4. ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE POLE

Fyzika: - teploty vzduchu v různých místech - pole teplot
- intenzita el. pole ($\vec{E}$) od bodového náboje - elektrostatické pole

Skalární pole - charakterizujeme v každém bodě pole skalárem (φ - potenciál, T - teplota, p - tlak, ...)

Vektorové pole - charakterizujeme v každém bodě vektorem ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ - někdy "silové" pole, char. vektorem $\vec{a}$ ($\vec{r}$), ...)

Funkce $u(\vec{r})$, charakterizující skalární pole, může záviset na čase *t*, pokud nezávisí - stacionární pole

Ekvipotenciální plocha (hladina): $u(x, y, z) = C$, kde $u(x_0, y_0, z_0) = C$

V případě skalárního pole - jak se mění hodnoty funkce $u(x, y, z)$ v bodech dané přímky → derivace funkce v daném směru

Přímka $P + s\vec{\tau}$, $s \in (-\infty, +\infty)$

Derivace funkce *u* v bodě *P* ve směru $\vec{\tau}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}}(P) = \lim_{s \to 0} \frac{u(P + s\vec{\tau}) - u(P)}{s|\vec{\tau}|}$$

Vektor $\overrightarrow{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

Jeho velikost $\left|\overrightarrow{grad}\, u\right| = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}$

Lze ukázat, že

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}}(P) = \frac{1}{\vec{\tau}}\left[\overrightarrow{grad}\, u(P)\right]\vec{\tau} = \overrightarrow{grad}\, u\,(P).\overrightarrow{\tau^0}$$

Největší derivace je v tom směru, který je rovnoběžný s gradientem.

Vektor $\overrightarrow{grad}\, u$ je souhlasně rovnoběžný s normálou k ekvipotenciální ploše ve směru, v němž funkce *u* je rostoucí, a číselně se rovná rychlosti přírůstku funkce *u* v tomto směru.

Vlastnosti gradientu:

1. $\overrightarrow{grad}(u.v) = v.\overrightarrow{grad}\, u + u.\overrightarrow{grad}\, v$
2. $\overrightarrow{grad}(u + v) = \overrightarrow{grad}\, u + \overrightarrow{grad}\, v$
3. $grad\frac{u}{v} = \frac{v.\overrightarrow{grad}\, u - u.\overrightarrow{grad}\, v}{v^2}$
4. $\overrightarrow{grad}\, F(u) = \frac{dF}{du}.\overrightarrow{grad}\, u$

Vektorovou křivkou (siločárou) nazýváme křivku, jejíž tečna v každém jejím bodě je totožná se směrem vektorového pole (se směrem vektoru $\vec{a}(\vec{r})$).
Využívá se pro grafické znázornění vektorového pole.

Divergence vektorového pole

Nechť $\vec{a}(X) = P(X)\vec{i} + Q(X)\vec{j} + R(X)\vec{k}$, přičemž $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$ mají na $M \subseteq E_3$ parciální derivace. Pak funkci

$$div\,\vec{a}(X) = \frac{\partial P(X)}{\partial x} + \frac{\partial Q(X)}{\partial y} + \frac{\partial R(X)}{\partial z}$$

nazýváme divergencí vektorového pole vytvořeného vektorovou funkcí $\vec{a}(X)$.

Divergence vektorového pole je skalární veličinou. Vytváří skalární pole v daném vektorovém poli.

Je-li $\vec{a}$ vektorové pole rychlosti proudící tekutiny, pak bod P, v němž $div\,\vec{a}(P) > 0$, představuje zdroj (zřídlo), odkud kapalina vytéká (znázorněno siločarami), a bod P', v němž $div\,\vec{a}(P') < 0$, představuje nor pohlcující kapalinu.

Vektorové pole, jehož $div\,\vec{a} = 0$, se nazývá solenoidální (nezřídlové) - vektorové křivky jsou buď uzavřené, nebo mohou začínat (končit) na hranici definičního oboru pole.

Vlastnosti divergence:

1. $div\,(\vec{a} + \vec{b}) = div\,\vec{a} + div\,\vec{b}$
2. $div\,(u\vec{a}) = u.div\,\vec{a} + \vec{a}.\overrightarrow{grad\,u}$ $\qquad$ $u(x, y, z)$ - skalární funkce
3. $div\left[f(|\vec{r}|)\vec{r}\right] = 3f(|\vec{r}|) + |\vec{r}|f'(|\vec{r}|)$

Rotace vektorového pole

je vektor, jehož projekce do libovolného směru se rovná limitě podílu cirkulace vektorového pole po obvodu rovinné plošky kolmé na tento směr, pro obsah této plošky $S_i \to 0$:

$$\lim_{S_i \to 0} \frac{\oint_L \vec{a}d\vec{r}}{S_i} = rot_n\vec{a} = (rot \quad \vec{a}).\vec{n},$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový normálový vektor k plošce s obsahem S_i.

Máme-li $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, pak

$$rot_x\vec{a} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$rot_y\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$rot_x\vec{a} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

nebo

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Tedy lze psát $rot\vec{a} = \overrightarrow{\nabla x \vec{a}}$

Kde nabla $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ (Hamiltonův operátor)

Vlastnosti rotace vektorového pole

1. $div(rot\vec{a}) = 0$
2. $rot(\vec{a} + \vec{b}) = rot\vec{a} + rot\vec{b}$
3. $rot(u\vec{a}) = u.rot\vec{a} + \overrightarrow{grad\,u} \times \vec{a}$
4. $div(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}.rot\vec{a} - \vec{a}.rot\vec{b}$

Pozn.: $grad\varphi = \nabla\varphi$ $div\vec{a} = \nabla\vec{a}$ $rot\vec{a} = \nabla x\vec{a}$

$\Delta u = div(\overrightarrow{grad\,u})$ $\Delta = \nabla.\nabla$

Věta 4.1: Platí $rot(rot\,\vec{a}) = grad(div\,\vec{a}) - \Delta\vec{a}$

Def.: Pole vektoru $\vec{a}$ se nazývá potenciální na oblasti Ω, $\exists$ -li takové skalární pole *u* na Ω, že $\vec{a} = \overrightarrow{grad\,u}$.
Je-li pole vektoru $\vec{a}$ potenciální, je bezvírové a $rot\,\vec{a} = 0$. $rot\,\vec{a} = 0$ není však postačující podmínkou pro potenciální pole.
Oblast Ω musí být jednoduše souvislá, aby vektorové pole $\vec{a}$, jehož $rot\,\vec{a} = 0$ na Ω, bylo potenciální.

Věta 4.2: Nechť vektorové pole $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ je potenciální, tj. takové, že $rot\,\vec{a} = 0$. Nechť *C* je orientovaná křivka s počátečním bodem *A* a koncovým bodem *B*. Pak hodnota křivkového integrálu

$$\int_C \left[P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\right] \qquad (*)$$

závisí jen na volbě bodů *A, B* - tj. nezávisí na integrační cestě.

Pokud *C* je uzavřená křivka, pak předchozí integrál (*) je roven nule (≡ Cirkulace vektoru $\vec{a}$ po každé uzavřené křivce $\oint_L \vec{a}d\vec{r} = 0$, je-li pole $\vec{a}$ potenciální).

Věta 4.3: Nutná a postačující podmínka, aby integrál (*) nezávisel na integrační cestě, je, aby $\exists$ taková funkce *F*(*x*,*y*,*z*), aby integrand byl jejím totálním diferenciálem, resp. aby $\vec{a} = grad\,F(x,y,z)$.

Tok vektorového pole

Def.: Tokem vektorového pole vektoru $\vec{f}$ plochou S nazýváme plošný integrál 2. druhu

$$Q = \iint_S \vec{f} d\vec{S} \qquad \text{někdy ozn. } (\Phi), (N)$$

Ve skalární formě: $Q = \iint_S f_n dS$

Gaussova věta

Nechť *S* je uzavřená (jednoduchá) po částech hladká plocha, orientovaná normálovým vektorem vně. Nechť *A* je množina skládající se ze všech bodů plochy *S* a její vnitřní oblasti. Nechť funkce $\vec{f}$ a $div \vec{f}$ jsou spojité na oblasti *A*. Pak platí

$$\iiint_A div \vec{f}(P) dxdydz = \oiint_S \vec{f}(P) d\vec{S}$$

Stokesova věta

Nechť *S* je jednoduchá po částech hladká plocha a *C* je její okraj. Nechť funkce $\vec{f}$ je spolu se všemi svými parciálními derivacemi 1. řádu spojitá na oblasti $\Omega \subset E_3$, obsahující plochu *S*. Pak platí

$$\oint_C \vec{f}(P) d\vec{r} = \iint_S rot \vec{f}(P) d\vec{S}$$

tj. tok vektoru $rot \vec{f}$ plochou *S* se rovná cirkulaci vektoru $\vec{f}$ po jejím okraji *C*.

Pozn.: Tok vektorového pole, které je solenoidní ($div \vec{B} = 0$), uzavřenou plochou je roven nule.

Pozn.: Nechť máme solenoidní vektorové pole $\vec{f}$ na *M*. Pak $\exists$ vektorové pole $\vec{A}$ takové, že

$\vec{f}(P) = rot \vec{A}(P)$.

Vektorové pole $\vec{A}$ nazýváme vektorovým potenciálem pole $\vec{f}$.

Vektorový potenciál $\vec{A}$ není určen jednoznačně - platí i pro

$\overrightarrow{A^*}(P) = \vec{A}(P) + grad\, \varphi(P)$ - $\boldsymbol{\varphi}$ - libovolná diferenciální funkce