A = m\,g \Rightarrow m\,\omega^2\,A = m\,g \Rightarrow 4\,\pi^2\,f^2 A = g \Rightarrow f = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{g}{A}} = 2{,}23 \text{ Hz.}$$

Frekvence kmitů je 2,23 Hz.



Těleso koná netlumený harmonický pohyb s amplitudou výchylky 3 m, frekvencí 4 Hz. V čase t = 0 s se nachází ve vzdálenosti 1,5 m od rovnovážné polohy. Napište rovnici pro okamžitou výchylku tělesa.

<u>f = 4 Hz, A = 3 m, y = 1,5 m</u>

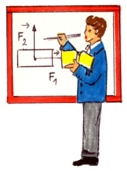
Nejprve určíme počáteční fázi z rovnice pro okamžitou výchylku $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, pak

$1{,}5 = 3\sin(2\,\pi\,4.0 + \varphi_0) \Rightarrow 1{,}5 = 3\sin(\varphi_0)$.

Úpravou dostaneme $\dfrac{1}{2} = \sin\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$ rad. Nyní opět použijeme vztah pro okamžitou výchylku $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ a dosadíme zadané hodnoty, pak

$$y = 3\,\sin\left(2\,\pi\,4\,t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = 3\,\sin\left(8\pi\,t + \frac{\pi}{6}\right) \text{(m,s).}$$

Rovnice pro okamžitou výchylku je $y = 3\sin\left(8\,\pi\,t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (m,s).



Těleso hmotnosti 4 kg koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 0{,}2 \sin(0{,}5\,\pi t)$ (m,s). Určete velikost síly, která působí na toto těleso při výchylce 0,1 m.

m = 4 kg, A =0,2 m, ω = 0,5 π rad.s^{-1}

Sílu určíme podle vztahu $F = k\,y = m\,\omega^2 y = 4.(0{,}5\pi)^2.0{,}1 = 0{,}98$ N.
Síla je 0,98 N.

KO 1.7.-1. Co je tuhost pružiny *k*

KO 1.7.-2. Vysvětlete význam síly pružnosti.

KO 1.7.-3. Určete souvislost mezi úhlovou frekvencí ω a tuhostí pružiny *k*.

KO 1.7.-4. Zapište periodu kmitů pomocí konstanty *k*.

KO 1.7.-5. Zapište pohybovou rovnici netlumených kmitů.

KO 1.7.-6. Co je harmonický pohyb?

KO 1.7.-7. Co je amplituda netlumeného kmitavého pohybu?

KO 1.7.-8. Co je okamžitá výchylka a zapište její rovnici?

KO 1.7.-9. Co je fáze a počáteční fáze kmitavého pohybu?

KO 1.7.-10. Ve kterém bodě má síla pružnosti maximální hodnotu a ve kterém bodě je nulová?

1.7.1.2. Rychlost a zrychlení netlumeného kmitavého pohybu

Rychlost, kterou se těleso při kmitavém pohybu pohybuje a její změnu, si velmi dobře představíme, když pozorujeme pohyb tenisty na zadní čáře tenisového kurtu. Sledujeme-li tenisového hráče na zadní čáře při pohybu od levé krajní čáry k pravé, vidíme, že na krajní čáře se zastaví, provede úder a pohybuje se zpět. Při návratu zvětšuje rychlost, při průchodu středem je největší a pak opět zpomaluje, aby se na druhé krajní čáře opět zastavil.
Provádí v podstatě kmitavý pohyb. Rychlost v krajních polohách (amplitudách), kdy se musí hráč zastavit, je nulová. Rychlost, kdy prochází středem (rovnovážnou polohou) je maximální.
Rychlost jakéhokoliv pohybu, a tudíž i pohybu kmitavého, určíme derivací dráhy podle času.

Protože drahou kmitavého pohybu je okamžitá výchylka, pak derivujeme rovnici pro výchylku podle času a dostaneme

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A\,\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad 1.7.\text{-}6$$

kde výraz $v_0 = A\,\omega$ představuje maximální rychlost v_0, kterou kmitající objekt prochází rovnovážnou polohou.
V amplitudě je rychlost nulová.
Pak rovnice

$$v = v_0 \cos(\omega\, t + \varphi_0) \qquad 1.7.\text{-}7$$

je rovnice rychlosti kmitavého pohybu.
Zrychlení dostaneme derivací rychlosti podle času. Derivujeme tedy rovnici dále.
Pak zrychlení je

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\ \omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \qquad 1.7.\text{-}8$$

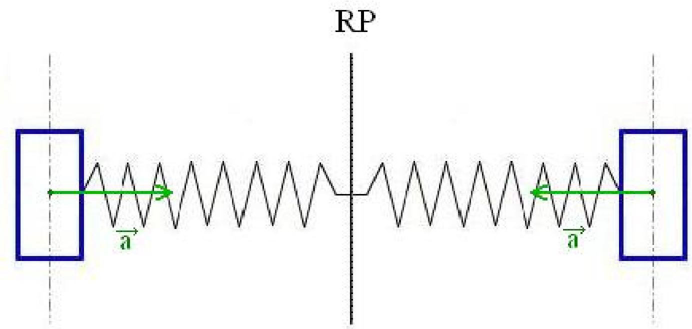
kde výraz $a_0 = A\ \omega^2$ je maximální zrychlení a_0. Toto zrychlení má hmotný bod v amplitudě.
V rovnovážné poloze je zrychlení nulové.Pak rovnice zrychlení je

$$a = -\,a_0\ \sin\left(\omega t + \varphi_0\right). \qquad 1.7.\text{-}9$$

Po úpravě lze rovnici zrychlení zapsat ve tvaru

$$a = -\omega^2\ y\,. \qquad 1.7.\text{-}10$$

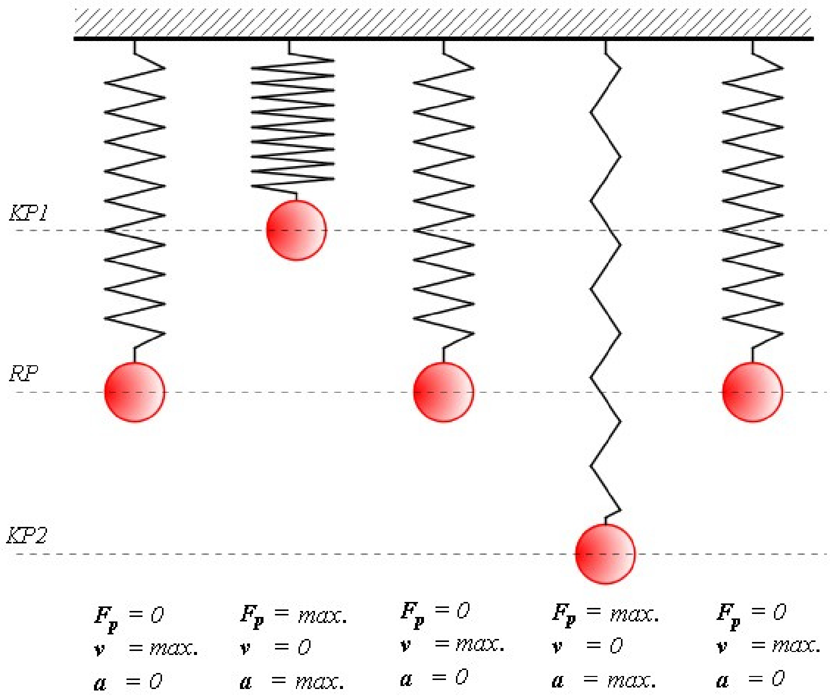
Zrychlení $\boldsymbol{a}$ má opačný směr než okamžitá výchylka $\boldsymbol{y}$.



Obr.1.7.-6

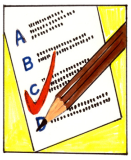
Zrychlení je vždy orientováno do rovnovážné polohy RP, v amplitudě má maximální hodnotu. V této poloze je maximální rovněž i síla pružnosti F_p.
Platí

$$F_p = m\,a = -\,m\,\omega^2\ y = -\,k\ y\,.$$



Obr.1.7.-7

Hodnoty síly pružnosti, rychlosti a zrychlení v mezních polohách jsou na předcházejícím obrázku.



TO 1.7.-7. Určete vztah pro maximální rychlost.

a) $v_0 = A\omega$

b) $v_0 = A^2\omega$

c) $v_0 = A\omega^2$

d) $v_0 = \frac{1}{2}A\omega$

TO 1.7.-8. Ve kterých bodech je rychlost maximální

a) v amplitudě
b) v rovnovážné poloze

TO 1.7.-9. Ve kterých bodech je zrychlení nulové

a) v amplitudě
b) v rovnovážné poloze

TO 1.7.-10. Ve kterých bodech působí na kmitající těleso maximální síla?

a) v amplitudě
b) v rovnovážné poloze

Určete velikost rychlosti a zrychlení ve druhé sekundě kmitavého pohybu, jestliže okamžitá výchylka je dána vztahem $y = 0{,}4\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (m,s).

Z rovnice pro výchylku $y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$ určíme amplitudu A = 0,4 m, úhlovou frekvenci $\omega = 5\pi\,\mathrm{rad.s^{-1}}$ a počáteční fázi $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad.

a) dosadíme do vztahu pro okamžitou rychlost $v = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$.

Pak

$$v = 0{,}4.5\pi\cos\left(5\pi 2 + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}4.5\pi\cos\left(10\pi + \frac{\pi}{6}\right).$$

Protože cosinus je funkce periodická můžeme psát

$$v = 0{,}4.5\pi\cos\frac{\pi}{6} = 0{,}4.5.3{,}14.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5{,}4\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

b) dosadíme do vztahu pro okamžité zrychlení $a = -A\omega^2\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$

Pak

$$a = -0{,}4.(5\pi)^2\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}4.(5\pi)^2\sin\left(10\pi + \frac{\pi}{6}\right).$$

Protože sinus je funkce periodická můžeme psát

$$a = -0{,}4.(5\pi)^2\sin\frac{\pi}{6} = -0{,}4.(5.3{,}14)^2.\frac{1}{2} = -49{,}3\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Velikost rychlosti daného kmitavého pohybu ve druhé sekundě je 5,4 m.s^{-1}, velikost zrychlení téhož pohybu je ve druhé sekundě 49,3 m.s^{-2}.

KO 1.7.-11. Zapište rovnici okamžité rychlosti kmitavého pohybu.

KO 1.7.-12. Určete maximální rychlost kmitavého pohybu. v_0

KO 1.7.-13. Ve kterém bodě má těleso maximální rychlost?

KO 1.7.-14. Zapište rovnici zrychlení.

KO 1.7.-15. Ve kterém bodě je zrychlení maximální?

KO 1.7.-16. Ve kterém bodě má síla pružnosti v závislosti na zrychlení maximální hodnotu a ve kterém bodě je nulová?

1.7.1.3. Energie netlumeného kmitavého pohybu

Celková energie E harmonického pohybu je v každém okamžiku rovna součtu energie kinetické E_k a energie potenciální E_p

$$E = E_k + E_p \,. \qquad 1.7.\text{-}11$$

Kinetická energie je určena známým vztahem $E_k = \frac{1}{2} m v^2$. Po dosazení odvozeného vztahu pro rychlost $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ harmonického pohybu dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2} m \, \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \qquad 1.7.\text{-}12$$

Použitím vztahu

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

zapíšeme kinetickou energii ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{2} \, k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \qquad 1.7.\text{-}13$$

Kinetická energie je závislá na okamžité hodnotě rychlosti. Mění v průběhu harmonického pohybu svou velikost.

Poznámka:
Protože je určená rychlostí oscilátoru, je v amplitudách nulová, při průchodu rovnovážnou polohou je maximální.
Je stanovena výrazem

$$E_{k\max} = \frac{1}{2} \, k A^2 . \qquad 1.7.\text{-}14$$

Potenciální energii pružnosti získáme jako práci W, potřebnou k vychýlení hmotného bodu z rovnovážné polohy do vzdálenosti y. Při výchylce y působí na hmotný bod ***síla pružnosti***

$$F_p = -k\,y \,.$$

Potenciální energii pružnosti pak stanovíme výpočtem

$$E_p = W = \int -F_p \,\mathrm{d}y = \int -(-k\,y)\,\mathrm{d}y = \int k\,y \;\mathrm{d}y = \frac{1}{2} k\,y^2 .$$

Tato práce je představuje přírůstek potenciální energie pružnosti hmotného bodu vzhledem k potenciální energii hmotného bodu v rovnovážné poloze při vychýlení do vzdálenosti y. Potenciální energie pružnosti (protože je ovlivňovaná silou pružnosti) mění během periody svou velikost v závislosti na výchylce y. V libovolném časovém okamžiku má hodnotu určenou vztahem

$$E_p = \frac{1}{2} \, k \, A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0). \qquad 1.7.\text{-}15$$

Potenciální energie pružnosti závisí na okamžité výchylce. Mění v průběhu harmonického pohybu svou velikost.

Poznámka:
V rovnovážné poloze je potenciální energie pružnosti nulová, v amplitudách je maximální a její hodnota je určená vztahem

$$E_{p_{max}} = \frac{1}{2} k A^2 . \qquad 1.7.\text{-}16$$

Celková energie kmitavého pohybu je určena součtem energie kinetické a potenciální energie pružnosti

Jestliže sečteme okamžité hodnoty kinetické energie a potenciální energie pružnosti, dostaneme celkovou energii kmitavého pohybu.

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

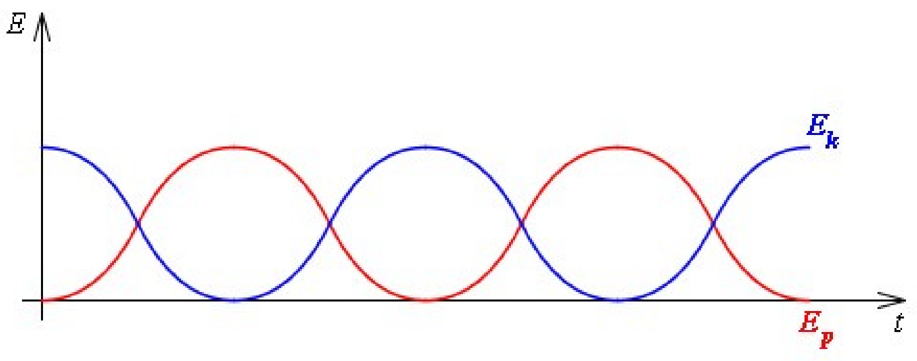
Úpravou získáme

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \left(\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)\right) = \frac{1}{2} k A^2 .$$

Pro celkovou energii kmitavého pohybu tedy platí vztah

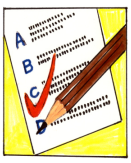
$$E = \frac{1}{2} k A^2 . \qquad 1.7.\text{-}17$$

Protože tuhost pružiny k je pro každou pružinu konstantní a amplituda A netlumených kmitů je rovněž konstantní, je i celková energie harmonického pohybu konstantní.



Obr.1.7.-8

Energie potenciální a kinetická jsou s časem proměnné a přeměňují se navzájem.



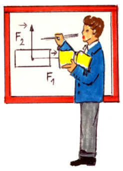
TO 1.7.-11. Těleso o hmotnosti 2 kg koná harmonický pohyb podle rovnice $y = 0{,}2 \sin 3\ t$. Jakou má kinetickou energii v rovnovážné poloze?
a) 0 J

b) 0,36 J
c) 0,04 J
d) 0,2 J

TO 1.7.-12. Těleso o hmotnosti 2 kg koná harmonický pohyb podle rovnice $y = 0{,}2\ \sin 3t$. Jakou má potenciální energii pružnosti v rovnovážné poloze?
a) 0 J
b) 0,6 J
c) 3 J
d) 9 J

TO 1.7.-13. Ve které poloze má těleso maximální kinetickou energii?
a) v amplitudě
b) v rovnovážné poloze

TO 1.7.-14. Ve které poloze má těleso maximální potenciální energii?
a)v amplitudě
b) v rovnovážné poloze



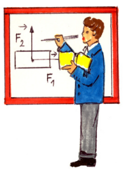
Těleso hmotnosti 2 kg koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 3\sin(2t)\left(\mathrm{m.s^{-1}}\right)$. Určete jeho potenciální energii v bodě vratu.

m = 2 kg, A = 3 m, ω = 2 rad.s^{-1},E_p = ?

Pro potenciální energii platí vztah $E_p = \frac{1}{2} k\, y^2$. V bodě vratu je výchylka rovna amplitudě,

$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} 2.2^2.3^2 = 36$ J.

Potenciální energie je 36 J.



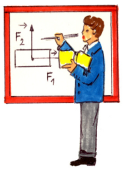
Těleso hmotnosti 2 kg koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 0{,}2\sin(3t)(\mathrm{m.s})$. Ve vzdálenosti 0,1 m od rovnovážné polohy má potenciální energii 0,09 J. Určete v této poloze jeho kinetickou energii.

m = 2 kg, A =0,2 m, ω =3 rad.s^{-1},E_p = 0,09 J, E_k = ?

Celková energie $E = \frac{1}{2} k\, A^2$ je rovna součtu $E_p + E_k = E$. Pak

$E_k = E - E_p = \frac{1}{2} m\, \omega\, A^2 - E_p = \frac{1}{2}\, 2.3^2 0{,}2^2 - 0{,}09 = 0{,}27$ J.

Kinetická energie je 0,027 J.



Těleso koná netlumený harmonický pohyb. Perioda pohybu je 2 s. Celková energie tělesa je 3.10^{-5} J a maximální síla působící na těleso má velikost $1{,}5.10^{-3}$ N. Určete amplitudu výchylky.

$T = 2$ s, $E = 3.10^{-5}$ J, $F_m = 1{,}5.10^{-3}$ N, $A = ?$

Celková energie je $E = \frac{1}{2} k A^2$, maximální síla je $F_m = k A$. Vyjádříme $k = \frac{F_m}{A}$. Dosadíme do vztahu pro energii, pak

$$E = \frac{1}{2} \frac{F_m}{A} A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} F_m A \Rightarrow A = \frac{2E}{F_m} = \frac{2.3.10^{-5}}{1{,}5.10^{-3}} = 4.10^{-5} \text{ m.}$$

Amplituda výchylky je 4.10^{-5} m.

KO 1.7.-17. Zapište vztah pro kinetickou energii hmotného bodu pohybujícího se netlumeným kmitavým pohybem.

KO 1.7.-18. Kdy je kinetická energie maximální a kdy je nulová?

KO 1.7.-19. Zapište vztah pro potenciální energii pružnosti hmotného bodu pohybujícího se netlumeným kmitavým pohybem.

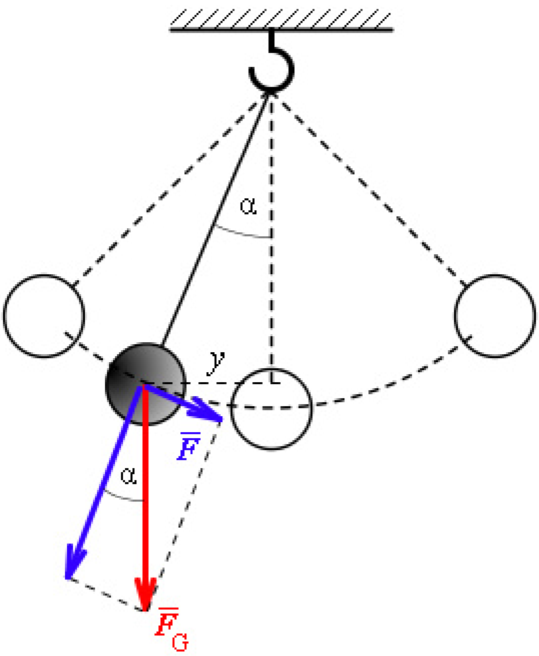
KO 1.7.-20. Kdy je potenciální energie pružnosti maximální a kdy je nulová?

KO 1.7.-21. Zapište vztah pro celkovou energii kmitavého pohybu.

KO 1.7.-22. Definujte zákon zachování energie netlumeného kmitavého pohybu.

1.7.1.4. Matematické kyvadlo

Pod pojmem matematické kyvadlo si představujeme hmotný bod *m*, který je upevněn na závěsu, jehož hmotnost můžeme zanedbat.
Hmotný bod se pohybuje vlivem tíhové síly $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$.



Obr. 1.7.-9

Jestliže kyvadlo vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel α, rozloží se tíhová síla na dvě navzájem kolmé složky.
Složka

$$F_n = m\,g\,\cos\alpha \tag{1.7.-18}$$

napíná závěs. Má směr závěsu. Nemá pohybový účinek na těleso.

Složka

$$F_t = m\,g\,\sin\alpha \tag{1.7.-19}$$

má směr tečny kruhového pohybu a směřuje vždy do rovnovážné polohy. Ovlivňuje rychlost hmotného bodu. Je to síla pohybová.

Protože je orientovaná proti vychýlení hmotného bodu z rovnovážné polohy zapíšeme ji vztahem

$$F_t = -m\,g\sin\alpha\,. \tag{1.7.-20}$$

Perioda kmitů matematického kyvadla je pak určena výrazem odvozeným z pohybové rovnice a ze vztahu

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\,. \tag{1.7.-21}$$

Protože

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,, \tag{1.7.-22}$$

je perioda kmitů matematického kyvadla T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{1.7.-23}$$

Určete periodu kmitů matematického kyvadla délky 50 cm umístěného ve výtahu, který se pohybuje se zrychlením 0,5 m.s^{-2} směrem vzhůru.

---

l = 0,5 m, a = 0,5 m.s^{-2}, g = 9,81 m.s^{-2}, T = ?

Každá soustava, která se pohybuje se zrychlením je *neinerciální vztažná soustava*. V takovéto soustavě se projevují setrvačné síly, které mají vždy opačný směr než je zrychlení soustavy. Vzhledem k tomu, že tíhové zrychlení ***g*** je orientováno směrem svislým a zrychlení ***a*** výtahu je při pohybu výtahu orientováno rovněž svislým směrem, pak se obě zrychlení sčítají perioda kmitů bude

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}\,,$$

$$T = 2.3{,}14.\sqrt{\frac{0{,}5}{9{,}81+0{,}5}} = 1{,}38\ \text{s}.$$

Perioda kmitů je 1,38 s.

Určete periodu kmitů matematického kyvadla ve stavu beztíže.

Perioda kmitů matematického kyvadla je $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Ve stavu beztíže je tíhové zrychlení nulové. Perioda kmitů je pak nekonečně velká a kyvadlo tedy bude v klidu. Jestliže při napnuté niti udělíme kuličce rychlost v orientovanou kolmo k niti (poloměru otáčení), začne se kulička pohybovat rovnoměrným pohybem po kružnici ve směru rychlosti v.

Nalezněte způsob, jak ze známé délky matematického kyvadla l stanovit tíhové zrychlení g.

K řešení použijeme dobu kyvu $\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Nejdříve změříme dobu kyvu τ_1 pro délku závěsu l_1 a pak dobu kyvu τ_2 pro délku závěsu $l_2 = l_1 - d$, kde d je přesně změřená vzdálenost.

Pak

$$\tau_1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}},\quad \tau_2 = \pi\sqrt{\frac{l_1-d}{g}}$$

Jestliže obě rovnice umocníme a od sebe odečteme, dostaneme postupně

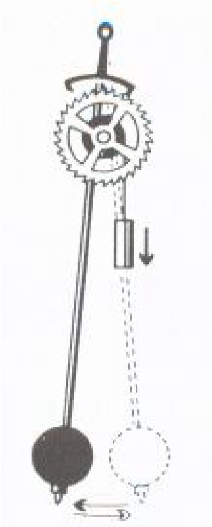
$$\tau_1^2 - \tau_2^2 = \frac{\pi^2}{g}\left(l_1 - l_1 + d\right)$$

$$g = \frac{\pi^2 d}{\tau_1^2 - \tau_2^2}\,.$$

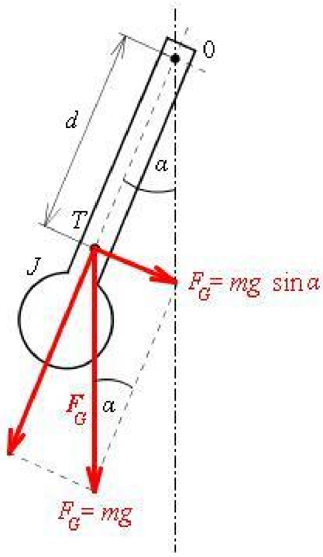
Tento výraz umožňuje stanovit hodnotu tíhového zrychlení v příslušné zeměpisné šířce.

1.7.1.5. Fyzické kyvadlo

Fyzické kyvadlo je dokonale tuhé těleso, které se může otáčet kolem pevné osy.
Tato osa neprochází těžištěm tělesa.



Obr. 1.7.-10



Obr. 1.7.-11

Libovolný bod fyzického kyvadla se pohybuje po kruhovém oblouku. Tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = m\,\boldsymbol{g}$ se při vychýlení z rovnovážné polohy o úhel α rozloží na dvě kolmé složky

$$F_n = m\,g\cos\alpha \qquad 1.7.\text{-}24$$

$$F_t = m\,g\sin\alpha\,. \qquad 1.7.\text{-}25$$

Pohybový účinek má složka tečná, která směřuje do rovnovážné polohy.
Pak je pohybová síla

$$F_t = -m\,g\sin\alpha\,. \qquad 1.7.\text{-}26$$

Pohybová rovnice otáčivého pohybu je

$$M = J\varepsilon\,, \qquad 1.7.\text{-}27$$

kde M je moment síly, J je moment setrvačnosti a ε je úhlové zrychlení. Úhlové zrychlení vypočteme jako druhou derivaci úhlu, o který je v každém okamžiku kyvadlo vychýlené z rovnovážné polohy

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}\,. \qquad 1.7.\text{-}28$$

Dalším odvozením získáme pohybovou rovnici fyzického kyvadla a dobu kmitu fyzického kyvadla, kterou stanovíme ze vztahu $\omega^2 = \dfrac{m\,g\,d}{J}$.

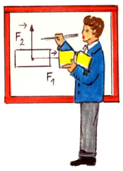
Protože

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{m\,g\,d}{J}, \qquad 1.7.\text{-}29$$

Perioda kmitů fyzického kyvadla bude

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,d}}\,. \qquad 1.7.\text{-}30$$

Při malých výchylkách je možné považovat pohyb fyzického kyvadla za přibližně harmonický.



Homogenní těleso o hmotnosti 800 g zavěšené v bodě A vzdáleném 50 cm od těžiště T vykoná za minutu 30 kmitů. Určete moment setrvačnosti tělesa.

m = 0,8 kg, d = 0,5 m, f = 0,5 s^{-1}, J = ?

$$f = \frac{30}{60} = 0{,}5\ \text{s}^{-1},$$

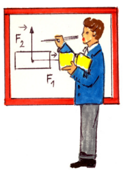
Ze vztahu pro periodu kmitů $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,d}}$ vyjádříme moment setrvačnosti J a periodu T zapíšeme jako $T = \frac{1}{f}$. Pak

$$J = \frac{1}{4\pi^2 f^2}\,m\,g\,d\,.$$

Po dosazení je

$$J = \frac{1}{0{,}8.3{,}14^2.0{,}5^2}.0{,}8.9{,}81.0{,}5 = 1{,}9\ \text{kg.m}^2.$$

Moment setrvačnosti je 1,9 kg.m^2.



Určete redukovanou délku fyzického kyvadla.

Redukovaná délka fyzického kyvadla je taková délka, se rovná délce matematického kyvadla se stejnou dobou kyvu jako dané fyzické kyvadlo.

Srovnáním vztahů pro dobu kmitu matematického a fyzického kyvadla postupně dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

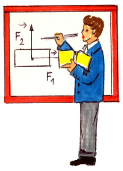
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,d}}\,.$$

Délku závěsu matematického kyvadla označíme L.
Pak je

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,d}}\,.$$

Z toho plyne, že redukovaná délka L je určena vztahem

$$L = \frac{J}{m\,d}\,.$$



Určete tíhové zrychlení pomocí reverzního kyvadla.

Reverzní kyvadlo je kovová tyč se dvěma břity ve vzájemné vzdálenosti L, kolem kterých se může otáčet. Vzdálenost L určuje redukovanou délku kyvadla s dobou kyvu

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

Na kyvadle je umístěná posuvná těžká čočka. Vyhledáme umístění, ve kterém je doba kyvu stejná vzhledem k oběma břitům. Pokud změříme dobu τ a délku L pro toto umístění, pak stanovíme tíhové zrychlení ze vztahu

$$g = \frac{\pi^2 L}{\tau^2}\,.$$

Reverzní kyvadlo je důležitou částí gravimetrických přístrojů. Slouží k určování tíhového zrychlení g a jeho změn v blízkosti velkých ložisek železné rudy v zemské kůře.

KO 1.7.-23. Vysvětlete pojem matematického kyvadla.

KO 1.7.-24. Určete periodu kmitů matematického kyvadla.

KO 1.7.-25. Určete frekvenci kmitů matematického kyvadla.

KO 1.7.-26. Vysvětlete pojem fyzického kyvadla.

KO 1.7.-27. Určete dobu kmitů fyzického kyvadla.

KO 1.7.-28. Určete frekvenci kmitů fyzického kyvadla.