2. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ NĚKOLIKA PROMĚNNÝCH

Def. 2.1: (Parciální derivace)

Nechť $1 \le k \le n$, ($n, k \in N$). Nechť funkce $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ je definovaná v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0, ..., x_n^0]$ a na množině

$A_k = \{ [x_1^0, x_2^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0] \mid x_k \in (x_k^0 - \delta; x_k^0 + \delta),$ kde $\delta > 0\}$.

Pak derivace $\varphi'_k(x_k^0)$ funkce $\varphi_k(x_k) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_k, ..., x_n^0)$ v bodě X^0 se nazývá parciální derivace funkce f v bodě X^0 podle proměnné x_k.

Značíme ji $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(X^0)$, $\dfrac{\partial f(X^0)}{\partial x_k}$, $f'_{x_k}(X^0)$, $f_{x_k}(X^0)$.

Pozn.: Nechť $M_k \subseteq R^n$ je množina všech bodů X, ve kterých existuje parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(X)$. Na množině M_k pak funkci definovanou předpisem $X \to \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(X)$ nazýváme parciální derivací funkce f podle proměnné x_k a značíme ji

$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ nebo f'_{x_k} nebo f_{x_k}.

Funkce n nezávisle proměnných má n parciálních derivací 1. řádu.

Věta 2.1: Nechť $\exists$ parciální derivace $f'_{x_k}(X^0), g'_{x_k}(X^0)$ a nechť $c \in \mathbf{R}$. Pak $\exists$ také parciální derivace $(f+g)'_{x_k}(X^0); (c.f)'_{x_k}(X^0); (f.g)'_{x_k}(X^0)$ a je-li $g(x^0) \neq 0$ také parciální derivace $(f/g)'_{x_k}(X^0)$ a platí:

$$(f+g)'_{x_k}(X^0) = f'_{x_k}(X^0) + g'_{x_k}(X^0)$$

$$(c.f)'_{x_k}(X^0) = c.f'_{x_k}(X^0)$$

$$(f.g)'_{x_k}(X^0) = f'_{x_k}(X^0).g(X^0) + f(X^0).g'_{x_k}(X^0)$$

$$(f/g)'_{x_k}(X^0) = \frac{f'_{x_k}(X^0).g(X^0) - f(X^0).g'_{x_k}(X^0)}{g^2(X^0)}$$

Věta 2.2: (Parciální derivace složené funkce)

Nechť má funkce $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ v bodě $X^0[x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0]$ spojité parciální derivace 1.řádu podle všech nezávisle proměnných.

Nechť zobrazení $g(t_1, t_2, ..., t_r) \equiv \left\{ \begin{matrix} g_1(t_1, t_2, ..., t_r) \\ \vdots \\ g_n(t_1, t_2, ..., t_r) \end{matrix} \right. \equiv X^0$ zobrazuje bod

$T^0 = [t_1^0, t_2^0, ..., t_r^0]$

do bodu X^0 a $\exists$ parciální derivace $\dfrac{\partial g_1}{\partial t_i}(T^0); \dfrac{\partial g_2}{\partial t_i}(T^0); .....; \dfrac{\partial g_n}{\partial t_i}(T^0), \quad i \in (1,2,...,r)$.

Označme $F = f(g_1, g_2, ..., g_n)$ složenou funkci $f \circ g$.

Pak ∃ $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}(T^0) = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X^0).\dfrac{\partial g_j}{\partial t_i}(T^0)$.

Def. 2.2: Říkáme, že funkce f má v bodě X^0 parciální derivaci druhého řádu podle proměnných x_k, x_l, (v tomto pořadí), právě když ∃ parciální derivace 1. řádu funkce $g(x_1, x_2, ..., x_n) = f'_{x_k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ v tomto bodě X^0 podle proměnné x_l. Tuto parciální derivaci 2. řádu značíme:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(X^0)$; $\quad f''_{x_k x_l}(X^0)$; $\quad f_{x_k x_l}(X^0)$. Lze rozšířit na celou funkci.

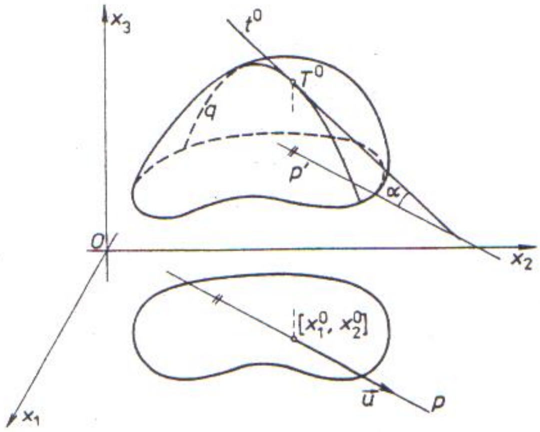
Analogicky značíme a definujeme parciální derivaci třetího a vyššího řádu.
Parciální derivaci nazýváme smíšenou, je-li $x_k \neq x_l$. Obecně neplatí $f''_{x_k x_l} = f''_{x_l x_k}$, tj. záleží na pořadí.

Věta 2.3: Jsou-li funkce $f''_{x_k x_l}$ a $f''_{x_l x_k}$ spojité, jsou si rovny.

Def. 2.3: Říkáme, že funkce $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ je harmonická na oblasti $G \subset E_n$, právě když má na *G* spojité všechny parciální derivace prvního a druhého řádu a platí:
pro ∀ $X \in G \quad \varphi''_{x_1 x_1}(X) + \varphi_{x_2 x_2}(X) + ... + \varphi''_{x_n x_n}(X) = 0$.
Levou stranu rovnosti značíme stručně $\Delta\varphi$. ["laplas na φ"]
Znak Δ $\left(\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ se nazývá Laplaceův operátor.

Def. 2.4: (Směrová derivace)
Nechť $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ je jednotkový vektor. Nechť funkce f je definována v bodě X^0 a na nějakém jeho okolí na přímce $X = X^0 + t.\vec{u}$, kde $t \in (-\delta, \delta)$ pro $\delta > 0$.
∃-li derivace $\varphi'(t)$ funkce $\varphi(t) = f(x_1^0 + t.u_1, \ldots, x_n^0 + t.u_n)$, nazýváme ji směrovou derivací funkce *f* v bodě X^0 ve směru vektoru $\vec{u}$ a značíme ji $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X^0)$.

Pozn.: Derivace $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ udává, jak rychle roste, popř. klesá v bodě X^0 funkce f ve směru $\vec{u}$.



Def. 2.5: (Gradient)
Nechť funkce *f* má v bodě X^0 spojité parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$. Pak vektor $\left(f'_{x_1}(X^0), f'_{x_2}(X^0), ..., f'_{x_n}(X^0)\right)$ nazýváme gradientem funkce *f* v bodě X^0 a značíme jej $\overrightarrow{grad}\, f(X^0)$ nebo $\nabla f(X^0)$ ("nabla").
Lze jej rozšířit na množinu bodů *X* a obdržet vektorovou funkci
$\overrightarrow{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

Věta 2.4: Má-li funkce *f* v bodě X^0 spojité parciální derivace prvního řádu podle všech svých proměnných, má v bodě X^0 směrovou derivaci ve směru každého (jednotkového) vektoru $\vec{u}$ a platí:
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X^0) = \overrightarrow{grad}\, f(X^0).\vec{u}$$

Pozn.: Dále platí
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \left|\overrightarrow{grad}\, f\right|.\left|\vec{u}\right|.\cos\varphi$$
$\left|\overrightarrow{grad}\, f\right|$ … největší směr derivace
$\left|\vec{u}\right|$ …….1 $\quad \langle -1,\ 1\rangle$

Je-li $grad\, f(X^0) = 0$, je $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X^0) = 0$ pro každý vektor $\vec{u}$. Je-li $grad\, f(X^0) \neq 0$, $\exists$ jistá maximální směrová derivace.
Je to derivace ve směru vektoru $\vec{g} = \dfrac{\overrightarrow{grad}\ f(X^0)}{\left|grad\ f(X^0)\right|}$.

Def. 2.6: (Totální diferenciál)
Nechť funkce $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ je definovaná na okolí bodu X^0. Říkáme, že lineární funkce $l(dx_1, dx_2, ..., dx_n) = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + ... + A_n dx_n$ je totálním (úplným)

diferenciálem funkce f v bodě X^0, platí-li:

$$\lim_{[dx_1, dx_2, \ldots] \to [0,0,\ldots]} \frac{\left[f\left(x_1^0+dx_1, x_2^0+dx_2, \ldots, x_n^0+dx_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)\right] - \left(A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots\right)}{\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2}} = 0$$

Totální diferenciál funkce značíme dl.

Věta 2.5: a) Má-li funkce f v bodě X^0 totální diferenciál, je v tomto bodě spojitá, má v něm parciální derivaci 1. řádu podle všech svých proměnných a směrové derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X^0)$ (pro libovolný jednotkový vektor $\vec{u}$).

Přitom platí: $A_i = f_{x_i}\left(X^0\right)$, i = 1, 2, ..., n

tj. $$df = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\left(X^0\right).dx_i$$

b) Má-li funkce f v bodě X^0 spojité parciální derivace 1. řádu podle všech svých proměnných, má v tomto bodě také totální diferenciál.

Pozn.: 1) Přírůstky souřadnic $x_1 x_2 \ldots x_n$ tj. $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ se nazývají diferenciály nezávisle proměnných.
Totální diferenciál funkce $z = f(x,y)$ v bodě $X^0 = \left[x^0, y^0\right]$ pak je
$dz = f'_x(x^0,y^0)dx + f'_y(x^0,y^0)dy$.

2) Pro body X blízké bodu X^0 lze psát $f(X) \approx f(X^0) + df$ nebo
$$f(X) \approx f(X^0) + f'_{x_1}(X^0).(x_1 - x_1^0) + f'_{x_2}(X^0).(x_2 - x_2^0) + \ldots + f'_{x_n}(X^0).(x_n - x_n^0)$$

Def. 2.7: Kvadratickou formu $d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(X^o) dx_i dx_j$ nazýváme totálním diferenciálem 2. řádu funkce f v bodě X^0. Analogicky definujeme totální diferenciály vyšších řádů.

Věta 2.6: (Taylorova věta)
Nechť funkce f má na okolí bodu X^0 totální diferenciály až do řádu k a nechť $\vec{u} = X - X^0$.

Pak platí: $$f(X) = f(X^0) + \frac{1}{1!}df + \frac{1}{2!}d^2 f + \ldots + \frac{1}{k!}d^k f + R_{k+1}(\vec{u}).$$

Přičemž pro zbytek $R_{k+1}(\vec{u})$ platí $\lim_{|\vec{u}| \to 0} \frac{R_{k+1}(\vec{u})}{|\vec{u}|^k} = 0$.

Příklad: Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí

1. $z = \frac{3xy}{x-y}$
2. $z = (\sin x)^{\cos y}$
3. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$
4. $z = xye^{\sin \pi xy}$
5. $z = (x+y)^y$
6. $z = (2x+y)^{2x+y}$

7. $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$ 8. $z=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Výsledky: 1. $z'_x=-\dfrac{3y^2}{(x-y)^2}$; $z'_y=\dfrac{3x^2}{(x-y)^2}$

2. $z'_x=\cos x\cos y(\sin x)^{(\cos y)-1}$; $z'_y=-(\sin x)^{\cos y}.\sin y.\ln(\sin x)$

3. $z'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y=\dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$

4. $z'_x=y(1+\pi xy\cos\pi xy)z$; $z'_y=x(1+\pi xy\cos\pi xy)z$

5. $z'_x=y(x+y)^{y-1}$; $z'_y=(x+y)^y\left[\ln(x+y)+\dfrac{y}{x+y}\right]$

6. $z'_x=2[1+\ln(2x+y)]z$; $z'_y=[1+\ln(2x+y)]z$

7. $z'_x=-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y=\dfrac{-2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$

8. $z'_x=\dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$; $z'_y=\dfrac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

Příklad: Vypočtěte všechny požadované derivace daných funkcí

1. $z=x^2\sin^2 y$; $z'''_{xxy}=?$

2. $z=e^x\ln y+\sin y\ln x$, $z'''_{xyy}=?$, $z'''_{yyy}=?$

3. $z=x^2y+e^{xy^2}$; $z'''_{xxy}=?$

Výsledky: 1. $z'''_{xxy}=2\sin 2y$

2. $z'''_{xyy}=-\dfrac{e^x}{y^2}-\dfrac{\sin y}{x}$; $z'''_{yyy}=\dfrac{2e^x}{y^3}-\cos y\ln x$

3. $z'''_{xxy}=2+e^{xy^2}y^3(4+2xy^2)$

Příklad: Dokažte, že daná funkce vyhovuje dané diferenciální rovnici

1. $z=\ln(e^x+e^y)$, $z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2=0$

2. $z=\arctan(2x-y)$, $z''_{xx}+2z''_{xy}=0$

3. $z=2\cos^2(x-\dfrac{y}{2})$, $2z''_{yy}+z''_{xy}=0$

4. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x+y}}-y\sqrt{x+y}$, $z''_{xx}-2z''_{xy}+z''_{yy}=0$

Příklad: Určete gradient v bodě A,dz v bodě A a d^2z v bodě A funkce $f(x,y)$

1. $z=\sin x\cos y,\ T=(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ ?),\ A=(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4})$

2. $z=y\ln x,\ T=(1,\ 1,\ ?),\ A=(1,\ 1)$

3. $z=x\sin^2 y,\ T=(1,\ \frac{\pi}{2},\ ?),\ A=(1,\ \frac{\pi}{2})$

4. $z=e^{xy},\ T=(1,\ 2,\ ?),\ A=(1,\ 2)$

Výsledky: 1. $\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j},\ \frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy,\ -\frac{1}{2}dx^2-dxdy-\frac{1}{2}dy^2$

2. $\vec{i},\ dx,\ -dx^2+2dxdy$

3. $\vec{i},\ dx,\ -2dy^2$

4. $2e^2\vec{i}+e^2\vec{j},\ 2e^2dx+e^2dy,\ 4e^2dx^2+6e^2dxdy+e^2dy^2$

Příklad: Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $z=f(x,y)$ v bodě A

1. $z=\sin x\sin y,\ A=(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}),\ n=3$

2. $z=\frac{\cos x}{\cos y},\ A=(0,\ 0),\ n=2$

3. $z=\ln(1-x)\ln(1-y),\ A=(0,\ 0),\ n=3$

4. $z=3x^2y+\sin^2 x+5y-2,\ A=(0,\ 0),\ n=3$

5. $z=x\sin^2 y,\ A=(1,\ \frac{\pi}{2}),\ n=2$

Výsledky: 1.
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})\ (y-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{4}(y-\frac{\pi}{4})^2-$$
$$-\frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{4})^3-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2(y-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{4})\ (y-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{12}(y-\frac{\pi}{4})^3$$

2. $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$

3. $xy+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2$

4. $-2+5y+x^2+3x^2y$

5. $1+(x-1)-(y-\frac{\pi}{2})^2$